

Е. И. Беспалова, Н. П. Яремченко

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ СИСТЕМ ИЗ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. The unified numerical-analytical technique of analysis of bifurcational and limiting critical values of axisymmetric loads is proposed for the systems composed of coaxial shells of revolution of different geometry and structure. This technique is based on the nonlinear statement of the problem with using the static criterion of stability and the rational reduction of corresponding problems to the linear one-dimensional problems by the meridional variable. This enables to take into account in the continual form the variability of geometric and stiffness characteristics of shells in this direction what is critically important for the composed systems. The testing of technique is carried out in a number of examples, where the stability of composed shells with elements of distinguishing Gauss curvature is studied.

Key words: compound shell of revolution, axisymmetric loads, bifurcational and limiting critical values, numerical-analytical technique.

Введение.

Статическая устойчивость упругих оболочечных систем является одной из важных областей механики деформируемого твердого тела, о чем свидетельствуют многочисленные публикации в виде отдельных статей и обобщающих монографий (например, [12, 16, 19, 23, 24, 25, 29]).

В теоретическом плане проблемы этой области связаны с построением моделей деформирования с учетом новейших свойств современных материалов, разработкой критериев потери устойчивости и реализации их в удобных для использования аналитических или численных методиках. Прикладная сторона теоретических разработок относится, главным образом, к оценке функциональной пригодности конкретных оболочечных конструкций в условиях реально действующих нагрузок.

Большой опыт исследования устойчивости материалов сложной структуры и оболочек из них накоплен в Институте механики НАН Украины и обобщен в ряде фундаментальных монографий [1, 2, 5, 6]. В них представлены разные модели деформирования оболочек, теоретические и экспериментальные результаты определения критических нагрузок, анализ влияния структуры материала, наличия несовершенств, различного рода подкреплений и пр. на статическую устойчивость оболочечных элементов.

Наиболее полно и детально в отечественной и зарубежной литературе исследована устойчивость оболочек простых геометрических форм: пластин, цилиндров, конусов, сферических сегментов при разных видах воздействий силового, температурного, аэродинамического характера, разных граничных условиях и свойствах анизотропных композитных материалов [11, 15, 17, 21 – 23, 26, 28]. Особо следует отметить весьма актуальные в последнее время работы по устойчивости наноструктурных материалов и оценке эффективности их использования в современных конструкциях [7, 25, 29].

Значительно меньше работ посвящено анализу потери устойчивости составных оболочек разной конфигурации. Отчасти это объясняется сложностью исследования, а отчасти тем, что в ряде случаев критические нагрузки для системы в целом можно приближенно оценить по критическим значениям ее отдельного наиболее «слабого»

элемента. Такой подход, естественно, не может претендовать на полноту анализа устойчивости составных систем из разнородных составляющих.

Область статической устойчивости деформированных оболочек предполагает исследование характерных точек диаграммы равновесных состояний, включая как предельные, так и бифуркационные значения. Определение предельных критических нагрузок (верхние критические значения) основано на нелинейной постановке соответствующих задач, а для определения бифуркационных критических нагрузок наиболее часто используются энергетический и статический критерии [3]. Реализация этих критериев применительно к оболочкам связана с нахождением нетривиального решения однородной двумерной линейризованной краевой задачи, что сводится известными методами прикладной математики к проблеме собственных значений для алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом традиционно используются различные варианты метода конечных элементов, вариационно-разностные и проекционные подходы, методы понижения размерности и т.д. [6, 13, 16, 23, 24].

В данной работе для составных оболочек вращения разной геометрии и структуры определяются предельные и бифуркационные критические значения действующих консервативных осесимметричных нагрузок на основе единой численно-аналитической методики решения соответствующих нелинейных краевых задач и задач на собственные значения. Общая идеология этой методики состоит в рациональном сведении исходной задачи к одномерным линейным краевым задачам по меридиану-образующей системы. Такой подход позволяет в континуальном виде учесть изменение всех геометрических и жесткостных характеристик оболочек в выделенном направлении, что особенно важно для составных систем.

В отдельных случаях в работе используется динамический критерий устойчивости, который, как известно, в консервативных задачах дает совпадение с результатами статического критерия. Однако разные алгоритмы реализации этих критериев позволяют получить дополнительное подтверждение достоверности полученных расчетных данных.

1. Постановка задачи. Общая схема ее решения.

Рассмотрим систему, состоящую в общем случае из J сопряженных между собой соосных оболочек вращения разной геометрии. Каждую составную оболочку рассматриваем как отдельный j -ый участок ($j = \overline{1, J}$) единой оболочечной системы, координатная (или срединная, в частном случае) поверхность которой образована вращением некоторой однозначной кусочно-гладкой плоской кривой вокруг прямолинейной оси Oz (рис. 1). Положение произвольной точки этой поверхности определяется в ортогональной сопряженной системе координат (α, θ) , где $\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\}$ ($j = \overline{1, J}$)

