

Е. А. Сторожук¹, И. С. Чернышенко², О. В. Пиголь³

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ,
ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;*

e-mail: ¹ stevan@ukr.net, ² prikl@inmech.kiev.ua, ³ pigolo@ukr.net

Abstract. The statement is given and the numerical technique is developed for solving the static problems for an elastoplastic cylindrical shell of elliptic cross-section with a circular hole. The system of resolving equations is obtained by means of the Kirchhoff – Love theory of non-shallow shells and the theory of small elastoplastic strains. The proposed technique is based on application of the method of additional stresses and the finite element method. For a shell loaded by the uniform internal pressure, an effect of plastic strains and shell geometric parameters on distribution of stresses, strains and displacements in the zone of their concentration is studied.

Key words: cylindrical shell, elliptical cross-section, circular hole, Kirchhoff – Love theory, plasticity, finite element method, static load.

Введение.

Тонкие цилиндрические оболочки кругового и некругового сечения находят широкое применение в различных областях современной техники как конструктивные элементы машин и приборов. В большинстве случаев эти элементы по конструктивным или технологическим соображениям имеют отверстия различной формы. При значительных уровнях действующих нагрузок возле указанных концентраторов возникают зоны повышенных напряжений, а свойства их материала характеризуются нелинейной диаграммой деформирования.

Основные теоретические результаты по проблеме концентрации напряжений в цилиндрических оболочках с отверстиями при действии статических нагрузок получены для случая кругового поперечного сечения на основе решения линейно-упругих задач и изложены в обобщающих монографиях и обзорных статьях [2, 4, 11, 13].

Результаты решения краевых задач с учетом нелинейных факторов (пластических деформаций и конечных прогибов) получены лишь для круговых цилиндрических оболочек, ослабленных одним или двумя криволинейными отверстиями [9, 15].

В большинстве публикаций, посвященных некруговым цилиндрическим оболочкам, рассматриваются оболочки без концентраторов напряжений (отверстий, вырезов и т.п.). С помощью аналитических, численных и экспериментальных методов исследованы напряженно-деформированное состояние (НДС) [3, 5, 12, 16, 18], устойчивость [8, 10, 17] и колебания [14, 19, 20] овальных и эллиптических цилиндрических оболочек при действии различного вида нагрузок.

Исследование концентрации напряжений в некруговых цилиндрических оболочках с отверстиями выполнено в незначительном количестве работ и только в линейно-упругой постановке. Так, в работе [1] изучено НДС эллиптической цилиндрической оболочки с прямоугольным вырезом при действии неравномерно распределенного вдоль направляющей давления. Влияние эллиптичности поперечного сечения на НДС в области кругового отверстия на боковой поверхности цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми растягивающими усилиями, исследовано в работе [13].

Из обзора работ по данной проблеме следует, что теоретические работы об упругопластическом состоянии некруговых цилиндрических оболочек, ослабленных криволинейными отверстиями, в научной литературе в настоящее время отсутствуют.

Поэтому ниже дана постановка упругопластических задач статики для эллиптических цилиндрических оболочек с круговым отверстием, приведены основные нелинейные уравнения, изложена методика численного решения задач данного класса и представлены конкретные числовые результаты для оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением.

§1. Постановка задачи и основные соотношения.

Тонкую цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения и толщины h , которая ослаблена круговым отверстием радиуса r_0 , отнесем к криволинейной ортогональной системе координат (x, φ, γ) , где x, γ – длины образующей и нормали к срединной поверхности оболочки; φ – угол между нормалью к срединной поверхности и вертикальной осью (рис. 1). Примем, что оболочка изготовлена из однородного изотропного материала и находится под действием поверхностных сил $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$, а также краевых усилий и моментов $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$.

