

А. Я. Григоренко<sup>1</sup>, М. Ю. Борисенко<sup>2</sup>,  
Е. В. Бойчук<sup>2</sup>, А. П. Пригода<sup>2</sup>

### ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

<sup>1</sup>Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,

ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ua;

<sup>2</sup>Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского,

ул. Никольская, 24, 54000, Николаев, Украина; e-mail: maxborisenko530@mail.ru

**Abstract.** The dynamic characteristics of thick-walled isotropic cylindrical shell are determined numerically basing on the finite element method that is realized with the help of a licensed software package FEMAP. A comparative analysis of the obtained frequencies and modes of natural oscillations with frequencies and forms obtained previously experimentally by the stroboscopic interferometry method is carried out. The frequency coefficients are obtained that indicate the relationship between the natural frequency and the physico-mechanical parameters of the material.

**Key words:** natural frequencies, mode shapes, thick-walled cylindrical shell, finite element method, stroboscopic interferometry method.

#### Введение.

Толстостенные цилиндрические оболочки широко применяются как в инженерных конструкциях, так и в различных архитектурных сооружениях. Такие сооружения часто поддаются динамическим нагрузкам разной природы, что может привести, в результате резонанса, к разрушениям. Во избежание таких разрушений необходимо владеть информацией о распределении их динамических характеристик, в частности, о распределении частот и форм свободных колебаний. Решение данной задачи в теории тонких оболочек возможно с помощью различных теорий [3, 5 – 7, 10, 11, 13 – 18], однако в случае толстостенных цилиндрических оболочек становится невозможным применение большинства теорий, поскольку для проведения вычислений в этом случае необходимо использовать пространственную теорию, что связано с большими объемами вычислительного характера. Одним из вариантов решения этой проблемы является использование системы автоматизированного конструирования (computer-aided engineering – CAE), которая дает возможность проводить расчет конструкции любой формы на основе использования метода конечных элементов [1, 2, 8]. Также эту проблему можно решить, используя бесконтактный экспериментальный метод стробоскопической интерферометрии, который дает возможность наблюдать интерференционные картины колебаний поверхности оболочки в реальном времени [4, 9, 12].

Данная статья посвящена численному определению динамических характеристик толстостенной цилиндрической оболочки и сравнению полученных результатов с данными, полученными ранее экспериментально [12].

Согласно [12], регистрация полученных колебательных форм осуществлялась стробоскопическим методом. Оптическая схема установки представляет собой обычную схему голографирования в сходящихся пучках. Объект экспериментального

исследования – консольная закреплённая толстостенная цилиндрическая оболочка высотой 120 мм с внутренним диаметром 70 мм и наружным диаметром 90 мм. Оболочка выточена из стали нацело с основанием, что обеспечило по нижнему краю выполнение условий жёсткого защемления. По полученным экспериментальным данным построены зависимости резонансной частоты  $f$  от количества узлов  $n$  по окружной координате при фиксированном значении  $m$  числа узлов по образующей для изгибных форм и резонансной частоты от числа узлов  $m$  по образующей для «дышащих форм». Также для сравнения приведены графики зависимости собственных частот колебания оболочки в порядке возрастания частоты от их порядкового номера  $N$ , полученные экспериментально и рассчитанные с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Отметим, что подобное сравнение результатов, полученных при помощи указанных выше методов, было проведено в [4] для тонкостенной цилиндрической оболочки некругового поперечного сечения постоянной толщины, которое показало хорошую сходимость полученных собственных частот.

Задача данного исследования состоит в расчете частот свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки МКЭ, который реализован с помощью лицензированного программного комплекса FEMAP, а также в доказательстве возможности применения предложенных двух методик к решению не только двумерной, но и трехмерной задачи динамики.

