

И. Ф. Киричок

**РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ ОБОЛОЧЕК
ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА
И ИХ ДЕМПФИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ
СЕНСОРЫ И АКТУАТОРОМ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: term@inmech.kiev.ua*

Abstract. The forced resonant axisymmetric vibrations and dissipative heating of the viscoelastic physically nonlinear closed spherical shell, the infinite long cylindrical shell, and the ring with piezoelectric sensor and actuator are considered. An effect of physical nonlinearity of passive material on the vibration amplitude and dissipative heating temperature is studied. A possibility of active damping of vibrations by means of common using the piezoelectric sensor and actuator is shown.

Key words: resonance vibration, dissipative heating, viscoelastic spherical shell, viscoelastic cylindrical shell, ring, piezoelectric actuators and sensors.

Введение.

В современной технике оболочечные тонкостенные элементы конструкций, изготовленные из неупругих материалов, часто работают в околорезонансном режиме при высоких амплитудах гармонического во времени нагружения. Такое деформирование неупругих материалов сопровождается высоким уровнем диссипативного разогрева и зависимостью их характеристик от амплитуд деформаций. Эти обстоятельства требуют исследования влияния физической нелинейности и диссипативного разогрева на работоспособность неупругих элементов и эффективности демпфирования их вынужденных колебаний. Теория термомеханического поведения тонкостенных элементов из физически нелинейных пассивных (без пьезоэффекта) и пьезоактивных материалов в моногармоническом приближении развита в работах [1, 2 и др.]. Для гашения колебаний таких элементов, наряду с пассивными, применяются методы активного демпфирования с помощью пьезоэлектрических составляющих, выполняющих роль сенсоров и актуаторов [7 – 10 и др.]. Исследования влияния физической нелинейности на термомеханическое поведение при моногармонических колебаниях трехслойных балок, круглых и прямоугольных пластинок и их демпфировании пьезоэлектрическими сенсором и актуатором содержатся в работах [1, 3, 11 и др.]. Вопросы теплового разрушения вследствие диссипативного разогрева таких элементов отражены в [8, 9 и др.].

В данной статье исследована задача о вынужденных радиальных колебаниях и диссипативном разогреве тонких замкнутой сферической, бесконечно длинной цилиндрической (плоская деформация) оболочек и кольца (плоское напряженное состояние) из пассивного физически нелинейного вязкоупругого материала и их активное демпфирование упругими пьезокерамическими слоями, один из которых является сенсором, а другой – актуатором. Демпфирование математически реализуется путем использования обратной связи между электрическими показателями сенсора и актуатора, влияющей на жесткостные, диссипативные или инерционные характеристики оболочек.

1. Постановка задачи и ее решение.

Рассмотрим замкнутую сферическую или бесконечно длинную цилиндрическую оболочку или кольцо радиуса R и толщины h_0 , выполненные из физически нелинейного изотропного вязкоупругого материала и отнесенные к соответствующей ортогональной системе координат с началом толщинной координаты $z = 0$ на срединной поверхности. Поверхности $z = \mp h_0 / 2$ жестко скреплены с упругими пьезокерамическими слоями толщиной h_1 и h_2 , соответственно. Пьезослои поляризованы по толщине. Их поверхности покрыты бесконечно тонкими сплошными электродами. На внутренних электродах заданы электрические потенциалы ${}^m\varphi(\pm h_0 / 2) = 0$ ($m = 1, 2$). Примем, что слой толщины h_1 выполняет роль сенсора, а толщины h_2 – актуатора.

Оболочечные элементы нагружены нормальным поверхностным давлением $q_z = q \cos \omega t$, гармонически изменяющемся во времени t с постоянной амплитудой q и частотой ω , близкой к резонансной. Для компенсации действия механической нагрузки к электродам актуатора с той же частотой подводится гармонически изменяющаяся в противофазе разность электрических потенциалов с амплитудой ${}^2\varphi(h_0 / 2 + h_2) - {}^2\varphi(h_0 / 2) = V_a$. В силу гармонического деформирования элементов на разомкнутых электродах сенсора возникает разность электрических потенциалов амплитуды ${}^1\varphi(-h_0 / 2 - h_1) - {}^1\varphi(-h_0 / 2) = V_s$, которая определяется при удовлетворении решения задачи электрическому граничному условию $\iint_S {}^1D_z ds = 0$ на электродированных поверхностях s сенсора (1D_z – нормальная составляющая вектора электрической индукции). На поверхностях $z = \pm(h_0 / 2 + h_{1,2})$ выполняются условия конвективного теплообмена со средой, температура T_0 которой равна начальной для элементов.