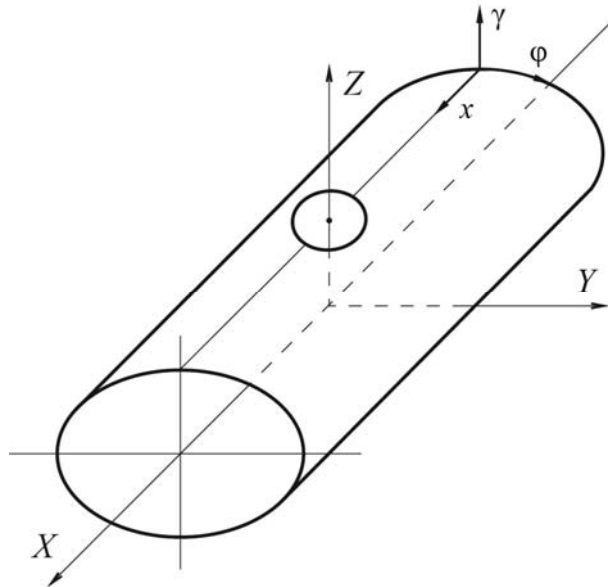


Рис. 1

Геометрию срединной поверхности оболочки представим в глобальной декартовой системе координат (X, Y, Z) , ось OX которой параллельна образующей, а ось OZ проходит через центр отверстия. Плоскость поперечного сечения оболочки отнесем к системе координат (Y, Z) , а его уравнения запишем в параметрической форме:

$$Y = \frac{a^2 \sin \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}}; \quad Z = \frac{b^2 \cos \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_N), \quad (1.1)$$

где a, b – полуоси эллипса.

С помощью формулы для вычисления длины дуги кривой

$$s(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{dY(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ(t)}{dt}\right)^2} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{a^2 b^2 dt}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \quad (1.2)$$

строим табличную функцию

$$\varphi_i = \varphi(s_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1.3)$$

которая описывает зависимость параметра φ от длины дуги эллипса s и используется при разбиении срединной поверхности оболочки на конечные элементы (КЭ).

Для коэффициентов первой квадратичной формы и кривизн срединной поверхности оболочки имеем выражения:

$$A_1 = 1; \quad A_2 = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}{a^2 b^2}. \quad (1.4)$$

Геометрические соотношения представим в векторной форме согласно теории непологих оболочек, в которой имеют место гипотезы Кирхгофа – Лява [4, 11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial x}; & \varepsilon_{22} &= \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \varphi}; & \varepsilon_{12} &= \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial x} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \varphi}; \\ \mu_{11} &= \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_1 \partial x}; & \mu_{22} &= \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_2 \partial \varphi}; & 2\mu_{12} &= \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_1 \partial x} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{A_2 \partial \varphi}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\bar{u} = u\bar{e}_1 + v\bar{e}_2 + w\bar{n} = u_1\bar{i}_1 + u_2\bar{i}_2 + u_3\bar{i}_3$ – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$ – орты системы координат (x, φ, γ) ; $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – орты глобальной декартовой системы координат (X, Y, Z) ; $\bar{g} = g_x\bar{e}_1 + g_\varphi\bar{e}_2 = g_1\bar{i}_1 + g_2\bar{i}_2 + g_3\bar{i}_3$ – вектор углов поворота нормали, которые определяются согласно гипотезам Кирхгофа – Лява по формулам:

$$g_x = -\bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_1 \partial x}; \quad g_\varphi = -\bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{A_2 \partial \varphi}. \quad (1.6)$$