#### §1. Основные соотношения метода конечных элементов.

Динамические уравнения для МКЭ получим, если рассмотрим уравнения движения механической системы с конечным числом степеней свободы, которая описывается системой уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \lambda_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Используя дискретную форму функционала кинетической энергии  $T = 0,5 \{\dot{\lambda}\}_i^T M_i \{\dot{\lambda}\}_i$ , уравнения Лагранжа (1.1) для оболочки при ее конечно-элементной аппроксимации с учетом отсутствия внешних сил ( $Q = 0$ ) и демпфирования можно записать в виде

$$[M] \{\ddot{\lambda}\} + [K] \{\lambda\} = \{0\}, \quad (1.2)$$

где  $[M]$  – матрица масс конструкции;  $[K]$  – матрица жесткости;  $\{\lambda\}$  – вектор узловых смещений.

Решение уравнения (1.2) представим в виде

$$\{\lambda\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (1.3)$$

где  $\{A\}$  – вектор амплитудных значений узловых перемещений, которые определяют форму собственных колебаний;  $\omega$  – циклическая частота;  $\beta$  – фаза колебаний. После подстановки (1.3) в (1.1) и сокращения на  $\cos(\omega t + \beta)$ , получим систему алгебраических уравнений:

$$(-\omega^2 [M] + [K]) \{A\} = \{0\}. \quad (1.4)$$

В этой системе ненулевые значения компонентов  $\{A\}$  возможны только при условии

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0. \quad (1.5)$$

Если квадратные матрицы  $[M]$  и  $[K]$  – положительно определены, то характеристические уравнения (1.5) имеют  $N$  положительных решений – собственных час-

тот  $\omega_k$ , при этом возможны парные значения ( $N$  – количество неизвестных в системе алгебраических уравнений (1.4)).  $N$  значений собственных частот  $\omega_k$  позволяет решение системы (1.4) представить в виде линейной комбинации из  $N$  выражений (1.3), т.е.

$$\{\lambda\} = \sum_{k=1}^N \{A_k\} \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (1.6)$$

Как правило, определяют не все корни уравнения (1.5), а несколько наименьших значений, поскольку только при нижних собственных частотах их амплитуды колебаний имеют относительно большие значения.

Каждому значению  $\omega_k$  соответствует определенное соотношение между амплитудами  $A_{ki}$ , т.е. все амплитуды вектора могут быть выражены через одну из них. Соотношения между амплитудами  $A_{ki}$  определяют  $k$ -тую собственную форму колебаний. Все степени свободы в процессе колебаний с собственной частотой  $\omega_k$  совершают синхронное движение. Таким образом, конфигурация конструкции не меняет своей базисной формы, а меняются только амплитуды.

Изменение формы линейной упругой конструкции со временем, когда она свободно колеблется или совершает вынужденные колебания, является комбинацией всех ее собственных форм.

Поскольку величина компонентов собственных векторов  $\{A_k\}$  может быть определена неоднозначно, а с точностью до постоянного множителя, то необходимо их нормировать согласно правилу:

$$\{A_k\}^T [M] \{A_k\} = 1. \quad (1.7)$$

Для решения характеристического уравнения рационально использовать, как основной, метод Ланцоша (Lanczos), что позволит затратить меньше ресурсов в сравнении с остальными методами.

## §2. Построение расчетной модели.

С помощью FEMAP была построена геометрия оболочки в виде цилиндрической поверхности кругового сечения. Параметры моделирования выбраны в соответствии с формой и размерами оболочки, которую исследовали на частоты и формы свободных колебаний методом стробоголографической интерферометрии [12]. Для реализации жёсткого закрепления по контуру при экспериментальных исследованиях оболочка 1 выточена вместе с массивным телом 2 (рис. 1). Поскольку метод стробоголографической интерферометрии показал нулевые перемещения на стыке оболочки и массивно-

