

Я.М.Григоренко¹, Л.С.Рожок²

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРИВИЗНЫ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ С ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ В ВИДЕ ВОГНУТЫХ ПОЛУГОФРОВ

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; yaagrigorenko@yandex.ru;*
²*Национальный транспортный университет,
ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; r.l.s@ua.fm*

Abstract. An effect of changing the curvature parameters on the stress state of the hollow cylinders which cross sections has the form of concave semi-corrugations. This curvature varies due to the variation of moved circle radius and distance to its center. The problem is solved in the 3D formulation with use of analytical methods of separation of variables, approximation of functions by Fourier series and numerical method of discrete orthogonalization. The results are presented in the form of plots of displacement and stress distributions. Analysis of findings is given.

Key words: discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, concave semi-corrugations, noncircular hollow cylinders, stress state.

Введение.

Оболочечные конструкции оптимальным образом сочетают в себе, с одной стороны, минимальный вес, а с другой – необходимую прочность и жесткость. Именно поэтому они являются основными в разных отраслях техники (аэрокосмической, энергетической и др.) [2, 6, 8].

Для таких конструкций, зачастую сложной формы и неоднородной структуры, актуальным является разработка эффективных методов решения многочисленных задач напряженности и деформирования [3, 7, 10, 12, 14].

Непростые условия эксплуатации конструкций подобного типа предъявляют повышенные требования к жесткостным характеристикам, которые в свою очередь, могут варьироваться в зависимости от выбора материала [4], либо изменением формы поперечного сечения.

Данная статья является продолжением исследований напряженного состояния полых изотропных цилиндров со сложным поперечным сечением в виде вогнутых соединенных полугофров, которое описано с помощью укороченной гипоциклоиды. При этом исследуется влияние изменения параметров кривизны поперечного сечения на напряженное состояние цилиндров.

Изменение радиуса кривизны поверхности отсчета приводит к изменению жесткости поперечного сечения цилиндров, что в свою очередь, вследствие действия поверхностных нагрузок, оказывает влияние на распределение полей напряжений и перемещений.

Разрешающая система уравнений, описывающая напряженное состояние данного класса задач, содержит коэффициенты, зависящие от величины радиуса кривизны срединной поверхности, величина которого, как известно, определяется уравнениями поверхности отсчета и их производными [5]. Для решения такой системы уравнений с применением численно-аналитических методов необходимо, чтобы поперечное сечение поверхности отсчета было задано гладкой кривой без особенностей и разрывов, допускающих непрерывные производные.

Задача решена в пространственной постановке с использованием численно-аналитических методов разделения переменных, аппроксимации функций дискретными рядами Фурье и дискретной ортогонализации [1, 9, 13].

§1. Постановка задачи и метод решения.

Рассмотрим упругие полые цилиндры постоянной толщины под действием внутреннего давления $q = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$) в ортогональной криволинейной системе координат s, ψ, γ , где s – длина дуги образующей; ψ – угловой параметр, центральный угол в поперечном сечении ($0 \leq \psi \leq 2\pi$); γ – нормальная координата по толщине цилиндра ($\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$).

В данной системе координат первая квадратичная форма имеет вид

$$dS^2 = ds^2 + B_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2,$$

где $B_2 = B_2(\psi, \gamma) = H_2(\psi, \gamma)\omega(\psi)$; $H_2 = H_2(\psi, \gamma) = 1 + \frac{\gamma}{R(\psi)}$ – параметр Ламе; $R_\psi = R(\psi) =$

$$= \left(\left(\frac{dx}{d\psi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi} \right)^2 \right)^{3/2} \left/ \frac{dx}{d\psi} \frac{d^2y}{d\psi^2} - \frac{dy}{d\psi} \frac{d^2x}{d\psi^2} \right. - \text{радиус кривизны в поперечном сечении;}$$

$$\omega = \omega(\psi) \sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi} \right)^2} - \text{коэффициент}$$

перехода от координаты дуги направляющей к угловому параметру ψ .