Принимая, что нагружение оболочки простое, физические соотношения запишем на основе теории малых упругопластических деформаций в виде [4, 11]:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^P; \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0 + \sigma_{12}^P; \quad \sigma_{11}^0 = \frac{2G}{1-\nu}(e_{11} + \nu e_{22}); \quad \sigma_{12}^0 = G e_{12}; \quad (1.7)$$

$$\sigma_{11}^P = 2G \left[\left(\frac{1-\omega_i}{1-\nu_i} - \frac{1}{1-\nu} \right) e_{11} + \left(\frac{(1-\omega_i)\nu_i}{1-\nu_i} - \frac{\nu}{1-\nu} \right) e_{22} \right]; \quad \sigma_{12}^P = -G\omega_i e_{12};$$

$$e_{11} = \varepsilon_{11} + \gamma\mu_{11}; \quad e_{12} = \varepsilon_{12} + 2\gamma\mu_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Здесь G, ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала оболочки; ω_i, ν_i – функция пластичности и переменный коэффициент поперечной деформации; величины с индексом «0» сверху соответствуют линейной теории оболочек, а с индексом «P» учитывают пластические деформации материала в соответствующих выражениях.

Внутренние усилия и моменты с учетом равенств (1.7) также представим в виде суммы линейной и нелинейной частей [11]: $T_{ij} = T_{ij}^0 + T_{ij}^P$; $M_{ij} = M_{ij}^0 + M_{ij}^P$ ($i, j = 1, 2$).

§2. Методика численного решения физически нелинейных задач для эллиптической цилиндрической оболочки с отверстием.

Систему разрешающих уравнений получим из принципа возможных перемещений с использованием метода дополнительных напряжений и метода конечных элементов (МКЭ). В результате линеаризации задачи приходим к функционалу следующего вида:

$$\begin{aligned} \Pi^{LN} = & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} (T_{11}^0 \varepsilon_{11} + T_{22}^0 \varepsilon_{22} + T_{12}^0 \varepsilon_{12} + M_{11}^0 \mu_{11} + M_{22}^0 \mu_{22} + 2M_{12}^0 \mu_{12}) d\Sigma + \\ & + \iint_{\Sigma} (T_{11}^P \varepsilon_{11} + T_{22}^P \varepsilon_{22} + T_{12}^P \varepsilon_{12} + M_{11}^P \mu_{11} + M_{22}^P \mu_{22} + 2M_{12}^P \mu_{12}) d\Sigma - A, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где A – работа внешних поверхностных $\{p\}$ и краевых $\{m_k\}$ сил; Σ – область срединной поверхности оболочки.

Линейную задачу решаем с помощью варианта МКЭ, разработанного с учетом особенностей деформирования тонких цилиндрических оболочек некругового поперечного сечения, ослабленных отверстиями, при действии статических нагрузок.

Предложенная модификация МКЭ является развитием конечно-элементного подхода к численному решению нелинейных задач теории оболочек сложной геометрии с криволинейными отверстиями, изложенного в работах [9, 11, 15], и имеет ряд особенностей.

1. Для компонент деформации оболочки используются соотношения в векторной форме (1.5).

2. При построении конечного элемента оболочки аппроксимируется вектор перемещений \vec{u} , т. е. проекции этого вектора u_k на оси глобальной декартовой системы координат (X, Y, Z) :

$$u_k = \sum_{i=1}^4 u_k^{(i)} L_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

а не его компоненты (u, v, w) в системе координат (x, φ, γ) .

В соотношениях (2.2) введены обозначения: i – локальный номер узла КЭ; $L_i(\xi_1, \xi_2)$ – билинейные функции формы локальных координат ξ_1, ξ_2 .

3. Вектор углов поворота нормали $\vec{\vartheta}$ не определяется по формулам (1.6), как это принято в классическом МКЭ для тонких оболочек, а аппроксимируется биквадратичными полиномами серендипового типа $K_i(\xi_1, \xi_2)$ с выполнением гипотез Кирхгофа – Лява только в узлах КЭ [6, 9, 11, 15]:

$$\vartheta_k = \sum_{i=1}^8 \vartheta_k^{(i)} K_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.3)$$

Таким образом, в соотношениях разработанного варианта МКЭ отсутствуют производные выше первого порядка от аппроксимирующих функций, что значительно упрощает процесс дискретизации задачи.