Вследствие выбранной геометрии и осесимметричного нагружения рассматриваемых объектов задачу электромеханики описываем уравнениями безмоментной теории трехслойных оболочек в предположении, что для механических переменных по пакету слоев справедливы гипотезы Кирхгофа – Лява и электрическая индукция $D_z = \text{const}$ не зависит от толщинной координаты в пьезослоях [2]. Ограничиваясь установившимся процессом виброразогрева, примем температуру постоянной по толщине пакета. Гармоническое деформирование вязкоупругого материала пассивного слоя описываем концепцией комплексных модулей. Физическую нелинейность учитываем, предполагая о линейной зависимости составляющих комплексного модуля от второго инварианта интенсивности деформаций [1].

На основании принятых допущений в рамках безмоментной теории оболочек уравнение гармонических колебаний рассматриваемых оболочечных элементов относительно амплитудных переменных имеет вид (множитель $e^{i\omega t}$ опущен) [2]

$$\beta N_\theta - \rho_* R \omega^2 w = \tilde{q}, \quad (1)$$

где $\rho_* = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_0 h_0$; $\tilde{q} = R(h_0 + h_1 + h_2)q$; ρ_1, ρ_2 и ρ_0 – удельные плотности пьезокерамики и пассивного материала; $N_\theta = N'_\theta + iN''_\theta$, $w = w' + iw''$ – комплексные окружное усилие и радиальный прогиб.

Трехмерные определяющие соотношения для поляризованной вдоль оси z пьезокерамики на основании принятых допущений относительно комплексных амплитудных величин пьезослоев сведены к таким выражениям:

$${}^m\sigma_\theta = {}^m c_{11} \varepsilon_\theta - {}^m b_{31} {}^m E_z; \quad {}^m D_z = \beta {}^m b_{31} \varepsilon_\theta + {}^m \tilde{\varepsilon}_{33} {}^m E_z; \quad \varepsilon_\theta = w / R; \quad {}^m E_z = -d {}^m \varphi / dz; \quad (2)$$

$${}^m c_{11} = \beta_1 / {}^m s_{11}^E; {}^m \nu_E = -{}^m s_{12}^E / {}^m s_{11}^E; {}^m b_{31} = \beta_2 {}^m d_{31} / {}^m s_{11}^E; {}^m \tilde{\varepsilon}_{33} = {}^m \varepsilon_{33}^T - \beta_3 {}^m d_{31}^2 / {}^m s_{11}^E.$$

Для вязкоупругого материала пассивного слоя h_0 справедливы первое и третье равенства из (2), в которых примем: ${}^m c_{11} = {}^0 c_{11} = \beta_{11} E(\varepsilon'_\theta, \varepsilon''_\theta)$; ${}^m b_{31} = 0$; $E = E' + iE''$ – комплексный модуль, зависящий от амплитуды деформаций; ${}^m \nu_E = \nu = \text{const}$ – коэффициент Пуассона.

В (1), (2) принято: $\beta = 2$; $\beta_1 = \beta_2 = 1 / (1 - {}^m \nu_E)$; $\beta_3 = 2\beta_2$; $\beta_{11} = 1 / (1 - \nu)$ – для сферической оболочки; $\beta = 1$; $\beta_1 = 1 / (1 - {}^m \nu_E^2)$; $\beta_2 = 1 / (1 - {}^m \nu_E)$; $\beta_3 = 2\beta_2$; $\beta_{11} = 1 / (1 - \nu^2)$ – для цилиндрической оболочки; $\beta = \beta_m = \beta_{11} = 1$ – для кольца; ${}^m s_{11}^E, {}^m s_{12}^E, {}^m d_{31}, {}^m \varepsilon_{33}^T$ – упругие податливости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезокерамики; ${}^m E_z$ – нормальная составляющая вектора электрической напряженности.