Поперечное сечение направляющей поверхности отсчета задано укороченной гипоциклоидой в параметрическом виде [6, 14]

$$\begin{aligned} x &= (A - a) \cos \psi + \lambda a \cos \left(\frac{A - a}{a} \psi \right); \\ y &= (A - a) \sin \psi - \lambda a \sin \left(\frac{A - a}{a} \psi \right). \end{aligned}$$

Здесь A – радиус неподвижной окружности; a ($a > 0$) – радиус подвижной окружности; λa ($\lambda < 1$) – расстояние до центра подвижной окружности.

В рассматриваемой задаче срединная поверхность задана в параметрическом виде укороченной гипоциклоидой, при этом значение радиуса кривизны зависит как от величины подвижной окружности (a), так и от расстояния до ее центра, характеризующегося параметром λ . При этом значение подвижной окружности определяет количество соединенных вогнутых полугофров (A/a), а параметр λ – величину (амплитуду) полугофров.

На рис. 1 показана поверхность отсчета поперечного сечения в зависимости от изменения амплитуды полугофров при постоянном значении радиуса подвижной окружности (рис. 1, а – для $a = -4$; рис. 1, б – для $a = -7$). На рис. 2 представлена форма по-

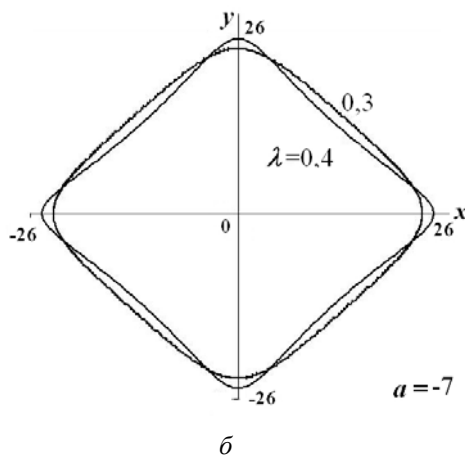
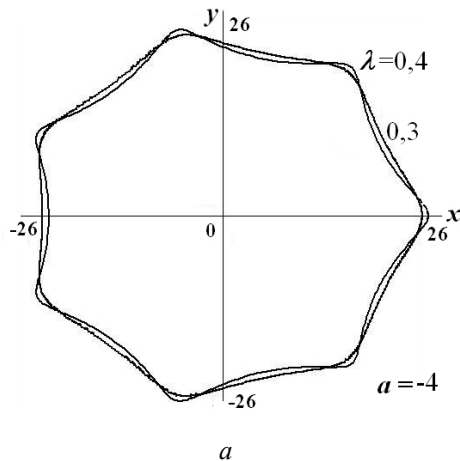


Рис. 1

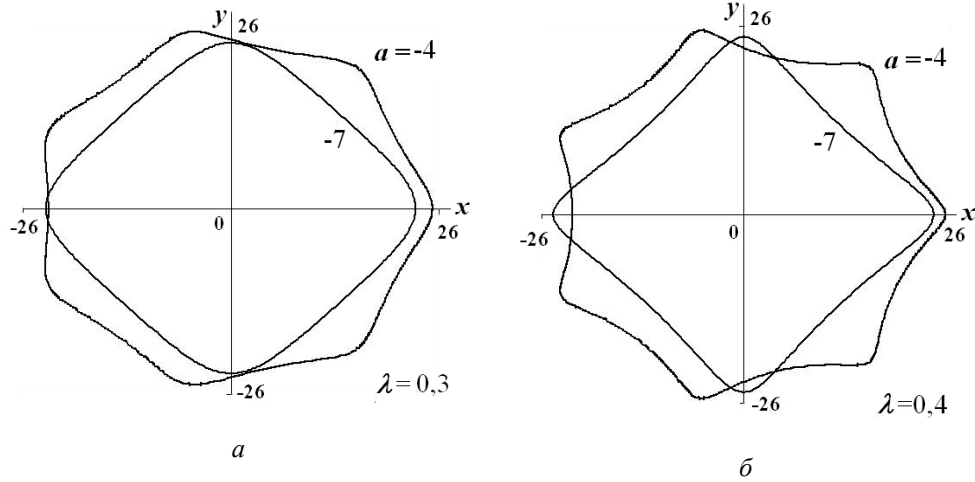


Рис. 2

верхности отсчета в зависимости от изменения величины радиуса подвижной окружности для постоянного значения параметра λ (рис. 2, а – для $\lambda = 0,3$; рис. 2, б – для $\lambda = 0,4$).

