

М. В. Марчук, Р. И. Тучапский

ДИНАМИКА УПРУГИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ  
НЕТОНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

*Институт прикладных проблем механики и математики  
им. Я. С. Подстригача НАН Украины;  
ул. Науковая, 3-б, 79060, Львов, Украина; e-mail: roman.tuch@gmail.com*

**Abstract.** A theory of dynamical elastic geometrically nonlinear deformation is constructed for the non-thin asymmetrical relative to the base surface anisotropic shells with variable thickness. The method of expansion of functions in series on Legendre polynomials by the normal coordinate is used. The basic relations are written in the coordinate system on the base surface in curvature lines. The motion equations and corresponding boundary conditions are obtained by using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle. A changing the metric across the thickness is taken into account. The constructed theory admits the regular refinement process that can to get the equations containing the summands with the products of arbitrary order of the terms of series by Legendre polynomials in the normal coordinate for the unknown functions. An effect of the pressure impulse distributed over a facial surface of the square metallic plate on this plate is studied on the basis of developed theory.

**Key words:** refined theory of shells, dynamic elastic deformation, non-thin shell, variable thickness, Hamilton – Ostrogradsky variational principle, Legendre polynomial.

**Введение.**

Внедрение новых элементов конструкций, способных работать в закритической области при упругих деформациях, повышает интерес к геометрически нелинейной теории упругости. Важным звеном в этом направлении является адекватное моделирование конечных упругих деформаций пластин и оболочек.

Детальный обзор работ, связанных с этой темой, выходит за рамки данного исследования. Отметим лишь работы, в которых построены геометрически или геометрически и физически нелинейные теории пластин и (или) оболочек на основе методов разложения функций в ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты [3 – 6, 8, 9, 11 – 15]. Эти теории свободны от недостатков, связанных с применением упрощающих гипотез, таких как в классических теориях или в некоторых уточненных теориях (например, в теориях с учетом гипотез Тимошенко). Это позволяет использовать их для исследования: нетонких оболочек; оболочек с быстро изменяющимися по пространственным координатам параметрами; волновых процессов, протекающих в оболочках; явления удара по поверхности оболочки и т. д. Целесообразность использования полиномов Лежандра обусловлена тем, что указанные полиномы являются ортогональными, и как следствие, уравнения теорий, построенных в [3 – 6, 8, 9, 11 – 15], проще, чем, например, уравнения теорий, основанных на построении разложений функций по возрастающим степеням нормальной координаты и т. д.

В [4] теория оболочек построена методом гипотез. Теория пластин в [6], теории оболочек в [3, 5, 8, 9, 13 – 15] и теории пластин и оболочек в [11, 12] построены на основе аналитических методов. Эта группа методов включает процедуры сведения трехмерных задач к двумерным с некоторым регулярным процессом генерирования последовательности приближений решения трехмерной задачи. Это проекционные методы [3, 5, 13, 14], формальные методы с применением вариационных принципов и (или) трехмерных уравнений теории упругости [8, 9, 11, 12, 15], энергоасимптотический метод [6] и др.

Большой интерес, в частности в методическом аспекте, представляют работы [8, 9]. В [9] получены геометрически нелинейные уравнения тонких пологих анизотропных оболочек постоянной толщины. В [8] выведены некоторые соотношения геометрически нелинейной теории нетонких анизотропных оболочек переменной толщины. В обоих случаях в уравнениях были сохранены слагаемые с произведениями членов рядов по полиномам Лежандра от нормальной координаты для неизвестных функций порядка не выше второго.

Ниже изложен достаточно общий формальный метод построения геометрически нелинейных теорий нетонких упругих анизотропных оболочек переменной толщины, развивающий идеи работ [5, 8, 9]. Этот метод основан на использовании вариационного принципа теории упругости и полиномов Лежандра и позволяет применять для приближенного представления пространственных геометрических параметров полиномы от толщины переменной произвольной степени. В отличие от методов работ [8, 9], он позволяет получать уравнения, содержащие слагаемые с произведениями членов рядов по полиномам Лежандра от нормальной координаты для неизвестных функций произвольных порядков. Это позволяет оценить область применимости теорий, построенных в [8, 9].

### §1. Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского.

Согласно вариационному принципу Гамильтона – Остроградского [7, 9] в процессе движения тела на отрезке времени между моментами  $t_0$  и  $t_1$  среди кинематически допустимых смещений, заданных в начальный  $t = t_0$  и конечный  $t = t_1$  моменты времени, истинными будут те смещения, для которых и только для которых интеграл действия по Гамильтону

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (W - A_1^* - A_2^* - T) dt \quad (1.1)$$

принимает стационарное значение, т.е.

$$\delta I = 0. \quad (1.2)$$

В выражении (1.1)  $W$  – потенциальная энергия деформации;  $A_1^*$  – работа массовых сил;  $A_2^*$  – работа внешних поверхностных нагрузок;  $T$  – кинетическая энергия.

Приведенные выше формулы относятся к произвольной сплошной среде. Перейдем далее к рассмотрению оболочек.

Предположим, что в момент времени  $t = t_0$  оболочка недеформированная и имеет достаточно гладкую поверхность приведения  $S$  и граничный срез  $\Sigma$ , образующие которого направлены по нормали к  $S$ .

Условимся, что греческие индексы будут принимать значения 1, 2, а латинские индексы – значения 1, 2, 3, если специально не будет указано или не будет следовать из контекста другое. Условимся также, что если в каком-нибудь соотношении будет содержаться один или несколько свободных индексов, то это будет означать, что данное соотношение справедливо для любых допустимых значений этих свободных индексов.

Отнесем недеформированную оболочку к системе нормальных координат  $x_i$ , где  $x_\alpha$  – гауссовы параметры поверхности  $S$ , а  $x_3$  направлена по нормали к  $S$  с единичным вектором  $\mathbf{n}$ , который определяется из соотношения  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ , где  $\mathbf{e}_\alpha$  – ординатные орты на поверхности  $S$ .

Компоненты векторов и тензоров будем определять в базисе  $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{n}$ .

Симметричность недеформированной оболочки относительно поверхности  $S$  не предполагается. Лицевые поверхности недеформированной оболочки обозначим через  $S^-$  и  $S^+$  и зададим уравнениями  $x_3 = -h^-$  и  $x_3 = h^+$ , соответственно. В дальней-

шем предполагаем, что  $h^-$  и  $h^+$  представляют гладкие неотрицательные функции координат  $x_\alpha$ .