4. С целью исключения отрицательного влияния явления мембранного запираания на сходимость результатов численных расчетов для компонент тангенциальной деформации оболочки (ε_{ij}) применяется метод двойной аппроксимации [7].

Построенный таким образом криволинейный КЭ оболочки удовлетворяет условиям непрерывности векторов перемещений и углов поворота, точно описывает поступательную часть перемещения КЭ как жесткого целого и свободен от явления мембранного запираания.

Из условий стационарности дискретного аналога функционала (2.1) получим систему разрешающих уравнений для тонкой цилиндрической оболочки эллиптического сечения с отверстием при деформировании за пределом упругости, которая в матричной форме имеет вид:

$$[K]\{q\} = \{P\} - \{\Phi\}, \quad (2.4)$$

где $[K]$ – матрица жесткости линейно-упругой оболочки; $\{q\}$ – вектор узловых степеней свободы; $\{P\}$ – вектор нагрузок; $\{\Phi\}$ – вектор нелинейностей, которые учитывают пластические деформации материала.

§3. Апробация численного подхода.

Эффективность разработанной методики проверена путем решения тестовых задач и сравнения полученных результатов с данными точного решения. В качестве тестового примера рассмотрим краевую задачу о НДС замкнутой бесконечно длинной цилиндрической оболочки овального поперечного сечения при действии равномерного внутреннего давления заданной интенсивности $q = 1$ кПа (рис. 2), для которой в работе [16] получено аналитическое (точное) решение.

Принято, что поперечное сечение оболочки имеет две оси симметрии и задается параметрическими уравнениями вида:

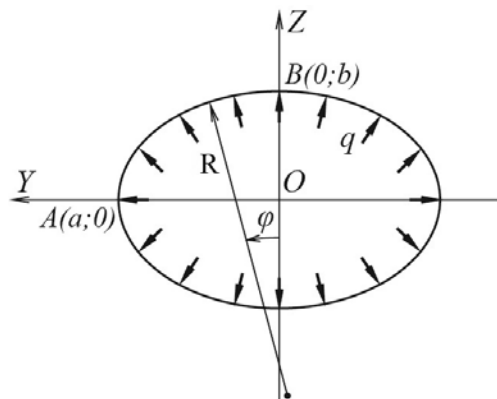


Рис. 2

$$Y = R_0 \left[\left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \sin \varphi + \frac{\xi}{6} \sin 3\varphi \right]; \quad Z = R_0 \left[\left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \cos \varphi + \frac{\xi}{6} \cos 3\varphi \right];$$

$$R_0 = \frac{a+b}{2}; \quad \xi = 3 \frac{a-b}{a+b}; \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi. \quad (3.1)$$

Здесь a, b – большая и малая полуоси поперечного сечения.

В этом случае радиус кривизны овала вычисляется по такой формуле:

$$R = R_0 (1 + \xi \cos 2\varphi). \quad (3.2)$$

Расчеты выполнены для оболочки постоянной толщины h с параметрами:

$$R_0/h = 100; \quad a/b = 1,5; \quad E = 70 \text{ ГПа}; \quad \nu = 0,3.$$

В табл. 1 приведены значения относительных прогибов $\tilde{w} = w/h$ в двух точках контура поперечного сечения (в концах малой и большой полуосей). Данные получены с использованием разработанной методики (МКЭ с двойной аппроксимацией) и варианта метода конечных элементов, описанного в [9, 11, 15] (МКЭ без двойной аппроксимации). Там же представлены результаты аналитического (точного) решения и зависимости погрешностей численных решений (Δ) от количества элементов вдоль четверти контура поперечного сечения (N).