В качестве исходных уравнений принимаем уравнения пространственной теории упругости для изотропного тела [15].

Выражения деформаций через перемещения имеют вид

$$\begin{aligned}
 e_s &= \frac{\partial u_s}{\partial s}; \quad e_\psi = \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2} \frac{1}{R_\psi} u_\gamma; \quad e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}; \quad e_{s\psi} = \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s}; \\
 e_{s\gamma} &= \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \gamma}; \quad e_{\psi\gamma} = -\frac{1}{H_2} \frac{1}{R_\psi} u_\psi + \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi};
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

уравнения равновесия –

$$\begin{aligned}
 H_2 \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial \psi} + \frac{1}{R_\psi} \tau_{s\gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= 0; \\
 \frac{1}{\omega} \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \psi} + 2 \frac{1}{R_\psi} \tau_{\psi\gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial s} &= 0; \\
 \frac{1}{R_\psi} \sigma_\gamma + H_2 \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} + H_2 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} - \frac{1}{R_\psi} \sigma_\psi &= 0;
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

обобщенный закон Гука для изотропного тела –

$$\begin{aligned}
 e_s &= \frac{1}{E} [\sigma_s - \nu(\sigma_\psi + \sigma_\gamma)]; \quad e_\psi = \frac{1}{E} [\sigma_\psi - \nu(\sigma_\gamma + \sigma_s)]; \quad e_\gamma = \frac{1}{E} [\sigma_\gamma - \nu(\sigma_s + \sigma_\psi)]; \\
 e_{\psi\gamma} &= \frac{1}{G} \tau_{\psi\gamma}; \quad e_{s\gamma} = \frac{1}{G} \tau_{s\gamma}; \quad e_{s\psi} = \frac{1}{G} \tau_{s\psi}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$(0 \leq s \leq l; 0 \leq \psi \leq 2\pi; \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2).$$

В соотношениях (1.1) – (1.3) u_s, u_ψ, u_γ – соответственно, перемещения по образующей, направляющей и толщине; $e_s, e_\psi, e_\gamma, e_{s\psi}, e_{s\gamma}, e_{\psi\gamma}, \sigma_s, \sigma_\psi, \sigma_\gamma, \tau_{s\psi}, \tau_{\psi\gamma}, \tau_{s\gamma}$ – соответствующие деформации и напряжения; E – модуль упругости; $G = E/2(1+\nu)$ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

На торцах цилиндра задаются граничные условия в виде

$$\sigma_s = 0; u_\psi = 0; u_\gamma = 0 \text{ при } s = 0, s = l, \quad (1.4)$$

что соответствует наличию диафрагмы, абсолютно жесткой в своей плоскости и гибкой из нее.

На боковых поверхностях граничные условия имеют вид:

$$\sigma_\gamma = q_\gamma; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{\psi\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = \gamma_1; \quad (1.5)$$

$$\sigma_\gamma = 0; \tau_{s\gamma} = 0; \tau_{\psi\gamma} = 0 \text{ при } \gamma = \gamma_2. \quad (1.6)$$

В качестве разрешающих принимаются функции, в которых формулируются граничные условия, т.е. компоненты напряжений $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{\psi\gamma}$ и перемещений u_γ, u_s, u_ψ . Разрешающую систему уравнений в частных производных шестого порядка с переменными коэффициентами, полученную из основных уравнений (1.1) – (1.3), представим в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2 R_\psi} \sigma_\gamma - \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} + \\ &+ \frac{1}{H_2 R_\psi} \left[\frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\gamma + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{1}{H_2} \frac{1}{R_\psi} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \frac{1}{H_2} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{\omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{R_\psi} u_\gamma \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \right] - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right]; \\ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \gamma} &= -\frac{2}{H_2 R_\psi} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_\gamma \right] - \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s} \right) \right]; \quad (1.7) \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} - \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right) + \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \sigma_\gamma; \\ \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{s\gamma} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_\psi}{\partial \gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\psi\gamma} - \frac{1}{B_2} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\psi \end{aligned}$$

$$(0 \leq s \leq l; \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi; \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2)$$

с граничными условиями (1.4) – (1.6).