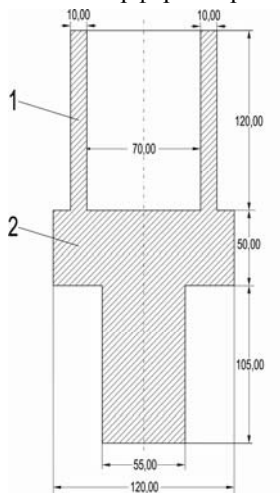


Рис. 1

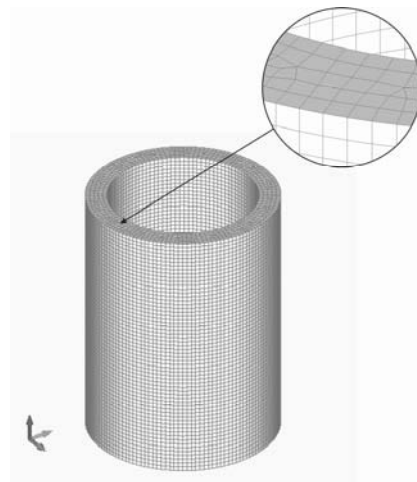


Рис. 2

го тела, то при расчете с помощью FEMAP можно моделировать оболочку консольно зашлепленной по одному из контуров:  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ . Так как оболочка является толстостенной с отношением толщины оболочки к радиусу ее срединной поверхности  $d / R = 1 / 4$ , то разбивку рационально проводить кубическими solid-элементами размером 2 мм (рис. 2).

Для созданной конечноэлементной модели производился анализ частот и форм свободных колебаний с помощью решателя Nastran.

### §3. Результаты численных расчетов.

Частоты свободных колебаний для толстостенной цилиндрической оболочки кругового поперечного сечения из стали (модуль Юнга  $E = 212$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>), рассчитанные численно с помощью программы FEMAP, а также полученные экспериментально [12], приведены в табл. 1 и в виде гистограммы собственных частот (рис. 3).

Таблица 1

$m$	$n$	$f_{\text{эксп.}} \text{ Гц [9]}$	$f_{\text{чис.}} \text{ Гц}$	$\varepsilon, \%$
1	12	40150	41647	3,7
2	8	21440	22577	5,3
3	12	45450	47294	4,1
4	12	50620	52712	4,1
5	12	57430	59615	3,8
2	0	21080	22779	8,1
4	0	25550	25986	1,7
5	0	32000	34519	7,9
7	0	51490	54773	6,4

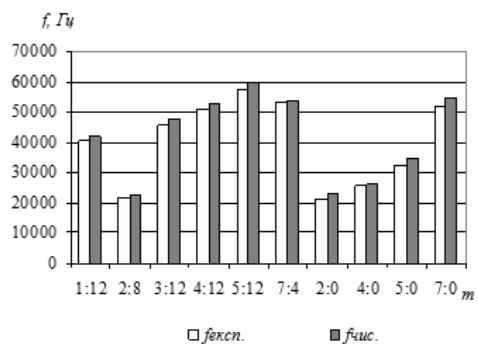
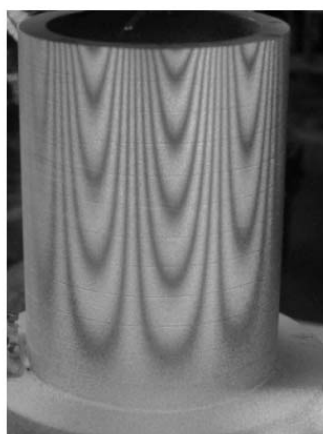
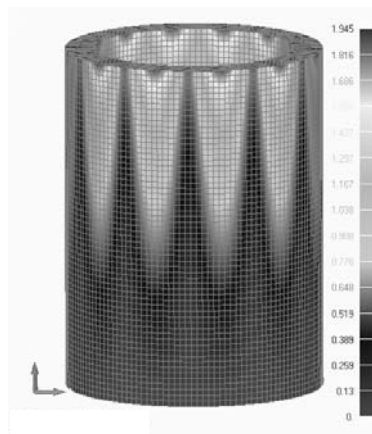


Рис. 3

Форма колебаний  $m = 1, n = 12$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 4.