Интегрирование зависимостей (2) по пакету слоев приводит к таким формулам для окружного усилия и электрической индукции:

$$N_\theta = D_N \varepsilon_\theta - {}^1 b_{31} V_s + {}^2 b_{31} V_a \quad (D_N = D_N^0 + {}^0 c_{11} h_0, D_N^0 = {}^1 c_{11} h_1 + {}^2 c_{11} h_2); \quad (3)$$

$${}^1 D_z = \beta {}^1 b_{31} \varepsilon_\theta + {}^1 \tilde{\varepsilon}_{33} V_s / h_1. \quad (4)$$

Удовлетворение (4) электрическому граничному условию на электродированных поверхностях сенсора дает выражение для электрического потенциала, т.е.

$$V_s = -\beta {}^1 b_{31} h_1 \varepsilon_\theta / {}^1 \tilde{\varepsilon}_{33}. \quad (5)$$

Согласно [1, 6] физическая нелинейность вязкоупругого материала реализуется через зависимость комплексного модуля сдвига $G(J_2^2) = G'(J_2^2) + iG''(J_2^2)$ от второго инварианта интенсивности деформаций J_2^2 . Для рассматриваемых оболочечных элементов имеем равенства

$$J_2^2 = \alpha_1 (\varepsilon_\theta'^2 + \varepsilon_\theta''^2), \quad E(J_2^2) = 2(1 + \nu)G(J_2^2), \quad (6)$$

где $\alpha_1 = (1 + \nu^2) / (1 - \nu^2) / 3$ – для сферической оболочки; $\alpha_1 = [1 + (1 + \nu^2) / (1 - \nu^2)] / 6$ – для цилиндрической оболочки и кольца.

Для активного демпфирования оболочечных элементов используем механизм обратной связи, математически реализуемый линейными зависимостями [3, 8]:

$$V_a = -G_a V_s; \quad V_a = -i\omega G_{as} V_s; \quad V_a = \omega^2 \bar{G}_{as} V_s, \quad (7)$$

в которых управляющие параметры $G_a, G_{as}, \bar{G}_{as}$ вносят вклад в жесткостные, диссипативные или инерционные свойства системы, соответственно. Знак « \leftrightarrow » указывает на противофазное механической нагрузке подведение потенциала V_a к актуатору.

Ограничиваясь стационарным режимом диссипативного разогрева, уравнение для постоянной по толщине пакета слоев температуры рассматриваемых элементов имеем в форме [2]

$$-2\alpha_s \theta + \beta \beta_{11} \omega E''(J_2^2) |\varepsilon_\theta|^2 / 2 = 0, \quad (8)$$

где $|\varepsilon_\theta| = (\varepsilon_\theta'^2 + \varepsilon_\theta''^2)^{1/2}$; $\theta = T - T_0$; α_s – коэффициент теплообмена с внешней средой.

Из уравнений (1), (3) с учетом третьей формулы из (2) и зависимостей (5) – (7) получаем трансцендентное соотношение относительно амплитуды прогиба

$$|w| = \tilde{q} / (\Delta'^2 + \Delta''^2)^{1/2}, \quad (9)$$

в котором

$$\Delta' = \Delta_0 + m_1 E'(J_2^2); \quad \Delta'' = m_1 E''(J_2^2) + \beta \omega G_{as} \gamma_1; \quad m_1 = \beta \beta_{11} h_0 / R; \quad \gamma_2 = \gamma_1^1 b_{31} / {}^2 b_{31};$$

$$\Delta_0 = \beta(D_N^0 / R + G_a \gamma_1 + \gamma_2) - \omega^2(R \rho_* + \beta \bar{G}_{as} \gamma_1); \quad \gamma_1 = {}^2 b_{31} \gamma_2^1 b_{31} h_1 / ({}^1 \tilde{\varepsilon}_{33} R).$$