Функционалы  $W$ ,  $A_1^*$ ,  $A_2^*$  и  $T$  запишем в виде

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \iint_S \int_{-h^-}^{h^+} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} e_{ij} \mathcal{G} dx_3 dS; & A_1^* &= \iint_S \int_{-h^-}^{h^+} \sum_{i=1}^3 F_i u_i \mathcal{G} dx_3 dS; \\
A_2^* &= \iint_{\Sigma_s} \sum_{i=1}^3 s_i^* u_i d\Sigma + \iint_{S^-} \sum_{i=1}^3 s_i^- u_i dS^- + \iint_{S^+} \sum_{i=1}^3 s_i^+ u_i dS^+; & (1.3) \\
T &= \frac{1}{2} \iint_S \int_{-h^-}^{h^+} \rho \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 \mathcal{G} dx_3 dS,
\end{aligned}$$

где  $u_i$  – компоненты вектора смещений;  $e_{ij}$  – компоненты тензора деформации Грина – Лагранжа [2, 10];  $\sigma_{ij}$  – компоненты симметричного тензора напряжений Пиала – Кирхгофа [10];  $F_i$  – компоненты вектора массовых сил, отнесенных к единице недеформированного объема;  $s_i^*$  – внешние поверхностные нагрузки, отнесенные к единице площади на поверхности  $\Sigma$  и заданные на её части  $\Sigma_s$ ;  $s_i^-$ ,  $s_i^+$  – внешние поверхностные нагрузки, отнесенные к единицам площадей на  $S^-$ ,  $S^+$ , соответственно;  $\rho$  – плотность материала в недеформированной конфигурации;  $\mathcal{G}$  – детерминант тензора оболочки

$$\mathcal{G} = 1 - 2Hx_3 + Kx_3^2. \quad (1.4)$$

Здесь  $H$  и  $K$  обозначают, соответственно, среднюю и главную (гауссову) кривизны поверхности  $S$ :

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2); \quad K = k_1 k_2,$$

где  $k_\alpha$  – главные кривизны поверхности  $S$ .

В вариационном принципе (1.2) кинематические и физические соотношения и геометрические граничные условия считаются выполненными заранее. Они будут рассмотрены ниже. В функционале (1.1) к независимому варьированию допускаются смещения  $u_i$ . Представим, что  $\delta F_i = 0$ ,  $\delta s_i^* = 0$ ,  $\delta s_i^\pm = 0$ .

## §2. Геометрия оболочки.

Приведем некоторые сведения из геометрии оболочки, которые будут использованы ниже. Пусть на поверхности  $S$  координатными линиями  $x_\alpha$  являются линии кривизны.

Тогда пространственные параметры Ламе имеют вид  $H_\alpha = (1 - k_\alpha x_3) A_\alpha$ ,  $H_3 = 1$ , где  $A_\alpha$  – параметры Ламе поверхности  $S$ .

Рассматривая нетонкие в недеформированной конфигурации оболочки, будем принимать предположения

$$\left| k_\alpha h^\pm \right| \ll 1; \quad \left| k_\alpha^{l-m} k_\beta^m (h^\pm)^l \right| \ll 1, \quad l > \tilde{N}, \quad 0 < m < l; \quad \left| (k_\alpha h^\pm)^l \right| \ll 1, \quad l > \tilde{N}, \quad (2.1)$$

где  $\tilde{N}$  – некоторое фиксированное положительное целое число.

Иными словами, слагаемые, содержащие множителями  $k_\alpha^{l-m} k_\beta^m x_3^l$ ,  $l > \tilde{N}$ ,  $0 < m < l$ ;  $(k_\alpha x_3)^l$ ,  $l > \tilde{N}$ , часто будем отбрасывать.

Рассматривая тонкие или пологие в недеформированной конфигурации оболочки, будем принимать  $|k_\alpha h^\pm| \ll 1$ .

Введем обозначения:  $\nu_\alpha \equiv A_\alpha / H_\alpha = 1 / (1 - k_\alpha x_3)$ ,  $\nu_3 \equiv 1 / H_3 = 1$ .

Неравенства (2.1) означают, что можно положить приближенно

$$\nu_\alpha = 1 + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} (k_\alpha x_3)^l; \quad \nu_\alpha \nu_\beta = 1 + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \left( k_\alpha^l + \sum_{m=1}^{l-1} k_\alpha^{l-m} k_\beta^m + k_\beta^l \right) x_3^l.$$

Воспользовавшись этими формулами, выведем приближенные формулы

$$\nu_\alpha^0 = \nu_\alpha + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \nu_\alpha \zeta^l; \quad \nu_\alpha \nu_\beta^0 = \nu_{\alpha\beta} + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \nu_{\alpha\beta} \zeta^l, \quad (2.2)$$

где

$$\zeta = \frac{x_3 - \hat{h}}{h}; \quad \nu_\alpha^0 = 1 + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \left( k_\alpha \hat{h} \right)^m;$$

$$\nu_\alpha^l = h^l \left( k_\alpha^l + \sum_{m=l+1}^{\tilde{N}} \frac{m!}{l!(m-l)!} k_\alpha^m \hat{h}^{m-l} \right), \quad l = 1, 2, \dots, \tilde{N}-1; \quad \nu_\alpha^{\tilde{N}} = (k_\alpha h)^{\tilde{N}};$$

$$\nu_{\alpha\beta}^0 = 1 + \sum_{m=1}^{\tilde{N}} \left( k_\alpha^m + \sum_{n=1}^{m-1} k_\alpha^{m-n} k_\beta^n + k_\beta^m \right) \hat{h}^m;$$

$$\nu_{\alpha\beta}^l = h^l \left[ k_\alpha^l + \sum_{n=1}^{l-1} k_\alpha^{l-n} k_\beta^n + k_\beta^l + \sum_{m=l+1}^{\tilde{N}} \frac{m!}{l!(m-l)!} \left( k_\alpha^m + \sum_{n=1}^{m-1} k_\alpha^{m-n} k_\beta^n + k_\beta^m \right) \hat{h}^{m-l} \right],$$

$$l = 1, 2, \dots, \tilde{N}-1; \quad \nu_{\alpha\beta}^{\tilde{N}} = h^{\tilde{N}} \left( k_\alpha^{\tilde{N}} + \sum_{n=1}^{\tilde{N}-1} k_\alpha^{\tilde{N}-n} k_\beta^n + k_\beta^{\tilde{N}} \right).$$