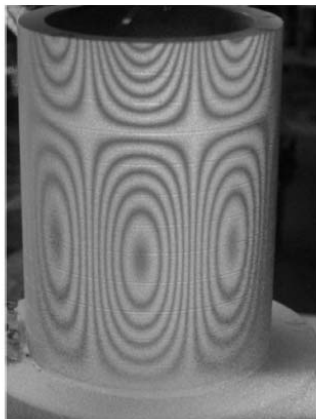
$f = 40150$  Гц



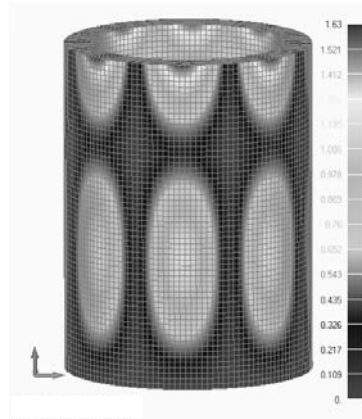
$f = 41647$  Гц

Рис. 4

Форма колебаний  $m = 2, n = 8$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 5.



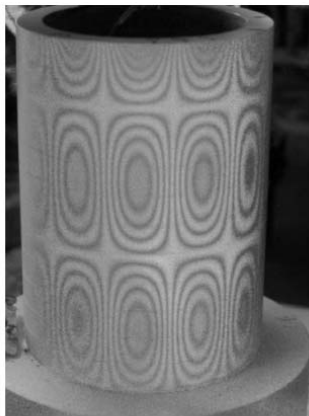
$f = 21440$  Гц



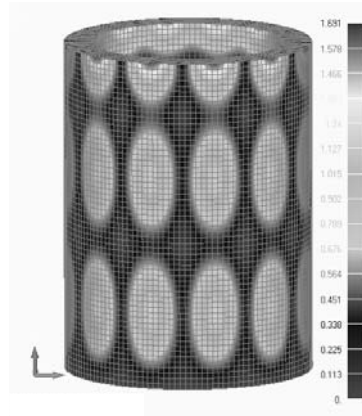
$f = 22577$  Гц

Рис. 5

Форма колебаний  $m = 3$ ,  $n = 12$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 6.



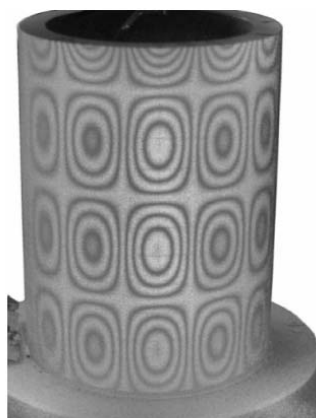
$f = 45450$  Гц



$f = 47294$  Гц

Рис. 6

Форма колебаний  $m = 4$ ,  $n = 12$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 7.



$f = 50620$  Гц



$f = 52712$  Гц

Рис. 7

Форма колебаний  $m = 5$ ,  $n = 12$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 8.



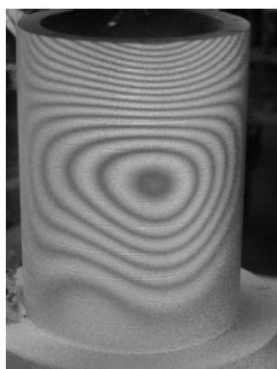
$f = 57430$  Гц



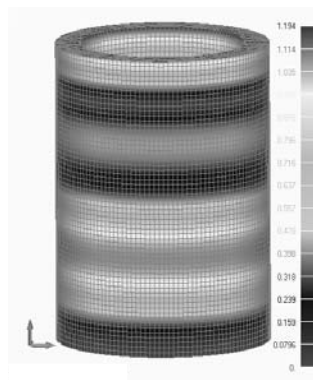
$f = 59615$  Гц

Рис. 8

Форма колебаний  $m = 2$ ,  $n = 0$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 9.