Решение трансцендентного соотношения (9) зависит от вида представления комплексных составляющих G', G'' модуля сдвига как функции инварианта J_2^2 . Далее примем, что составляющие $G'(J_2^2), G''(J_2^2)$ аппроксимируются линейными функциями [5, 6]

$$G' = a_1 - b_1 J_2^2; \quad G'' = a_2 - b_2 J_2^2. \quad (10)$$

Учитывая (6), (10), из соотношения (9) относительно квадрата амплитуды прогиба $y = |w|^2$ получаем кубическое уравнение

$$A_3 y^3 - A_2 y^2 + A_1 y - \tilde{q}^2 = 0 \quad (11)$$

$$(A_1 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2; \quad A_2 = 2(d_1 \Delta_1 + d_2 \Delta_2); \quad A_3 = d_1^2 + d_2^2; \quad d_{1,2} = m_1 \tilde{E}_{1,2};$$

$$\Delta_1 = \Delta_0 + m_1 E_1; \quad \Delta_2 = \beta(m_1 E_2 + \omega G_{as} \gamma_1); \quad E_{1,2} = \tilde{\nu} a_{1,2}; \quad \tilde{E}_{1,2} = \tilde{\nu} b_{1,2} / R^2; \quad \tilde{\nu} = 2(1 + \nu) \alpha_1).$$

Температуру диссипативного разогрева оболочечных элементов определим из соотношения (8) на основании решения уравнения (11) при учете зависимостей (6), (10) и равенства $|\varepsilon_\theta|^2 = y / R^2$. В случае физически линейного материала амплитуду прогиба и температуру виброразогрева определяем из соотношений (9) и (8) при $E'(J_2^2) = E_1$, $E''(J_2^2) = E_2$.

2. Числовые результаты и их анализ.

В качестве примера численные данные представим для бесконечно длинной цилиндрической оболочки с такими размерами: $R = 0,5$ м, $h_0 = 0,04$ м, $h_1 = h_2 = 0,5 \cdot 10^{-5}$ м. Для физически нелинейного материала пассивного слоя использованы приведенные в [8] экспериментальные результаты зависимости модуля сдвига от интенсивности деформаций, аппроксимированные функциями (10) с такими коэффициентами [1]: $a_1 = 2,41 \cdot 10^5$ Па; $a_2 = 1,81 \cdot 10^5$ Па; $b_1 = 0,537 \cdot 10^7$ Па; $b_2 = 0,38 \cdot 10^7$ Па; $\rho_0 = 1200$ кг/м³; $\nu = 0,31$. Пьезоактивные актуатор и сенсор изготовлены из одной и той же пьезокерамики типа ЦТСТБС – 2 [4] с параметрами $s_{11}^E = 12,5 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $s_{12}^E = -4,62 \cdot 10^{-12}$ м²/Н; $d_{31} = -1,6 \cdot 10^{-10}$ Кл/м; $\varepsilon_{33}^T = 21 \cdot 10^2 \varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\rho_1 = \rho_2 = 7520$ кг/м³.

На рис. 1, 2 для недемпфированной оболочки ($G_a = G_{as} = \bar{G}_{as} = 0$) показаны кривые 1 – 3 зависимости безразмерного прогиба $\tilde{w} = |w| / h_0$ (АЧХ) и температуры диссипативного разогрева θ (ТЧХ) при $\alpha_s = 25$ Вт/(м²×град), рассчитанные с амплитудами нагружения $\tilde{q} = 25, 50, 75$ Н, соответственно. Здесь и далее сплошные кривые рассчитаны при учете физической нелинейности, а штриховые соответствуют линейной задаче. Из рис. 1, 2 видно, что для рассматриваемого вязкоупругого материала учет его физической нелинейности характеризуется сдвигом амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и температурно-частотных характеристик (ТЧХ) в сторону уменьшения частоты линейного резонанса и некоторому повышению прогиба и температуры виброразогрева на частоте нелинейного резонанса. Как показали численные эксперименты, для рассматриваемого материала влияние физической нелинейности проявляется лишь при достаточно высоких амплитудах нагружения. Но при таких амплитудах

уровень диссипативного разогрева даже при весьма больших коэффициентах теплообмена α_s достигает критических значений температуры, при которой происходит тепловое разрушение объекта из-за размягчения вязкоупругого материала или дполяризации пьезокерамики (точка Кюри).