Для решения краевой задачи (системы уравнений (1.7) с граничными условиями (1.4) – (1.6)) применяем метод разделения переменных путем разложения соответствующих функций в ряды Фурье в двух направлениях – вдоль образующей и направляющей цилиндра, с использованием аппроксимации некоторых из них дискретными рядами Фурье, а также численный метод дискретной ортогонализации.

Разрешающая система дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, описывающая двумерную краевую задачу, получена вследствие разделения переменных путем представления разрешающих функций и компонент нагрузки в виде разложений в ряды Фурье по координате s [9]:

$$X(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(\psi, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, \psi, \gamma) = \sum_{n=0}^N Y_n(\psi, \gamma) \cos \lambda_n s \quad (1.8)$$

$$\left(X = \{ \sigma_\gamma, \tau_{\psi\gamma}, u_\gamma, u_\psi, q_\gamma \}, Y = \{ \tau_{s\gamma}, u_s \}, \lambda_n = \frac{\pi n}{l} (0 \leq s \leq l) \right).$$

Далее, предварительно введем в разрешающую систему уравнений дополнительные функции, представляющие собой произведения разрешающих функций на коэффициенты, зависящие от двух координат ψ и γ в виде

$$\varphi_1^j = \frac{1}{H_2 R_\psi} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2 R_\psi} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1, 5});$$

$$\varphi_2^j = \frac{1}{H_2 R_\psi} \{ \tau_{\psi\gamma}; u_\psi \} \quad (j = \overline{1, 2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \frac{\partial u_s}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3}); \quad (1.9)$$

$$\varphi_4^j = \frac{1}{B_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi}; \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi}; \frac{1}{R_\psi} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right\} \quad (j = \overline{1, 3});$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \psi} \varphi_4^2.$$

Тогда разрешающие и дополнительные функции, а также компоненты нагрузки, представляются в виде разложений в ряды Фурье по координате ψ . Введение дополнительных функций (1.9) дает возможность формально записать разрешающую систему уравнений для двумерной краевой задачи в виде, допускающем разделение переменных в направлении угловой координаты.

Соответственно, разложения разрешающих и дополнительных функций, а также компонент нагрузки в ряды Фурье по координате ψ имеют вид

$$\tilde{X}(\psi, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos k\psi; \quad \tilde{Y}(\psi, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin k\psi; \quad (1.10)$$

$$\tilde{X} = \{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma \}; \quad \tilde{Y} = \{ \tau_{\psi\gamma}, u_\psi, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7 \}.$$

В результате разделения переменных, систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных значений рядов Фурье (1.10) запишем в таком виде (в обозначениях разрешающих функций и компонент нагрузки опущен индекс n , соответствующий разложениям в ряды Фурье (1.8)):

$$\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} = \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} - 1 \right) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 - \frac{E}{1-\nu^2} (\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + \varphi_{4,k}^3 + \varphi_{1,k}^5);$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -\frac{\nu}{1-\nu}\lambda_n\sigma_{\gamma,k} + \frac{E}{1-\nu^2}\lambda_n^2u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\right)\lambda_n\varphi_{4,k}^2 - \\
&\quad - \frac{E\nu}{1-\nu^2}\lambda_n\varphi_{1,k}^3 - \frac{E}{2(1+\nu)}\varphi_{6,k}; \\
\frac{d\tau_{\psi\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\lambda_n^2u_{\psi,k} - 2\varphi_{2,k}^1 + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\right)\lambda_n\varphi_{3,k}^3 - \\
&\quad - \frac{E}{1-\nu^2}(\varphi_{7,k} + \varphi_{5,k}) - \frac{\nu}{1-\nu}\varphi_{3,k}^1; \\
\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \frac{(1-\nu-2\nu^2)}{(1-\nu)E}\sigma_{\gamma,k} + \frac{\nu}{1-\nu}(\lambda_nu_{s,k} - \varphi_{4,k}^2 - \varphi_{1,k}^3); \\
\frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{s\gamma,k} - \lambda_nu_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{\psi,k}}{d\gamma} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\psi\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