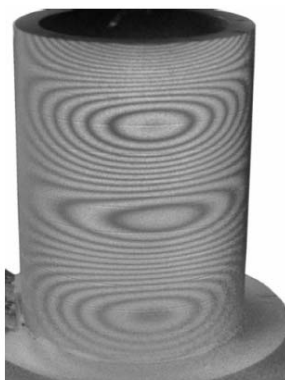
$f = 21080$  Гц



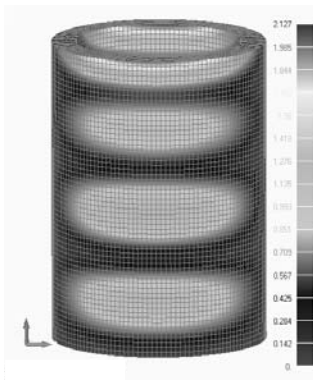
$f = 22779$  Гц

Рис. 9

Форма колебаний  $m = 4$ ,  $n = 0$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 10.



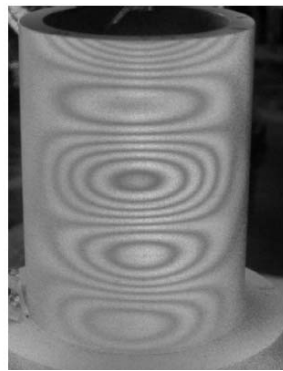
$f = 25550$  Гц



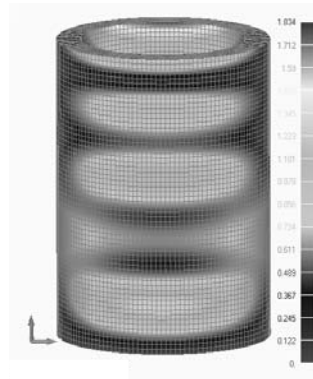
$f = 25986$  Гц

Рис. 10

Форма колебаний  $m = 5$ ,  $n = 0$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 11.



$f = 32000$  Гц



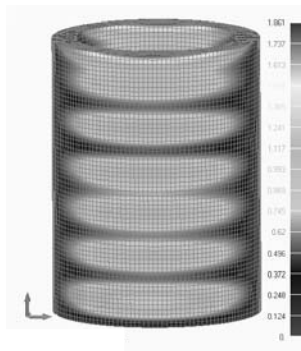
$f = 34519$  Гц

Рис. 11

Форма колебаний  $m = 7$ ,  $n = 0$ , полученная экспериментально (слева) [12] и численно (справа), представлена на рис. 12.



$f = 51490$  Гц



$f = 54773$  Гц

Рис. 12

Также проведен расчет на собственные частоты толстостенной оболочки выбранной геометрии при других физико-механических параметрах. В качестве материалов, кроме стали, выбраны: алюминий ( $E = 71$  ГПа,  $\nu = 0,34$ ,  $\rho = 2710$  кг/м<sup>3</sup>), медь ( $E = 110$  ГПа,  $\nu = 0,35$ ,  $\rho = 8920$  кг/м<sup>3</sup>), полиэтилен ( $E = 2,56$  ГПа,  $\nu = 0,32$ ,  $\rho = 936$  кг/м<sup>3</sup>) и резина ( $E = 0,003$  ГПа,  $\nu = 0,49$ ,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>). Полученные частоты приведены в сравнительной табл. 2 и в виде частотных кривых (рис. 13).

Таблица 2

$M$	$n$	$f_{\text{сталь}}, \text{Гц}$	$f_{\text{алюм.}}, \text{Гц}$	$f_{\text{медь}}, \text{Гц}$	$f_{\text{полиэт.}}, \text{Гц}$	$f_{\text{резина}}, \text{Гц}$
1	4	4616,49	4549,79	3130,55	1468,07	37,48
1	6	11275,46	11122,38	7656,98	3587,07	91,76
1	8	20136,58	19851,28	13659,98	6404,88	162,84
1	10	30403,43	29942,67	20589,18	9664,13	243,80
1	12	41662,57	40985,84	28160,46	13233,36	331,17
1	14	53516,70	52590,58	36106,09	16986,53	421,94
2	4	9282,95	9120,95	6262,83	2946,05	73,90
2	6	14224,49	14017,19	9644,91	4522,99	115,88
2	8	22577,12	22253,18	15313,98	7180,02	184,10
2	10	32565,76	32081,85	22069,49	10353,10	264,38
2	12	43609,10	42927,69	29514,34	13856,81	351,90
2	14	55322,21	54380,57	37367,02	17558,67	443,35