Таблица 1

МКЭ без двойной аппроксимации					МКЭ с двойной аппроксимацией				
N	$\tilde{w}(0)$	$\Delta, \%$	$\tilde{w}(\pi/2)$	$\Delta, \%$	N	$\tilde{w}(0)$	$\Delta, \%$	$\tilde{w}(\pi/2)$	$\Delta, \%$
250	1,088	9,0	-0,719	8,6	3	1,137	4,9	-0,740	6,0
500	1,167	2,4	-0,769	2,3	5	1,169	2,3	-0,769	2,3
1000	1,189	0,6	-0,783	0,5	10	1,189	0,6	-0,783	0,5
2000	1,194	0,2	-0,786	0,1	20	1,194	0,2	-0,786	0,1
Аналитическое (точное) решение: $\tilde{w}(0) = 1,196$; $\tilde{w}(\pi/2) = -0,787$									

Сравнение результатов, полученных МКЭ без двойной аппроксимации, с аналитическим решением свидетельствует о том, что при решении данной задачи указанным методом возникает явление так называемого мембранного запираания. Так, для того, чтобы погрешность численного решения задачи в этом случае была менее 1%, необходимо разбить четверть контура поперечного сечения на 1000 элементов. В то же время для достижения указанной точности при использовании МКЭ с двойной аппроксимацией достаточно всего 10 элементов, т. е. в 100 раз меньше.

Таким образом, разработанная численная методика решения краевых задач для некруговых цилиндрических оболочек полностью исключает отрицательное влияние запирания на сходимость результатов, что значительно повышает точность решения данных задач.

§4. Числовые результаты и их анализ.

Представим результаты исследования упругопластического состояния длинной цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения, ослабленной круговым отверстием (рис. 1). Оболочка изготовлена из сплава АМг-6 и нагружена внутренним давлением интенсивности $q = q^* \cdot 10^5$ Па.

Расчеты проведены для оболочки с такими геометрическими и физико-механическими параметрами:

$$(a+b)/h = 100; \quad a/b = 11/10; 1; 10/11; \quad r_0/h = 12;$$

$$E = 70 \text{ ГПа}; \quad \nu = 0,3 \dots 0,5; \quad \sigma_n = 140 \text{ МПа}; \quad \varepsilon_n = 0,002.$$

Принято, что отверстие закрыто крышкой, которая передает на его контур только действие перерезывающих усилий $Q_k = qr_0/2$.

Конкретные числовые результаты решения линейных (ЛЗ) и физически нелинейных задач (ФНЗ) получены для равномерного внутреннего давления интенсивности $q^* = 4$.

В табл. 2 дано распределение относительных прогибов (w/h), окружных деформаций e_θ и напряжений σ_θ^* ($\sigma_\theta = \sigma_\theta^* \cdot 10^5$ Па) вдоль контура отверстия ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, где θ отсчитывается от образующей) на внешней и внутренней поверхностях оболочки ($\zeta = \gamma/h = \pm 0,5$). Результаты представлены для двух эллиптических ($a = 1,1b$ и $b = 1,1a$) и одного кругового ($a = b$) цилиндров как для ЛЗ, так и ФНЗ.

Таблица 2

Решение	$\theta,^\circ$	ζ	ЛЗ			ФНЗ		
			$b = 1,1a$	$a = b$	$a = 1,1b$	$b = 1,1a$	$a = b$	$a = 1,1b$
w/h	0	0	-6,519	-0,057	7,099	-13,73	-0,058	13,88
	45	0	-5,967	0,015	6,751	-12,13	0,015	12,96
	90	0	-5,433	0,087	6,413	-10,86	0,088	12,07
$e_\theta \cdot 10^2$	0	0,5	-0,6666	0,0894	0,8209	-2,4439	0,0891	2,521
		-0,5	0,7231	0,2581	-0,2065	2,4262	0,2610	-0,4738
	45	0,5	-0,2378	0,1497	0,5326	-0,3228	0,1501	1,3108
		-0,5	0,3654	0,1015	-0,1671	0,4525	0,1013	-0,3695
	90	0,5	-0,0364	0,1006	0,2397	-0,0455	0,1006	0,2625
		-0,5	-0,1112	-0,1622	-0,2206	-0,1806	-0,1622	-0,2315
σ_θ^*	0	0,5	-4670	643	5781	-2166	645	2213
		-0,5	5060	1824	-1410	2149	1503	-1592
	45	0,5	-1661	1061	3749	-1485	1062	1873
		-0,5	2563	724	-1151	1641	722	-1282
	90	0,5	-266	698	1676	-334	698	1474
		-0,5	-789	-1143	-1548	-1281	-1143	-1439