с граничными условиями

$$\sigma_{\gamma,k} = q_{\gamma,k}; \tau_{s\gamma,k} = 0; \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_1; \tag{1.12}$$

$$\sigma_{\gamma,k} = 0; \tau_{s\gamma,k} = 0; \tau_{\psi\gamma,k} = 0 \quad \text{при } \gamma = \gamma_2. \tag{1.13}$$

Для решения полученной краевой задачи (1.11) – (1.13) применяем устойчивый численный метод дискретной ортогонализации одновременно для всех k гармоник разложений в ряды Фурье (1.10). В начале интегрирования, с учетом граничных условий, по заданным начальным значениям разрешающих функций, определяем начальные значения дополнительных функций. Далее, в процессе интегрирования, на каждом шаге применения численного метода амплитудные значения дополнительных функций вычисляем по текущим значениям амплитуд разрешающих функций с использованием метода аппроксимации функций дискретными рядами Фурье. При этом следует отметить, что с увеличением количества точек, в которых вычисляются значения дополнительных функций, дискретный ряд Фурье все меньше будет отличаться от обычного [11].

§2. Числовые результаты и их анализ.

Проведем исследование влияния параметров кривизны, вызванное изменением величины радиуса подвижной окружности a и расстояния до ее центра λ , на напряженное состояние полых изотропных цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров постоянной толщины. Задачу решаем при таких исходных данных: длина цилиндра $l = 80$; толщина цилиндра $h = 4$; радиус неподвижной окружности $A = 28$; радиус подвижной окружности $a = 4, 7$; параметр $\lambda = 0,3; 0,4$; модуль Юнга $E = E_0 = \text{const}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

В таблице приведены максимальные (абсолютные) значения радиусов кривизны в местах соединения полугофров ($\psi = 0$), а также отношение радиуса кривизны к толщине цилиндров ($h = 4$).

Как следует из таблицы, рассматриваемые цилиндры относятся к классу толсто-стенных оболочек.

a	$ A/a $	λ	R_ψ	h/R_ψ
-4	7	0,3	4,20	0,95
		0,4	2,54	1,57
-7	4	0,3	5,42	0,74
		0,4	3,44	1,16

Результаты решения задачи представлены на рисунках в виде графиков распределения полей перемещений (рис. 3) и напряжений (рис. 4, 5) в среднем сечении по длине цилиндра. Сплошной линией обозначены кривые для радиуса подвижной окружности $a = -4$, а штриховой – для $a = -7$. Величина B определяется отношением величины радиусов неподвижной и подвижной окружностей, чем обусловлено количество полугофров рассматриваемых цилиндров и равна $B = 5 \cdot A/a$.

На рис. 3 представлены графики распределения полей перемещений u_γ срединной поверхности отсчета по направляющей цилиндра в зависимости от изменения параметров кривизны, вызванных вариациями величины радиуса подвижной окружности a и расстоянием до центра подвижной окружности, характеризующимся параметром λ .

Максимальных значений перемещения достигают во впадинах полугофров для всех значений параметров кривизны a и λ , при этом они возрастают в 2 ($\lambda = 0,3$) и в 2,5 раза ($\lambda = 0,4$) для $a = -4$, а для $a = -7$ – в 21 ($\lambda = 0,3$) и в 12 раз ($\lambda = 0,4$) по сравнению с минимальными значениями в местах соединения полугофров ($\psi = 0$).

Изменение амплитуды полугофров, связанное с увеличением параметра λ приводит к возрастанию максимальных значений перемещений u_γ в 1,1 раза для $a = -4$ и в 1,4 раза для $a = -7$.