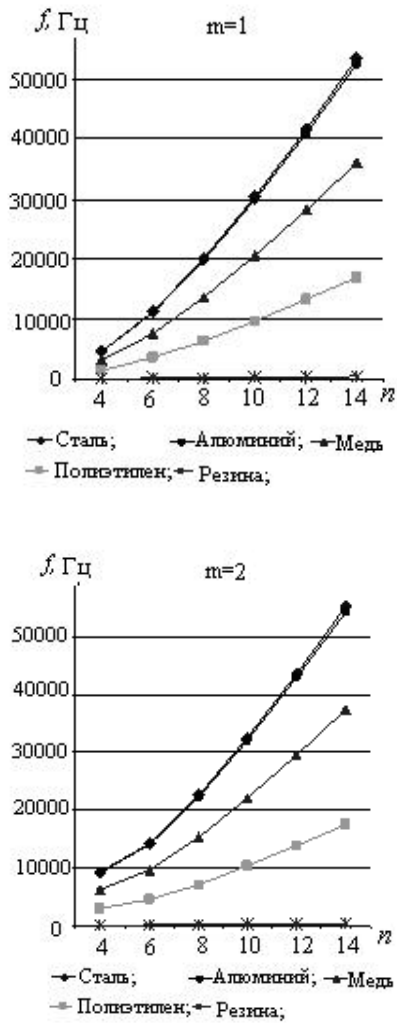


Рис. 13

Для представления зависимости собственной частоты от физико-механических свойств материала введем частотный коэффициент [1], который будет показывать отношение частоты оболочки эталонного материала (стали) к частоте оболочки любого другого изотропного материала  $\mu_{и.м.} = f_{ст.} / f_{и.м.}$ . Частотные коэффициенты для четырёх рассмотренных изотропных материалов приведены в табл. 3.

Таблица 3

$m$	$n$	$\mu_{алом.}$	$\mu_{медь.}$	$\mu_{полит.}$	$\mu_{резина}$
1	4	1,01	1,47	3,14	123,17
1	6	1,01	1,47	3,14	122,88
1	8	1,01	1,47	3,14	123,66
1	10	1,02	1,48	3,15	124,71
1	12	1,02	1,48	3,15	125,80
1	14	1,02	1,48	3,15	126,83
2	4	1,02	1,48	3,15	125,62
2	6	1,01	1,47	3,14	122,75
2	8	1,01	1,47	3,14	122,64
2	10	1,02	1,48	3,15	123,18
2	12	1,02	1,48	3,15	123,92
2	14	1,02	1,48	3,15	124,78



Первые шесть форм свободных колебаний при  $m=1$  толстостенной стальной оболочки представлены на рис. 14; для визуализации перемещения точек оболочки показаны в пятикратном увеличении.