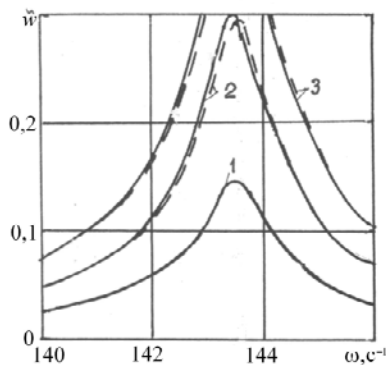


Рис. 1

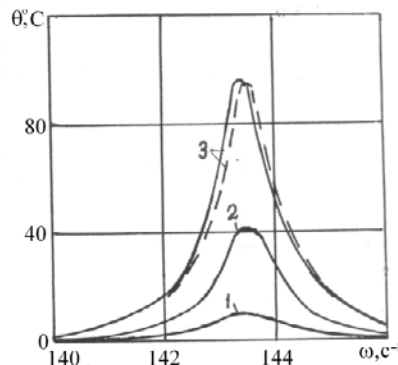


Рис. 2

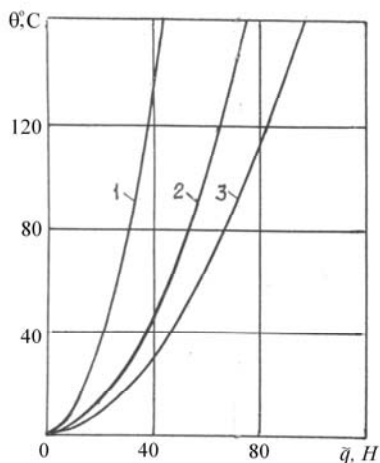


Рис. 3

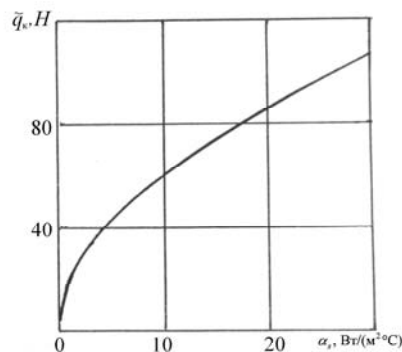


Рис. 4

На рис. 3 кривые 1 – 3 демонстрируют зависимости температуры виброразогрева оболочки на частоте линейного резонанса $\omega = 143,5\text{c}^{-1}$ от амплитуды нагружения \tilde{q} , рассчитанные при коэффициентах теплообмена $\alpha_s = 5; 15; 25\text{Вт}/(\text{м}^2 \times \text{град})$, соответственно. Отметим, что точке Кюри $\theta_{kp} = 160^\circ\text{C}$ для рассматриваемой пьезокерамики на оси абсцисс соответствует значение амплитуды критической нагрузки \tilde{q}_{kp} . Зависимость \tilde{q}_{kp} от коэффициента теплообмена α_s показана на рис. 4. Из результатов расчетов следует, что при температурах виброразогрева $\theta \leq \theta_{kp}$ влияние физической нелинейности пассивного материала на \tilde{q}_{kp} весьма незначительно.

На рис. 5 рассчитанные при $\tilde{q} = 100\text{H}$ графики АЧХ характеризуют эффекты активного гашения колебаний оболочки. Здесь кривая 1^o получена для недемпфированной оболочки. Для случая активного демпфирования с использованием зависимостей обратной связи (7) кривые 1, 2 отвечают коэффициентам управления $G_{as} = 0,25 \cdot 10^{-3}$ и