Изменение количества гофров, связанное с величиной радиуса подвижной окружности, приводит к перераспределению перемещений следующим образом: при уменьшении количества гофров с 7 до 4 для $\lambda = 0,3$ значения перемещений увеличиваются в 1,8 раза, а для $\lambda = 0,4$ – в 2,2 раза, что обусловлено, по-видимому, уменьшением жесткости рассматриваемых цилиндров.

На рис. 4 представлены графики распределения напряжений σ_ψ на внутренней поверхности по направляющей цилиндра в зависимости от изменения параметров кривизны, вызванных вариациями величины радиуса подвижной окружности a и расстоянием до ее центра, характеризующимся параметром λ .

Как видно из представленных графиков, максимальных значений напряжения достигают в зонах соединения полугофров ($\psi = 0$), при этом при переходе во впадину полугофров значения напряжений меняют знак на противоположный, а их абсолют-

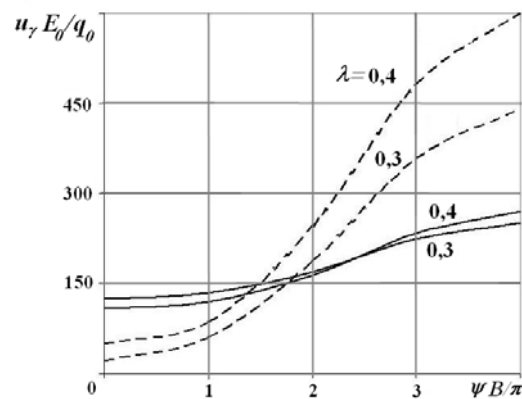


Рис. 3

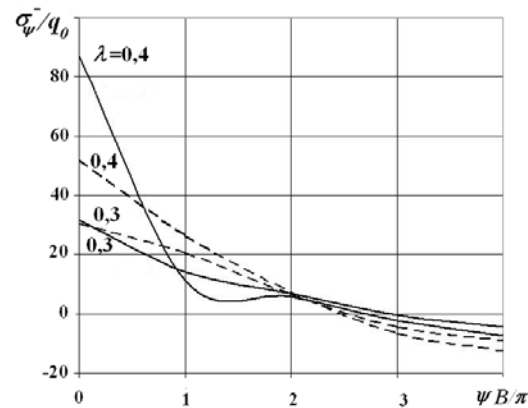


Рис. 4

ные значения уменьшаются примерно в 7,1 раза ($\lambda = 0,3$) и в 11,7 раза ($\lambda = 0,4$) для $a = -4$, а для $a = -7$ – в 3,5 ($\lambda = 0,3$) и в 4,1 раза ($\lambda = 0,4$).

Увеличение параметра λ приводит к росту величины максимальных напряжений в 2,8 для $a = -4$ и в 1,7 раза для $a = -7$.

С увеличением значения радиуса подвижной окружности величина напряжений для $\lambda = 0,3$ практически не изменяется, а для $\lambda = 0,4$ – увеличивается в 1,7 раза.

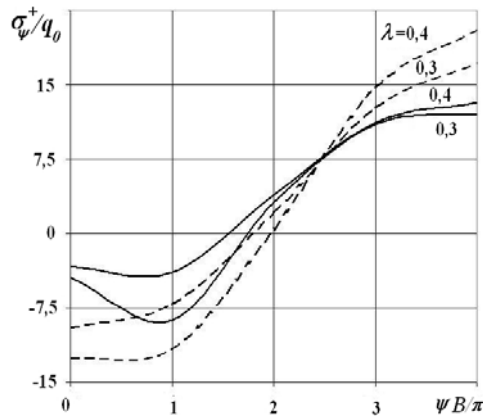


Рис. 5

Характер распределения напряжений σ_{ψ} на внешней поверхности по направлению цилиндра в зависимости от изменения параметров кривизны, вызванных вариациями величины радиуса подвижной окружности a и расстоянием до центра подвижной окружности, характеризующийся параметром λ , представлен на графиках рис. 5.