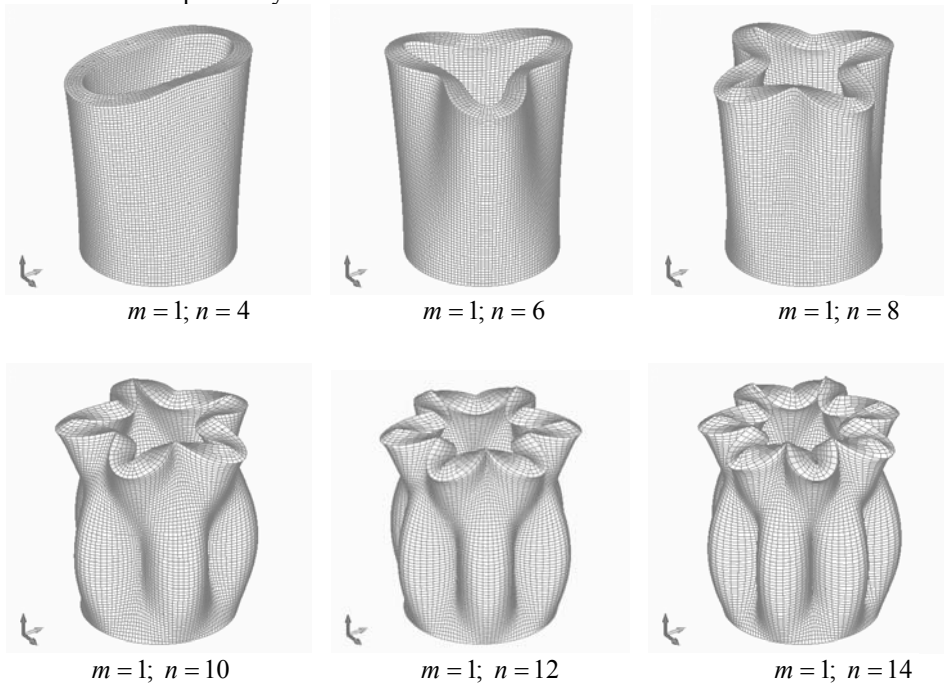


Рис. 14

Первые шесть форм свободных колебаний при  $m=2$  толстостенной стальной оболочки представлены на рис. 15; для визуализации перемещения точек оболочки показаны в пятикратном увеличении.

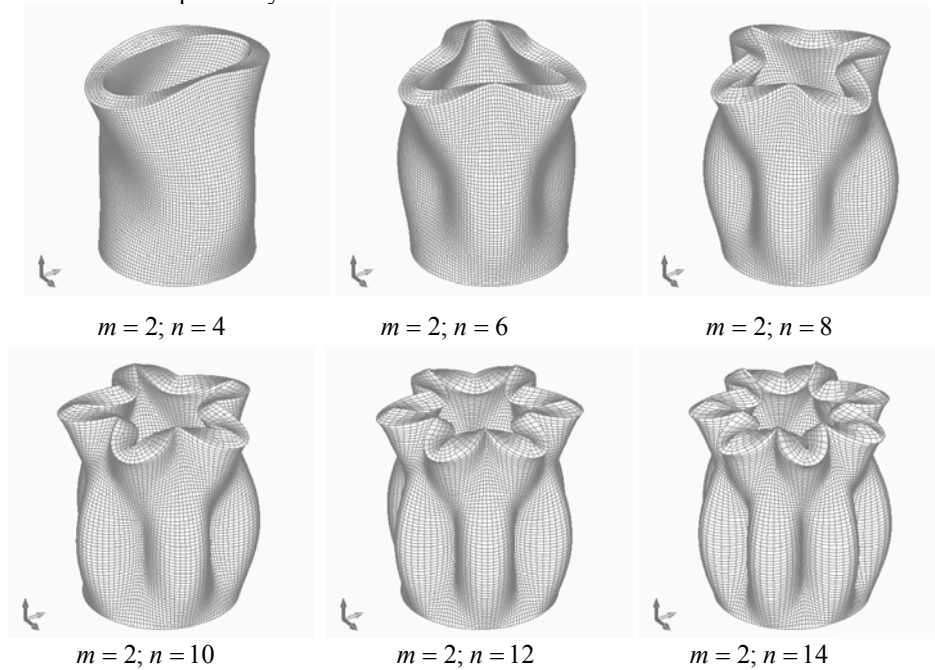


Рис. 15

### Заклученне.

Проведен расчёт частот и форм свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки методом конечных элементов, реализованным с помощью программного комплекса FEMAP.

Полученные численно частоты и формы свободных колебаний рассмотренной толстостенной оболочки в сравнении с результатами проведенных ранее экспериментальных исследований [12] дают возможность сделать ряд выводов:

наблюдается малое отклонение между экспериментально определенными частотами и частотами, рассчитанными численно, которое не превышает 8,5%, что свидетельствует о справедливости применения обоих методов;

реализованный численный расчёт показал лучшую сходимость результатов с экспериментальными результатами по сравнению с предложенным численным расчётом в [12], что свидетельствует о большей эффективности выбранного численного подхода;

порядок появления форм колебаний при численных расчётах и экспериментальном исследовании – одинаковый.