Здесь  $2h = h^- + h^+$ ,  $2\hat{h} = h^+ - h^-$ . Введем формулы

$$\begin{aligned} \nu_3^0 &= \nu_3 + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \nu_3 \zeta^l; \quad \nu_\alpha \nu_3^0 = \nu_{\alpha 3} + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \nu_{\alpha 3} \zeta^l; \\ \nu_3 \nu_\alpha^0 &= \nu_{3\alpha} + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \nu_{3\alpha} \zeta^l; \quad \nu_3 \nu_\beta^0 = \nu_{3\beta} + \sum_{l=1}^{\tilde{N}} \nu_{3\beta} \zeta^l \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\left( \nu_3^0 = \nu_{33} = 1; \quad \nu_3^l = \nu_{33} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, \tilde{N}; \quad \nu_{\alpha 3}^l = \nu_{3\alpha}^l = \nu_\alpha, \quad l = 0, 1, \dots, \tilde{N} \right);$$

$\mathcal{S}$  – определяется по точной формуле (1.4) при  $\tilde{N} \geq 2$ .

Приняв во внимание неравенства (2.1), при  $\tilde{N} = 1$  получим приближенное выражение  $\mathcal{S} = 1 - 2Hx_3$ .

Определим площадь элемента граничной поверхности  $\Sigma$ .

Линию пересечения поверхностей  $S$  и  $\Sigma$  обозначим через  $\Gamma$ . Пересечение поверхности  $\Sigma$  с эквидистантной поверхностью  $x_3 = \text{const}$  обозначим через  $\Gamma_{x_3}$ . Квадрат элемента длины дуги линии  $\Gamma_{x_3}$  имеет вид [9, 13, 14]

$$d\Gamma_{x_3}^2 = (1 - 2a_1x_3 + a_2x_3^2)d\Gamma^2, \quad (2.4)$$

где  $\alpha$  – угол между координатной линией  $x_1$  и контуром  $\Gamma$ ,

$$a_1 = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha; \quad a_2 = k_1^2 \cos^2 \alpha + k_2^2 \sin^2 \alpha; \quad d\Gamma^2 = A_1^2 dx_1^2 + A_2^2 dx_2^2.$$

Приняв во внимание неравенства (2.1), из равенства (2.4) получим приближенное выражение

$$d\Gamma_{x_3} = \left( 1 - \sum_{l=1}^{\tilde{N}} k_{(l)} x_3^l \right) d\Gamma \quad (2.5)$$

$$\left( k_{(l)} = - \sum_{m=\frac{l+1}{2}}^{l-1} \prod_{n=0}^{m-1} (2n-1) \frac{2^{m-l} a_1^{2m-l} (-a_2)^{l-m}}{(l-m)!(2m-l)!} - \prod_{n=0}^{l-1} (2n-1) \frac{1}{l!} a_1^l, \quad l=1, 3, \dots, l \leq \tilde{N}; \right.$$

$$k_{(l)} = - \prod_{n=0}^{\frac{l}{2}-1} (2n-1) \frac{1}{\left(\frac{l}{2}\right)!} 2^{-\frac{l}{2}} (-a_2)^{\frac{l}{2}} - \sum_{m=\frac{l}{2}+1}^{l-1} \prod_{n=0}^{m-1} (2n-1) \frac{2^{m-l} a_1^{2m-l} (-a_2)^{l-m}}{(l-m)!(2m-l)!} - \\ \left. - \prod_{n=0}^{l-1} (2n-1) \frac{1}{l!} a_1^l, \quad l=2, 4, \dots, l \leq \tilde{N} \right).$$

Воспользовавшись формулой (2.5), легко выведем также приближенное выражение

$$d\Sigma = d\Gamma_{x_3} dx_3 = \left( 1 - \sum_{l=1}^{\tilde{N}} k_{(l)} x_3^l \right) d\Gamma dx_3. \quad (2.6)$$

Если в недеформированной конфигурации оболочка тонкая или пологая, то следует положить:

$$\overset{0}{v}_i = \overset{0}{v}_{ij} = 1; \quad \overset{l}{v}_i = \overset{l}{v}_{ij} = 0, \quad k_{(l)} = 0, \quad l=1, 2, \dots, \tilde{N}; \quad \vartheta = 1. \quad (2.7)$$

Площади элементов поверхностей  $S^\pm$  равны:

$$dS^\pm = \mu^\pm dS \quad (2.8)$$

$$\left( \mu^\pm = \sqrt{\left( \mu_1^\pm \mu_2^\pm \right)^2 - \left( \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial h^\pm}{\partial x_1} \frac{\partial h^\pm}{\partial x_2} \right)^2} \right), \quad (2.9)$$

где

$$\mu_\alpha^\pm = \sqrt{\left( 1 \mp h^\pm k_\alpha \right)^2 + \left( \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial h^\pm}{\partial x_\alpha} \right)^2} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.10)$$

Если в недеформированной конфигурации оболочка тонкая или пологая, то в формулах (2.8) – (2.10) следует положить  $k_\alpha = 0$ .

### §3. Нелинейная деформация оболочки.

Компоненты тензора деформации можно записать в виде

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( v_i \varepsilon_{ij} + v_j \varepsilon_{ji} + v_i v_j \sum_{n=1}^3 \varepsilon_{in} \varepsilon_{jn} \right), \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_2 - k_1 A_1 u_3 \right), \quad 1 \Leftrightarrow 2; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_1 \right), \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + k_1 A_1 u_1 \right), \quad 1 \Leftrightarrow 2; \quad \varepsilon_{3i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_3}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Выражение  $1 \Leftrightarrow 2$  означает, что формуле, после которой оно следует, соответствуют две формулы: вторую получаем из первой круговой заменой индексов 1 и 2.

Разложим величины  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  и  $e_{ij}$  относительно скалярной координаты  $x_3$  в ряды по полиномам Лежандра  $P_k(\zeta)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  [1, 8, 9]. Коэффициенты этих разложений будем называть моментами соответствующих величин; номер коэффициента будем называть порядком соответствующего момента [1, 5]. Обозначим моменты функций  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$  и  $e_{ij}$  порядка  $k$  через  $u_i^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(k)}$  и  $e_{ij}^{(k)}$ , соответственно.