Значения относительных прогибов (w/h), деформаций (e_{22}) и напряжений (σ_{22}^*) в нескольких точках контура поперечного сечения ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) на внешней (числитель) и внутренней (знаменатель) поверхностях длинных эллиптической и круговой цилиндрических оболочек без отверстия приведены в табл. 3.

Таблица 3

a/b	$\varphi, ^\circ$	ЛЗ			ФНЗ		
		w/h	$e_{22} \cdot 10^2$	σ_{22}^*	w/h	$e_{22} \cdot 10^2$	σ_{22}^*
1,1	0	6,523	$\frac{0,3876}{-0,3381}$	$\frac{2980}{-2599}$	10,22	$\frac{0,7513}{-0,6282}$	$\frac{2077}{-2013}$
	45	-0,309	$\frac{-0,0182}{0,0702}$	$\frac{-139}{540}$	-0,402	$\frac{-0,0134}{0,0655}$	$\frac{-103}{504}$
	90	-5,849	$\frac{-0,3533}{0,4078}$	$\frac{-2716}{3135}$	-9,238	$\frac{-0,6803}{0,8235}$	$\frac{-2038}{2104}$
1,0	0	0,013	0,026	200	0,013	0,026	200

Из представленных результатов решения ЛЗ и ФНЗ следует, что при действии равномерного внутреннего давления как для эллиптической, так и круговой цилиндрических оболочек, наиболее опасными являются точки, которые расположены на контуре отверстия в сечении ($\theta = 0^\circ$), где имеют место наибольшие напряжения и деформации.

Учет пластических деформаций материала оболочки приводит к выравниванию напряжений как по толщине оболочки, так и на контуре отверстия, а также к уменьшению максимальных напряжений по сравнению с результатами линейно-упругого решения на 57% при $b = 1,1a$, на 18% – при $a = b$ и на 62% – при $a = 1,1b$. Кроме этого, максимальные деформации и прогибы для ФНЗ больше соответствующих данных ЛЗ на 238 и 111% при $b = 1,1a$, на 1 и 1% при $a = b$, а также на 207 и 96% при $a = 1,1b$.

Анализ приведенных результатов свидетельствует о том, что коэффициент концентрации напряжений (k_θ) для эллиптической оболочки значительно меньше коэффициента концентрации напряжений для круговой оболочки. Так, значения коэффициента концентрации напряжений, полученные из решения задач в линейно-упругой постановке (ЛЗ), составляют: 1,61 при $b = 1,1a$; 9,12 при $a = b$ и 1,94 при $a = 1,1b$, а в физически нелинейной (ФНЗ) – 1,03 при $b = 1,1a$; 7,52 при $a = b$ и 1,07 при $a = 1,1b$.

Заключение.

Таким образом, в работе дана постановка и изложена методика численного решения двумерных упругопластических задач для тонких цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения, ослабленных круговым отверстием, которая базируется на применении метода дополнительных напряжений и метода конечных элементов с двойной аппроксимацией деформаций. С помощью разработанной методики исследовано упругопластическое состояние эллиптической и круговой цилиндрических оболочек с отверстием при действии равномерного внутреннего давления. Числовые результаты представлены в виде таблиц для нескольких значений отношения полуосей поперечного сечения оболочки. В дальнейшем представляет интерес также решение нелинейных краевых задач для тонких цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения, ослабленных криволинейными отверстиями, при действии разного вида нагрузок.