Введены частотные коэффициенты, которые показывают зависимость собственной частоты от физико-механических параметров материала. Отметим, что аналогичные коэффициенты были получены в [4] для тонкостенной цилиндрической оболочки некругового поперечного сечения постоянной толщины из алюминия и меди, что также является подтверждением правильности численных расчётов.

Обобщая результаты данного исследования можно сделать вывод о справедливости применения рассмотренных двух методик к решению не только двумерной, но и трехмерной задачи динамики.

**РЕЗЮМЕ.** Чисельно визначено динамічні характеристики товстостінної циліндричної оболонки на основі методу скінченних елементів, який реалізовано за допомогою ліцензованого програмного комплексу FEMAP. Проведено порівняльний аналіз отриманих частот і форм вільних коливань з частотами і формами, які отримано раніше експериментальним методом стробоголографічної інтерферометрії. Отримано частотні коефіцієнти, які показують залежність власної частоти від фізико-механічних параметрів матеріалу.

1. Буда́к В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка, серія: «Математика. Механіка». – 2014. – 32, № 2. – С. 32 – 37.
2. Буда́к В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вплив ексцентриситету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка, серія: «Фізико-математичні науки». – 2015. – 2. – С. 23 – 28.
3. Буда́к В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Про вільні коливання циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу при різних граничних умовах // Вісник Запорізького нац. ун-ту, серія: «Фізико-математичні науки». – 2015. – № 2. – С. 20 – 28.
4. Буда́к В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Пригода О.П., Бойчук О.В. Визначення власних частот тонкостінної оболонки некругового поперечного перерізу методом стробоголографічної інтерферометрії // Проблеми вычислительной механики и прочности конструкций. – 2015. – № 24. – С. 18 – 25.
5. Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Применение метода сплайн-аппроксимации для решения задач об осесимметричных свободных колебаниях толстостенных ортотропных цилиндров // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 10. – С. 74 – 85.
6. Arnold R.N., Warburton G.B. The flexural vibration of thin cylinders // Proc. Inst.Mech.Engrs. – 1953. – 167 A, N 1. – P. 62 – 80.
7. Baron M.L., Bleich H.H. Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1954. – 21, N 2. – P. 178 – 188.
8. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method // J. of Mathematical Sci. – 2016. – 212, N 2. – P. 182 – 192.

9. Budak V.D., Grigorenko A.Ya., Khorishko V.V., Borisenko M.Yu. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 1. – P. 68–74.
10. Greenspon J.F. Vibration of thick cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1959. – **31**, N 12. – P. 1682–1683.
11. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 2. – P. 169–175.
12. Grigorenko A., Zolotoi Yu., Prigoda A., Zhuk I., Khorishko V., Ovcharenko A. Experimental investigation of natural vibrations of a thick-walled cylindrical shell by the method of holographic interferometry // *J. of Mathematical Sci.* – 2013. – **194**, N 3. – P. 239–244.
13. Leissa A.W. *Vibration of Shells* // NASA SP-288: US Government Printing Office, Washington DC, 1973. – 438 p.
14. Markus S. *The mechanics of vibrations of cylindrical shells.* – Amsterdam: Elsevier, 1988. – 159 p.
15. Mazch T. [et al.] Natural modes and frequencies of a thin clamped–free steel cylindrical storage tank partially filled with water: FEM and measurement // *J. Sound Vib.* – 1996. – **193**, N 3. – P. 669–690.
16. Pellicano F. Linear and Nonlinear vibration of shells // *Proc. 2nd Int. Conference on Nonlinear Normal Modes and Localization in Vibration Systems*, Samos, June 19–23, 2006. – P. 1–12.
17. Stricklin J.A. [et al.] Nonlinear Dynamic Analysis of Shells of Revolution by Matrix Displacement Method // *AIAA J.* – 1971. – **9**, N 4. – P. 629–636.
18. Yu Y.Y. Free vibration of thin cylindrical shells having finite length with freely supported and clamped edges // *J. Appl. Mech.* – 1955. – **22**, N 4. – P. 547–552.

Поступила 27.07.2016

Утверждена в печать 10.10.2017