Пусть  $N$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число и

$$u_i^{(k)} = 0 \quad \text{при } k > N. \quad (3.3)$$

Тогда имеем

$$u_i = \sum_{k=0}^N u_i^{(k)} P_k(\zeta). \quad (3.4)$$

Подставив в формулы (3.2) эти выражения, получим

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k=0}^N \varepsilon_{ij}^{(k)} P_k(\zeta), \quad (3.5)$$

где принято

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^{(k)} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_2^{(k)} - k_1 A_1 u_3^{(k)} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} u_1''^{(k)} - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_1} u_1'^{(k)} \right), \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\ \varepsilon_{12}^{(k)} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u_1^{(k)} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} u_2''^{(k)} - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_1} u_2'^{(k)} \right), \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\ \varepsilon_{13}^{(k)} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial x_1} + k_1 A_1 u_1^{(k)} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x_1} u_3''^{(k)} - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_1} u_3'^{(k)} \right), \quad 1 \Leftrightarrow 2;\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\varepsilon_{3i}^{(k)} = \frac{1}{h} u_i'^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, N;$$

$$\left[ u_i'^{(k)} = (2k+1) \left( u_i^{(k+1)} + u_i^{(k+3)} + \dots \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad u_i'^{(N)} = 0; \right.$$

$$\left. u_i''^{(k)} = k u_i^{(k)} + (2k+1) \left( u_i^{(k+2)} + u_i^{(k+4)} + \dots \right), \quad k = 0, 1, \dots, N \right].$$

Из формул (3.2) и (3.3) следует, что

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = 0, \quad \text{если } k > N; \quad \varepsilon_{3i}^{(N)} = 0. \quad (3.7)$$

Подставим выражения (2.2), (2.3) и (3.5) в формулы (3.1) и опустим в полученных выражениях нелинейные члены, содержащие моменты функции  $\varepsilon_{ij}$  порядка, большего за некоторое фиксированное целое число  $-1 \leq N_{ij}^* \leq N$ . Тогда будем иметь

$$e_{ij} = \sum_{k=0}^{\hat{N}_{ij}} e_{ij}^{(k)} P_k(\zeta), \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{N}_{ij} &= \max(N, N_{in}^* + N_{jn}^*) + \tilde{N}; \\ 2e_{ij}^{(k)} &= \nu_i \varepsilon_{ij}^{(k)} + \nu_j \varepsilon_{ji}^{(k)} + \sum_{\substack{p=|1-k|, |1-k|+2, \\ p \leq \min(1+k, N)}} a_1^{(1,p)} \left( \nu_i \varepsilon_{ij}^{(p)} + \nu_j \varepsilon_{ji}^{(p)} \right) + \\ &+ \sum_{\substack{m=2 \\ 0 \leq p \leq N}}^{\tilde{N}} \sum_{p=|1-k|-m+1, |1-k|-m+3, \dots} f^{(k,m,p)} \left( \nu_i \varepsilon_{ij}^{(p)} + \nu_j \varepsilon_{ji}^{(p)} \right) + \\ &+ \nu_{ij} \sum_{n=1}^3 \sum_{p=0}^{N_{in}^*} \sum_{\substack{q=|p-k|, |p-k|+2, \dots, \\ q \leq \min(p+k, N_{jn}^*)}} a_1^{(p,q)} \varepsilon_{in}^{(p)} \varepsilon_{jn}^{(q)} + \\ &+ \nu_{ij} \sum_{n=1}^3 \sum_{\substack{p=0 \\ 0 \leq q \leq N_{jn}^*}}^{N_{in}^*} \sum_{\substack{q=|1-k|-p, |1-k|-p+2, \dots, \\ r=\max\left(0, \frac{1}{2}(p+q-1-k)\right)}}^{\min\left(p, q, \frac{1}{2}(p+q-|1-k|)\right)} a_r^{(p,q)} a_1^{(1,p+q-2r)} \varepsilon_{in}^{(p)} \varepsilon_{jn}^{(q)} + \\ &+ \sum_{m=2}^{\tilde{N}} \sum_{n=1}^m \sum_{\substack{p=0 \\ 0 \leq q \leq N_{jn}^*}}^3 \sum_{\substack{q=|1-k|-p-m+1, |1-k|-p-m+3, \dots, \\ r=0}}^{\min\left(p, q, \frac{1}{2}(p+q+m-1-|1-k|)\right)} a_r^{(p,q)} \times \\ &\times f^{(k,m,p+q-2r)} \varepsilon_{in}^{(p)} \varepsilon_{jn}^{(q)}, \quad k = 0, 1, \dots, \hat{N}_{ij}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При выводе соотношений (3.9) использованы формулы [8, 13, 14]

$$P_k(\zeta) P_l(\zeta) = \sum_{m=0}^{\min(k,l)} a_m^{(k,l)} P_{k+l-2m}(\zeta), \quad k, l = 0, 1, \dots,$$

где

$$a_m^{(k,l)} = \frac{2(k+l-2m)+1}{2(k+l-m)+1} \frac{r_{k-m} r_{l-m}}{r_{k+l-m}}; \quad r_m = \frac{(2m)!}{m! m! 2^m}, \quad k, l = 0, 1, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, \min(k, l),$$

и такие обозначения:

$$f^{(k,m,p)} = \sum_{r_1=\max\left(0, \frac{1}{2}(p-k)\right)}^{\min\left(1, p, \frac{1}{2}(p+1-|1-k|)\right)} a_{r_1}^{(1,p)} a_1^{(1,p+1-2r_1)} \frac{1}{2^{(p+2-2r_1-k)}}, \quad \text{если } m = 2;$$