Максимальных значений напряжения достигают во впадинах полугофров для всех значений параметров кривизны a и λ , при этом они возрастают в 4 ($\lambda = 0,3$) и в 2,7 раза ($\lambda = 0,4$) для $a = -4$, а для $a = -7$ – в 1,8 ($\lambda = 0,3$) и в 1,6 раз ($\lambda = 0,4$) по сравнению с минимальными значениями в местах соединения полугофров ($\psi = 0$).

Более существенное увеличение значений напряжений (в 1,7 раза) имеет место за счет уменьшения количества полугофров, что связано с увеличением значения радиуса подвижной окружности для $\lambda = 0,4$.

Более существенное увеличение значений напряжений (в 1,7 раза) имеет место за счет уменьшения количества полугофров, что связано с увеличением значения радиуса подвижной окружности для $\lambda = 0,4$.

Заключение.

В пространственной постановке решена задача и проведен анализ напряженного состояния полых цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых соединенных полугофров, описанных укороченной гипоциклоидой, в зависимости от изменения параметров кривизны поперечного сечения.

Из полученных результатов следует, что варьируя параметры кривизны поперечного сечения некруговых полых цилиндров, что вызвано изменением величины радиуса подвижной окружности и расстояния до ее центра, можно существенно влиять на жесткость рассматриваемых цилиндров, а это, в свою очередь, оказывает влияние на распределении полей перемещений и напряжений.

Р Е З Ю М Е. Досліджено вплив зміни параметрів кривизни на напружений стан порожнистих циліндрів (з поперечним перерізом у вигляді угнутих напівгофрів). Зміна зумовлена варіаціями радіуса рухомого кола та відстанню до його центра. Задачу розв'язано в просторовій постановці із застосуванням аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та чисельного методу дискретної ортогоналізації. Результати наведено у вигляді графіків розподілу полів переміщень і напружень. Проаналізовано отримані результати.

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171 – 174.
2. Гудрамович В.С. Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций ракетной техники и энергетики // Техническая механика. – 2013. – № 4. – С. 97 – 104.
3. Емельянов И.Г. Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов Фурье // Вычисл. механика сплош. сред. – 2015. – 8, № 3. – С. 245 – 253.
4. Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 196 с.

5. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 292 с.
6. Шацький І.П., Струк А.Б. Напружений стан трубопроводу в зонах локального руйнування ґрунту // Пробл. прочності. — 2009. — № 5. — С. 127 – 133.
7. Andreev V.I. Numerical-analytical solution of two-dimensional problem for elastic radially inhomogeneous thick-walled cylinder // Appl. Mech. and Mater. – 2015. – **752–753**. – P. 642 – 647.
8. Bespalova E.I., Urusova G.P. Vibrations of Shells of Revolution with Branched Meridian // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 117 – 126.
9. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow with Different Cross-Sectional Curvature // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 6. – P. 581–586.
10. Dovbnya K.M., Shevtsova N.A. Studies on the Stress State of an Orthotropic Shell of Arbitrary Curvature with the Through Crack Under Bending Loading // Strength of Materials. – 2014. – **46**, N 3. – P. 345 – 349.
11. Hamming R.W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1962. – 400 p.
12. Hart E.L., Hudramovich V.S., Ryabokon' S.A., Samarskaya E.V. Numerical simulation of stress-strain state for nonhomogeneous shell-type structures based on the finite element method // J. Modeling and Numerical Simulation of Mater. Sci. – 2013. – **3**, N 4. – P. 155 – 157.
13. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: MG Graw-Hill, 1961. – 720 p.
14. Popov G.Ya., Protserov Yu.S., Gonchar I.A. Exact Solution of Some Axisymmetric Problems for Elastic Cylinders of Finite Length Taking Into Account Specific Weight // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 391 – 402.
15. Timoshenko S.P. Theory of Elasticity. – New York: MG Graw-Hill, 1934. – 452 p.
16. Zheng M., Zhao Y., Teng H., Hu J., Yu L. Elastic Limit Analysis for Elliptical and Circular Tubes Under Lateral Tension // Arab. J. Sci. and Eng. – 2015. – **40**, N 6. – P. 1727 – 1732.

Поступила 20.10.2016

Утверждена в печать 30.01.2018