РЕЗЮМЕ. Дано постановку і розроблено чисельну методику розв'язання задач статки для пружнопластичної циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу з круговим отвором. Систему основних рівнянь отримано на основі співвідношень теорії непологих оболонок Кірхгофа – Лява і теорії малих пружнопластичних деформацій. Запропонована методика базується на застосуванні методу додаткових напружень і методу скінченних елементів. Для оболонки, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском, досліджено вплив пластичних деформацій і геометричних параметрів на розподіл напружень, деформацій і переміщень в зоні їх концентрації.

1. Кузнецов Ю.М. НДС некруговой цилиндрической оболочки с вырезом под воздействием неравномерно распределенного вдоль направляющей давления // Исследования по теории пластин и оболочек: тр. семинара КФТИ КФ АН СССР. – Казань: Изд-во КГУ, 1992. – Вып. 24. – С. 35 – 39.
2. Концентрация напряжений / А.Н. Гузь, А.С. Космодамианский, В.П.Шевченко и др. – К.: «А.С.К.», 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т.7).
3. Сторожук Е.А., Яцура А.В. Аналитически-численное решение задач статики для некруговых цилиндрических оболочек переменной толщины // Прикл. механика. – 2017. – **53**, № 3. – С. 91 – 103.
4. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С.Чернышенко, В.Н.Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.1).
5. Abrosov Yu.Yu., Maksimiyuk V.A., Chernyshenko I.S. Influence of Cross-Sectional Ellipticity on the Deformation of a Long Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 529 – 534.
6. Areias P.M.A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff-Love constraints // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2005. – **64**. – P. 1166 – 1206.
7. Bathe K.-J., Dvorkin E.N. A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1985. – **21**, N 2. – P. 367 – 383.
8. Chen Y.N., Kempner J. Buckling of oval cylindrical shell under compression and asymmetric bending // AIAA J. – 1976. – **14**, N 9. – P. 1235 – 1240.
9. Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A. Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 12. – P. 1414 – 1420.
10. Grigorenko Ya.M., Kharitonova L.V. Deformation of Flexible Noncircular Cylindrical Shells under Concurrent Loads of Two Types // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 7. – P. 754 – 760.
11. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Two-Dimensional Static Problems for Thin Shells with Reinforced Curvilinear Holes // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 12. – P. 1269 – 1300.
12. Kiseleva T. A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. Comparison of scalar and vector FEM forms in the case of an elliptic cylinder // J. Comput. Math. and Math. Phys. – 2015. – **55**, N 3. – P. 422 – 431.
13. Oterkus E., Madenci E., Nemeth M. Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout // J. Mechanics of Materials and Structures. – 2007. – **2**, N 4. – P. 695 – 727.
14. Soldatos K. P. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
15. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress Distribution in Physically and Geometrically Nonlinear Thin Cylindrical Shells with Two Holes // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 11. – P. 1280 – 1287.
16. Storozhuk E.A., Yatsura A.V. Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 386 – 397.
17. Tennyson R.C., Booton M., Caswell R.D. Buckling of imperfect elliptical cylindrical shells under axial compression // AIAA J. – 1971. – **9**, N 2. – P. 250 – 255.
18. Timoshenko S. Strength of materials. Part II, Advanced theory and problems. – 2nd ed. – New York: D. Van Nostrand Company, 1941. – 510 p.
19. Tornabene F., Fantuzzi N., Baccocchi M., Dimitri R. Free vibrations of composite oval and elliptic cylinders by the generalized differential quadrature method // Thin Walled Struct. – 2015. – **97**. – P. 114 – 129.
20. Yamada G., Irie T., Tagawa Y. Free vibrations of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // J. Sound and Vibr. – 1984. – **95**, N 1. – P. 117 – 126.

Поступила 16.12.2016

Утверждена в печать 30.05.2017