$$\begin{aligned}
f^{(k,m,p)} &= \sum_{r_1=0}^{\min\left(1,p,\frac{1}{2}(p+m-1-|l-k|)\right)} a_{r_1}^{(1,p)} \times \dots \\
&\dots \times \sum_{r_l=0}^{\min\left(1,p+l-1-2\sum_{u=1}^{l-1} r_u, \frac{1}{2}\left(p+m-1-2\sum_{u=1}^{l-1} r_u-|l-k|\right)\right)} a_{r_l}^{(1,p+l-1-2\sum_{u=1}^{l-1} r_u)} \times \dots \\
&\dots \times \sum_{r_{m-1}=0}^{\min\left(1,p+m-2-2\sum_{u=1}^{m-2} r_u, \frac{1}{2}\left(p+m-1-2\sum_{u=1}^{m-2} r_u-|l-k|\right)\right)} a_{r_{m-1}}^{(1,p+m-2-2\sum_{u=1}^{m-2} r_u)} a_{\frac{1}{2}\left(p+m-1-2\sum_{u=1}^{m-1} r_u\right)}^{(1,p+m-1-2\sum_{u=1}^{m-1} r_u)}, \text{ если } m > 2, \\
&\dots \times \sum_{r_{m-1}=\max\left(0,\frac{1}{2}\left(p+m-2-2\sum_{u=1}^{m-2} r_u-k\right)\right)} a_{r_{m-1}}^{(1,p+m-2-2\sum_{u=1}^{m-2} r_u)} a_{\frac{1}{2}\left(p+m-2\sum_{u=1}^{m-1} r_u-k\right)}^{(1,p+m-2\sum_{u=1}^{m-1} r_u-k)}, \text{ если } m > 2,
\end{aligned}$$

где  $k$ ,  $m$  и  $p$  принимают те же значения, что и  $i_j$  в выражениях вида  $f^{(i_j)}$ , фигурирующих в соотношениях (3.9).

Из формул (2.2), (2.3), (3.1), (3.5) и (3.7) следует, что

$$e_{ij}^{(k)} = 0, \text{ если } k > \hat{N}_{ij}.$$

#### §4. Физические соотношения для оболочки.

Подставив в первую из формул (1.3) выражения (3.8), получим

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sum_{i,j=1}^3 \sum_{k=0}^{\hat{N}_{ij}} P_{ij}^{(k)} e_{ij}^{(k)} dS,$$

где

$$P_{ij}^{(k)} = \int_{-h^-}^{h^+} \sigma_{ij} P_k(\zeta) \mathcal{D}x_3, \quad k = 0, 1, \dots, \hat{N}_{ij}. \quad (4.1)$$

Далее предполагаем, что материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука для линейно-анизотропного тела [5, 7, 9]

$$\sigma_{ij} = \sum_{l,m=1}^3 c_{ijlm} e_{lm}, \quad (4.2)$$

где  $c_{ijlm}$  – компоненты тензора упругой жесткости материала. Предполагаем, что они могут быть переменными вдоль координаты  $x_3$ .

Подставив выражения (4.2) в формулы (4.1), и выполнив интегрирование по толщине оболочки с учетом выражений (3.8), получим следующие физические соотношения:

$$P_{ij}^{(k)} = h \sum_{l,m=1}^3 \sum_{q=0}^{\hat{N}_{lm}^{kq}} Q_{ijlm}^{kq} e_{lm}^{(q)}, \quad k = 0, 1, \dots, \hat{N}_{ij}, \quad (4.3)$$

где

$$Q_{ijlm}^{kq} = \int_{-1}^1 c_{ijlm} P_k(\zeta) P_q(\zeta) \mathcal{D}\zeta, \quad k = 0, 1, \dots, \hat{N}_{ij}, \quad q = 0, 1, \dots, \hat{N}_{lm}.$$



### §5. Вариация энергии деформации $\delta W$ .

Варьируя функционал  $W$  по независимым функциональным аргументам  $\delta u_i^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , с помощью формул (3.9) получим

$$\delta W = \iint_S \sum_{i,j=1}^3 \sum_{k=0}^{\hat{N}_{ij}} P_{ij}^{(k)} \delta e_{ij}^{(k)} dS = \iint_S \left( \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^N s_{\alpha i}^{(k)} \delta \varepsilon_{\alpha i}^{(k)} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^{N-1} s_{3i}^{(k)} \delta \varepsilon_{3i}^{(k)} \right) dS, \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} = & \nu_i P_{ij}^{(k)} + \sum_{\substack{s=|1-k|, |1-k|+2, \\ s \leq \min(1+k, \hat{N}_{ij})}} a_1^{(1,k)} \nu_i P_{ij}^{(s)} + \sum_{\substack{s=0, m=|1-s|-k+1, |1-s|-k+3, \dots, \\ 2 \leq m \leq \hat{N}_{ij}}} f^{(s,m,k)} \nu_i P_{ij}^{(s)} + \\ & + \sum_{n=1}^3 \sum_{s=0}^{\hat{N}_{in}} \sum_{\substack{q=|k-s|, |k-s|+2, \dots, \\ q \leq \min(k+s, N_{nj}^*)}} a_1^{(k,q)} \nu_{in} P_{in}^{(s)} \varepsilon_{nj}^{(q)} + \\ & + \sum_{n=1}^3 \sum_{s=0}^{\hat{N}_{in}} \sum_{\substack{q=|1-s|-k, |1-s|-k+2, \dots, \\ 0 \leq q \leq N_{nj}^*}} \sum_{r=\max(0, \frac{1}{2}(k+q-1-s))}^{\min(k, q, \frac{1}{2}(k+q-1-s))} a_r^{(k,q)} a_1^{(1,k+q-2r)} \nu_{in} P_{in}^{(s)} \varepsilon_{nj}^{(q)} + \\ & + \sum_{m=2}^{\hat{N}} \sum_{n=1}^3 \sum_{s=0}^{\hat{N}_{in}} \sum_{\substack{q=|1-s|-k-m+1, |1-s|-k-m+3, \dots, \\ 0 \leq q \leq N_{nj}^*}} \sum_{r=0}^{\min(k, q, \frac{1}{2}(k+q-m-1-|1-s|))} a_r^{(k,q)} \times f^{(s,m,k+q-2r)} \nu_{in} P_{in}^{(s)} \varepsilon_{nj}^{(q)}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$k = 0, 1, \dots, N_{ij}^*, \quad i = 1, 2; \quad k = 0, 1, \dots, \min(N-1, N_{ij}^*), \quad i = 3.$$

Выражения для  $s_{\alpha i}^{(k)}$ ,  $k = N_{\alpha i}^* + 1, N_{\alpha i}^* + 2, \dots, N$ ;  $s_{3i}^{(k)}$ ,  $k = \min(N-1, N_{3i}^*) + 1, \min(N-1, N_{3i}^*) + 2, \dots, N-1$ , можно получить из формул (5.2), отбросив в них слагаемые, содержащие произведения моментов неизвестных функций.