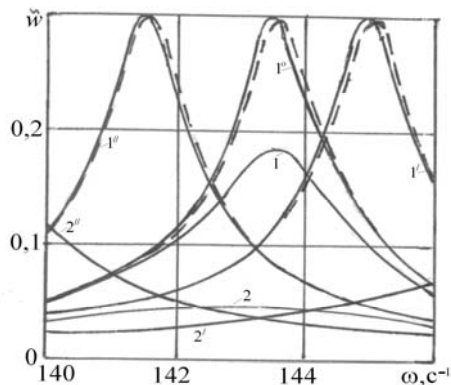


Рис. 5

$0,25 \cdot 10^{-2}$ ($G_a = \bar{G}_{as} = 0$); кривые $1', 2'$ – значениям $G_a = 0,15, 0,50$ ($G_{as} = \bar{G}_{as} = 0$); кривые $1'', 2''$ – значениям $\bar{G}_{as} = 0,1 \cdot 10^{-4}, 0,25 \cdot 10^{-4}$ ($G_a = G_{as} = 0$), соответственно. Сравнение между собой кривых на рис. 5 показывает, что при использовании механизма демпфирования, влияющего на диссипативные свойства оболочки (кривые $1, 2$), увеличение коэффициента управления G_{as} приводит к полному гашению колебаний во всем диапазоне околорезонансных частот нагружения. В то же время при использовании механизмов обратной связи, влияющих на жесткостные (кривые $1', 2'$) или инерционные (кривые $1'', 2''$) характеристики системы, происходит сдвиг резонанса недемпфированной оболочки в сторону увеличения или уменьшения, соответственно. При этом амплитуды прогибов на резонансе демпфированной оболочки не изменяются. Гашение колебаний имеет место на резонансной частоте нагружения недемпфированной оболочки. Отметим также, что графики ТЧХ оболочки качественно повторяют графики АЧХ на рис. 5, а демпфирование оболочки сопровождается снижением температуры разогрева вплоть до полного его отсутствия.

Заключение.

Дана постановка и решение задачи о вынужденных радиальных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве замкнутой сферической, бесконечно длинной цилиндрической оболочек и кольца из физически нелинейного вязкоупругого материала и их демпфирование пьезоэлектрическими сенсором и актуатором. Исследовано влияние зависимости комплексного модуля вязкоупругости от амплитуды деформаций на амплитудно- и температурно-частотные характеристики цилиндрической оболочки и коэффициента теплообмена на критические значения амплитуд механического нагружения, при которых температура достигает значения точки Кюри пьезокерамики. Показана возможность активного демпфирования колебаний оболочки с помощью механизмов обратной связи между электрическими показателем актуатора и показателем сенсора, его первой и второй производными во времени, влияющих на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики рассмотренных элементов.

РЕЗЮМЕ. Досліджено вимушені резонансні осесиметричні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружних фізично нелінійних замкнутої сферичної, нескінченно довгої циліндричної оболонки та кільця з п'єзоелектричними сенсором і актуатором. Досліджено вплив фізичної нелінійності пасивного матеріалу на амплітуду коливань і температуру дисипативного розігріву. Показано можливість активного демпфування вказаних коливань за допомогою сумісного використання п'єзоелектричних сенсорів і актуаторів.

1. Булат А.Ф., Дырда В.Н., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С. Прикладная механика упругонаследственных сред. Т. 4. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. – К.: Наук. думка, 2014. – 476 с.
2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наукова думка, 1986. – 222 с.
3. Карнаухов В.Г., Сичко В.М., Карпенюк А.С. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев трехслойных неупругих прямоугольных пластин // Теорет. и прикл. механика. – 2007. – Вип. 43. – С. 102 – 110.
4. Bolkisev A.M., Karlash V.L., Shulga N.A. Temperature Dependence of the Properties of Piezoelectric Ceramics // Int. Appl. Mech. – 1984. – **20**, N 7. – P. 650 – 653.
5. Gandhi F. Influence of Nonlinear Viscoelastic Material Characterization on Performance of Constrained Layer Damping Treatment // AIAA J. – 2001. – **39**, N 5. – P. 924 – 931.
6. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // J. of Thermal Stresses. – 2005 – **26**, N 6 – 7. – P. 785 – 815.
7. Kirichok I.F. Resonant Axisymmetric Vibration and Vibrational Heating of a Viscoelastic Cylindrical Shell with Piezolayers Subject to Electromechanical Excitation // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P. 567 – 573.
8. Kirichok I.F. Damping the Radial Vibrations and Self-Heating of Viscoelastic Shell Elements with Piezoelectric Sensor and Actuator // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 354 – 358.
9. *Encyclopedia of Smart Materials* / Ed. Schwartz Mel M. – 1 – 2. – New York: John Wiley and Sons. – 2002. – 1176 p.
10. Tzou H.S., Bergman L.A. Dynamic and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 1998. – 400 p.
11. Zhuk Y.A., Guz I.A. Active Damping of the Forced Vibration of a Hinged beam with Piezoelectric Layers, Geometrical and Physical Nonlinearities Taken into Account // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 1. – P. 94 – 108.

Поступила 29.04.2016

Утверждена в печать 30.05.2017