### §6. Вариации работ массовых сил $\delta A_1^*$ и внешних поверхностных нагрузок $\delta A_2^*$ .

Функционал работы массовых сил в оболочке с учетом формул (3.4) принимает следующий вид:

$$A_1^* = \iint_S \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^N F_i^{(k)} u_i^{(k)} dS \quad \left( F_i^{(k)} = \int_{-h^-}^{h^+} F_i P_k(\zeta) \mathcal{G} dx_3, \quad k = 0, 1, \dots, N \right). \quad (6.1)$$

Примем, что поверхность  $\Sigma_s$  обладает следующим свойством. Если хоть одна точка какой-нибудь образующей поверхности  $\Sigma$  принадлежит поверхности  $\Sigma_s$ , то и все остальные точки этой образующей принадлежат поверхности  $\Sigma_s$ .

Тогда, согласно формулам (2.6), (2.8) и (3.4), работу внешних поверхностных нагрузок можно записать в виде

$$A_2^* = \int_{\Gamma_s} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^N s_i^{*(k)} u_i^{(k)} d\Gamma + \iint_S \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^N \left[ (-1)^k \mu^- s_i^- + \mu^+ s_i^+ \right] u_i^{(k)} dS, \quad (6.2)$$

где  $\Gamma_s$  – линия пересечения поверхностей  $S$  и  $\Sigma_s$ ;

$$s_i^{*(k)} = \int_{-h^-}^{h^+} s_i^* \left( 1 - \sum_{l=1}^{\tilde{N}} k_{(l)} x_3^l \right) P_k(\zeta) dx_3, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Варьируя функционалы (6.1) и (6.2) по независимым функциональным аргументам  $\delta u_i^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , получим

$$\begin{aligned} \delta A_1^* &= \iint_S \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^N F_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dS; \\ \delta A_2^* &= \int_{\Gamma_s} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^N s_i^{*(k)} \delta u_i^{(k)} d\Gamma + \iint_S \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^N \left[ (-1)^k \mu^- s_i^- + \mu^+ s_i^+ \right] \delta u_i^{(k)} dS. \end{aligned} \quad (6.3)$$

### §7. Вариация кинетической энергии $\delta T$ .

Принимаем, что плотность материала оболочки может быть переменной вдоль координаты  $x_3$ .

Подставив в последнюю из формул (1.3) выражения (3.4), получим

$$T = \frac{1}{2} \iint_S h \sum_{i=1}^3 \sum_{m,n=0}^N \rho \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial t} \frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t} dS. \quad (7.1)$$

Здесь введены следующие обозначения для обобщенных плотностей:

$$\rho^{mn} = \int_{-1}^1 \rho P_m(\zeta) P_n(\zeta) \mathcal{D}d\zeta, \quad m, n = 0, 1, \dots, N.$$

В результате интегрирования по частям интеграла по времени от вариации функционала (7.1) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \iint_S h \sum_{i=1}^3 \sum_{m,n=0}^N \rho \frac{\partial^2 u_i^{(m)}}{\partial t^2} \delta u_i^{(n)} dS dt + \iint_S h \sum_{i=1}^3 \sum_{m,n=0}^N \rho \left[ \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial t} \delta u_i^{(n)} \right]_{t_0}^{t_1} dS. \quad (7.2)$$

Так как поставлены условия  $\delta u_i|_{t=t_0} = 0$  и  $\delta u_i|_{t=t_1} = 0$  в области пространства, занятой оболочкой, то

$$\delta u_i^{(k)} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad \delta u_i^{(k)} \Big|_{t=t_1} = 0 \quad \text{на } S, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (7.3)$$

Поэтому второй интеграл в правой части равенства (7.2) равен нулю.

### §8. Уравнения движения, граничные и начальные условия.

Пусть на части граничного среза  $\Sigma_u$  заданы смещения  $u_i^*$ ;  $\Sigma_u \cup \Sigma_s = \Sigma$ ,  $\Sigma_u \cap \Sigma_s = \emptyset$ . Обозначим через  $\Gamma_u$  линию пересечения поверхностей  $S$  и  $\Sigma_u$ ;  $\Gamma_u \cup \Gamma_s = \Gamma$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_s = \emptyset$ . Имеем

$$u_i^{(k)} = u_i^{*(k)} \quad \text{на } \Gamma_u, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (8.1)$$

где  $u_i^{*(k)}$  – функции на  $\Gamma_u$ , представляющие моменты заданных компонент вектора смещений.

Подставим найденные значения из равенств (5.1), (6.3) и (7.2) в формулу (1.2) и преобразуем интегралы в ее левой части таким образом, чтобы исключить производные от вариаций обобщенных смещений. Достижем этого применением формулы Гаусса – Остроградского для преобразования интеграла по области в пространстве гауссовых параметров поверхности  $S$  в интеграл по контуру  $\Gamma$ . Приравняв к нулю

выражения, стоящие перед вариациями обобщенных смещений в интегралах по области в пространстве гауссовых параметров поверхности  $S$ , получим  $3N$  дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(A_2 s_{11}^{(k)})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 s_{21}^{(k)})}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} s_{12}^{(k)} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} s_{22}^{(k)} + A_1 A_2 \left( -k_1 s_{13}^{(k)} - \frac{1}{h} s_{31}^{(k)} \right) + \\
& + \frac{1}{h} A_1 A_2 \left[ \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} s_{11}^{(k)} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_1} s_{11}^{(k)} \right) + \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} s_{21}^{(k)} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_2} s_{21}^{(k)} \right) \right] + \\
& + A_1 A_2 \left[ F_1^{(k)} + (-1)^k \mu^- s_1^- + \mu^+ s_1^+ \right] = A_1 A_2 h \sum_{m=0}^N \rho \frac{\partial^2 u_1^{(m)}}{\partial t^2}, \quad 1 \Leftrightarrow 2; \\
& \frac{\partial(A_2 s_{13}^{(k)})}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 s_{23}^{(k)})}{\partial x_2} + A_1 A_2 \left( k_1 s_{11}^{(k)} + k_2 s_{22}^{(k)} - \frac{1}{h} s_{33}^{(k)} \right) + \\
& + \frac{1}{h} A_1 A_2 \left[ \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} s_{13}^{(k)} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_1} s_{13}^{(k)} \right) + \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial h}{\partial x_2} s_{23}^{(k)} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial x_2} s_{23}^{(k)} \right) \right] + \\
& + A_1 A_2 \left[ F_3^{(k)} + (-1)^k \mu^- s_3^- + \mu^+ s_3^+ \right] = A_1 A_2 h \sum_{m=0}^N \rho \frac{\partial^2 u_3^{(m)}}{\partial t^2}, \quad k = 0, 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{8.2}$$

где

$$\begin{aligned}
s_{ij}^{(0)} &= 0; \quad s_{ij}^{(k)} = (2k-1)s_{ij}^{(k-1)} + (2k-5)s_{ij}^{(k-3)} + \dots, \quad k = 1, 2, \dots, N; \\
s_{ij}^{(k)} &= k s_{ij}^{(k)} + (2k-3)s_{ij}^{(k-2)} + (2k-7)s_{ij}^{(k-4)} + \dots, \quad k = 0, 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

В силу условий (8.1) интеграл по кривой  $\Gamma_u$  обращается в нуль. Остальные необходимые условия равенства нулю первой вариации  $\delta I$  получим, приравняв к нулю выражения в интеграле по кривой  $\Gamma_s$ , стоящие перед функциями  $\delta u_i^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,

$$\sum_{\alpha=1}^2 v_\alpha s_{\alpha i}^{(k)} - s_i^{*(k)} = 0 \quad \text{на } \Gamma_s, \quad k = 0, 1, \dots, N, \tag{8.3}$$

где  $v_\alpha$  – компоненты орта внешней нормали к контуру  $\Gamma$ ;  $v_1 = \sin \alpha$ ,  $v_2 = -\cos \alpha$ .

Возможны и другие сочетания условий из числа условий (8.1) и (8.3), совместимые с вариационным принципом (1.2).

В условиях (7.3) отбросим условия второй группы. Вместо них поставим начальные условия для скоростей моментов смещений, не вытекающие из вариационного принципа (1.2). Эти условия и условия первой группы (начальные условия для моментов смещений) запишем в виде

$$u_i^{(k)} \Big|_{t=t_0} = \varphi_{0i}^{(k)}, \quad \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \varphi_{1i}^{(k)} \quad \text{на } S, \quad k = 0, 1, \dots, N, \tag{8.4}$$

где  $\varphi_{0i}^{(k)}$ ,  $\varphi_{1i}^{(k)}$  – моменты функций  $\varphi_{0i}$ ,  $\varphi_{1i}$ , соответственно, представляющих заданные компоненты векторов смещений, скоростей смещений, соответственно, в момент времени  $t = t_0$ .

Таким образом, для определения неизвестных функций  $u_i^{(k)}$ ,  $\varepsilon_{\alpha i}^{(k)}$ ,  $s_{\alpha i}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ;  $\varepsilon_{3i}^{(k)}$ ,  $s_{3i}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $e_{ij}^{(k)}$ ,  $P_{ij}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, \hat{N}_{ij}$ , получена система уравнений (3.6), (3.9), (4.3), (5.2) и (8.2), к которой присоединены граничные условия (8.1) и (8.3) и начальные условия (8.4).

### §9. Числовой пример.

На базе уравнений (3.6), (3.9), (4.3), (5.2) и (8.2) при  $N_{i\alpha}^* = N_{33}^* = -1$ ,  $N_{\alpha 3}^* = -1, 0$ ,  $N = 0, 1, 2, 3$ , и соотношений (2.7) решим задачу динамики защемленной по всему контуру тонкой квадратной пластины при воздействии на нее импульса давления. Координатные оси  $x_\alpha$  направим вдоль сторон контура. Размеры пластины: сторона  $a = 0,8$  м,  $h^- = h^+ = 0,005$  м. Материал пластины – алюминий со следующими характеристиками: плотность  $\rho = 2,699 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,34$ , модуль Юнга  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. В этом случае имеют место формулы

$$c_{iiii} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_{ijij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad i \neq j;$$

$$c_{\alpha 3 \alpha 3} = c_{3 \alpha \alpha 3} = c_{\alpha 3 3 \alpha} = c_{3 \alpha 3 \alpha} = c_{1212} = c_{2112} = c_{1221} = c_{2121} = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Не определенные здесь компоненты тензора упругой жесткости приняты нулевыми.

Поверхностные нагрузки  $s_i^-$  и  $s_\alpha^+$  равны нулю. Поверхностная нагрузка  $s_3^+$  изменяется по закону  $s_3^+ = -10[\eta(t) - \eta(t - \tau)]$ , где  $\eta(t)$  – функция Хевисайда,  $\tau$  – время действия импульса. Примем, что  $\tau = 1,5 \cdot 10^{-7}$  с.

Численные эксперименты показали, что в рассматриваемом случае функции  $u_3^{(k)}$ ,  $k \geq 1$ , имеют незначительную величину, являются быстро знакопеременяющимися во времени и их сохранение в системе уравнений приводит к резкому увеличению времени ее численного интегрирования. Поэтому в разложении нормальной компоненты вектора смещений ограничимся одним членом –  $u_3^{(0)}$ . При этом некоторые из уравнений (8.2) при  $N \geq 1$  выпадут. Оставшиеся из уравнений (8.2) обозначим через (A).

Примем следующие начальные условия:

$$u_\alpha^{(k)} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha^{(k)}}{\partial t} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N; \quad u_3^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Решение получим в два этапа.

На первом этапе перейдем от исходных уравнений в частных производных (A) к уравнениям в обыкновенных производных. Аппроксимируем функции  $u_\alpha^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ),  $u_3^{(0)}$  в виде рядов

$$u_1^{(k)} = \sum_{m,n=1}^M u_{1,2m,2n-1}^{(k)} \sin \frac{2m\pi x_1}{a} \sin \frac{(2n-1)\pi x_2}{a};$$

$$u_2^{(k)} = \sum_{m,n=1}^M u_{2,2m-1,2n}^{(k)} \sin \frac{(2m-1)\pi x_1}{a} \sin \frac{2n\pi x_2}{a}, \quad k = 0, 1, \dots, N;$$

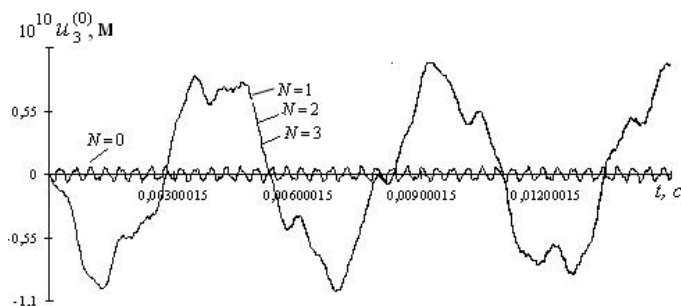
$$u_3^{(0)} = \sum_{m,n=1}^M u_{3,2m-1,2n-1}^{(0)} \sin \frac{(2m-1)\pi x_1}{a} \sin \frac{(2n-1)\pi x_2}{a},$$

где  $m$  и  $n$  – число волн по координатах  $x_1$  и  $x_2$ , соответственно;  $M$  – некоторое фиксированное неотрицательное целое число;  $u_{1,2m,2n-1}^{(k)}$ ,  $u_{2,2m-1,2n}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, M$ ;  $u_{3,2m-1,2n-1}^{(0)}$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, M$ , – параметры, зависящие лишь от  $t$ .

Применив далее метод Бубнова – Галеркина к уравнениям (А) для некоторого фиксированного момента времени  $t$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для  $u_{1,2m,2n-1}^{(k)}$ ,  $u_{2,2m-1,2n}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, M$ ;  $u_{3,2m-1,2n-1}^{(0)}$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, M$ , содержащих лишь одну независимую переменную –  $t$ .

На *втором этапе* проведем численное интегрирование этой системы уравнений.

Алгоритм решения задачи был реализован в виде программы в системе программного обеспечения Wolfram Mathematica 8.



На рисунке изображены графики изменения во времени прогиба в центре пластины при различных  $N$ . При вычислениях принято  $M = 4$  и использована арифметика с фиксированным количеством значимых десятичных цифр, равным 30. Линии, полученные по данным линейного приближения (при  $N_{ij}^* = -1$ ), совпадают с линиями, полученными по данным решения нелинейных задач (при  $N_{i\alpha}^* = N_{33}^* = -1$ ,  $N_{\alpha 3}^* = 0$ ), т. е. результаты решения линейной и нелинейной задач при одном и том же  $N$  существенно не отличаются.

Линии, полученные с учетом моментов тангенциальных компонент вектора смещений до первого порядка (при  $N = 1$ ), до второго порядка (при  $N = 2$ ) и до третьего порядка (при  $N = 3$ ), совпадают, т. е. результаты решения задач при  $N = 1, 2, 3$  существенно не отличаются. Предположение о постоянстве смещений по толщине ( $N = 0$ ) весьма существенно изменяет величину прогиба и частоту колебаний.

Из вычислений следует, что функции  $u_{1,2m,2n-1}^{(k)}$ ,  $u_{2,2m-1,2n}^{(k)}$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, M$ , обращаются в нуль или имеют незначительную величину, если  $k = 0, 2$ .

#### Заключение.

Построена теория динамического упругого геометрически нелинейного деформирования нетонких несимметричных относительно базовой поверхности анизотропных оболочек переменной толщины, основанная на разложениях известных и неизвестных величин в ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты. Уравнения движения и соответствующие им граничные условия получены путем использования ва-

риационного принципа Гамильтона – Остроградского. Построенная теория предполагает регулярный процесс уточнения. На базе ее уравнений, содержащих моменты компонент вектора смещений до порядка  $N = 0, 1, 2, 3$  включительно и некоторые слагаемые с произведениями моментов неизвестных функций порядка нуль, исследовано воздействие на квадратную металлическую пластину импульса давления, распределенного по ее лицевой поверхности. Дан анализ полученных числовых результатов.

**РЕЗЮМЕ.** Побудовано теорію динамічного пружного геометрично нелінійного деформування нетонких несиметричних відносно базової поверхні анізотропних оболонок змінної товщини. Використано метод розкладу функцій у ряди за поліномами Лежандра від нормальної координати. Основні співвідношення записано в координатній системі на базовій поверхні в лінійних кривизни. Рівняння руху й відповідні їм граничні умови отримано шляхом використання варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Враховано зміну метрики за товщиною. Побудована теорія передбачає регулярний процес уточнення. З його допомогою можна отримати рівняння, що міститимуть доданки з добутками членів рядів за поліномами Лежандра від нормальної координати для невідомих функцій довільного порядку. На базі побудованої теорії досліджено вплив на квадратну металічну пластину імпульсу тиску, розподіленого по її лицьовій поверхні.

1. Веква И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
2. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 271 с.
3. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. – Львов: «Вища школа», 1978. – 192 с.
4. Марчук М.В. Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // *Машинознавство*. – 2005. – № 10. – С. 9 – 14.
5. Марчук М.В., Тучапський Р.І. Система основних рівнянь нелінійної теорії пружності для тонких і пологих оболонок // *Матем. методи та фіз.-мех. поля*. – 2007. – **50**, № 3. – С. 178 – 186.
6. Плеханов А.В., Прусаков А.П. Об уточнении теории пластин при конечных прогибах // *Прикл. механика*. – 1982. – **18**, № 11. – С. 70 – 74.
7. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
8. Хома И.Ю. Некоторые нелинейные соотношения математической теории нетонких оболочек // *Прикл. механика*. – 2000. – **36**, № 8. – С. 104 – 112.
9. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
10. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
11. Meroueh K.A. On a formulation of a nonlinear theory of plates and shells with applications // *Computers and Structures*. – 1986. – **24**, N 5. – P. 691 – 705.
12. Meroueh K.A. On a nonlinear theory of plates and shells including consistent and inconsistent kinematics and the finite element method // *Computers and Structures*. – 1988. – **29**, N 1. – P. 117 – 132.
13. Meunargia T. On one method of construction of geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells // *Proc. of A. Razmadze Math. Inst.* – 1999. – **119**. – P. 133 – 154.
14. Meunargia T. On extension of the Muskhelishvili and Vekua – Bitsadze methods for geometrically and physically nonlinear theory of non-shallow shells // *Proc. of A. Razmadze Math. Inst.* – 2011. – **157**. – P. 95 – 129.
15. Wu Shen-rong Studies of nonlinear theories for thin shells // *Appl. Math. and Mech.* – 1983. – **4**, N 2. – P. 221 – 231.

Поступила 27.01.2017

Утверждена в печать 30.05.2017