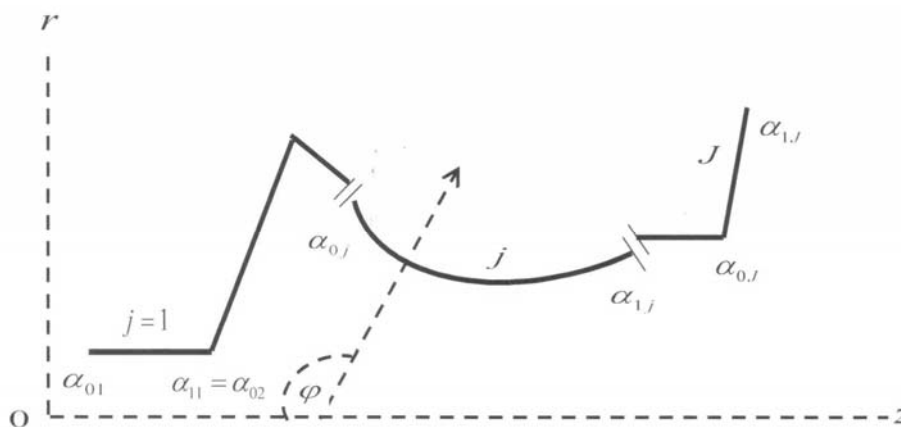


Рис. 1

изменяется по меридиану-образующей, а $\theta \in [0, 2\pi]$ – центральный угол сечения $z = \text{const}$. Координатная поверхность $\gamma = 0$, как некоторая исходная поверхность отсчета по толщине оболочек, выбирается неформальным образом, а переменная γ отсчитывается по нормали к этой поверхности.

Оболочки по толщине γ могут быть однослойными с непрерывной неоднородностью упругих свойств по толщине или состоять из M слоев постоянной или переменной толщины (дискретно неоднородные) при условии, что смежные m -ый и $m+1$ -й слои контактируют между собой по поверхности $\gamma = \gamma_m(\alpha)$ ($m = \overline{1, M-1}$) без отрыва и проскальзывания. Принимаем также, что материалы слоев работают в упругой стадии деформирования во всем диапазоне действующих нагрузок и могут быть изотропными или ортотропными, т.е. иметь три плоскости упругой симметрии, ортогональные направлениям $\alpha = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$.

На торцах оболочечной системы $\alpha = \alpha_{01}$ и $\alpha = \alpha_{1J}$ принимаются любые физически непротиворечивые граничные условия, а на линиях сопряжения $\alpha_{1j} = \alpha_{0j+1}$ ($j = \overline{1, J-1}$) двух смежных j -го и $j+1$ -го участков формулируются условия равновесия статических, а также условия неразрывности кинематических характеристик напряженного состояния оболочек в общей системе координат (r, θ, z) .

Предполагаем, что в пределах каждого отдельного j -го участка системы ($j = \overline{1, J}$), т.е. для каждой составляющей оболочки, ее геометрические параметры, толщины и физико-механические свойства материала задаются гладкими функциями переменной α_j .

Оболочки находятся в поле консервативных осесимметричных температурных и (или) силовых нагрузок разного вида: распределенных по меридиану, сосредоточенных на торцевых контурах или в отдельных сечениях $z = \text{const}$.

Для таких оболочечных систем в работе рассмотрены два класса задач:

- определение напряженно-деформированного состояния (НДС) в упругой докритической стадии деформирования вплоть до значений предельных критических нагрузок;
- определение бифуркационных критических нагрузок и форм потери устойчивости по статическому критерию, когда наряду с исходной устойчивой осесимметричной формой возникает смежная с ней неосесимметричная, также устойчивая форма равновесия [3].

Для решения этих задач используется геометрически нелинейная теория среднего изгиба в рамках предположений классической модели Кирхгофа – Лява с учетом температурных воздействий по гипотезе Дюгамеля – Неймана. В качестве основных неизвестных выбрана вектор-функция $\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta)\} = \left\{ \begin{matrix} \bar{Q} \\ \bar{U} \end{matrix} \right\}$ ($n = \overline{1, 8}$) со следующими

$$\text{статическими} - \quad \bar{Q} = \{N_n\} = \{N_\alpha, \hat{S}_\alpha, \hat{Q}_\alpha, M_\alpha\}^T \quad (n = \overline{1, 4}) \quad (1)$$

$$\text{и кинематическими} - \quad \bar{U} = \{N_n\} = \{u, v, w, \vartheta_\alpha\}^T \quad (n = \overline{5, 8}) \quad (2)$$

характеристиками НДС оболочек.

Здесь $N_\alpha, \hat{S}_\alpha = N_{\alpha\theta} + k_\theta H, \hat{Q}_\alpha = Q_\alpha + (\partial H)/(r\partial\theta), M_\alpha$ и ϑ_α , – соответственно, тангенциальное, приведенное сдвигающее усилие, приведенное перерезывающее усилие, изгибающий момент и угол поворота нормального элемента в сечении $\theta = \text{const}$; u, v, w – перемещения точек координатной поверхности в направлениях α, θ, γ , соответственно; $N_{\alpha\theta}, Q_\alpha, H$ – сдвигающее, перерезывающее усилия и крутящий момент в этом же сечении; $r = r(\alpha)$ и $k_\theta = k_\theta(\alpha)$ – расстояние текущей точки координатной поверхности от оси вращения Oz и кривизна координатной линии $\alpha = \text{const}$.

Соответствующая нелинейная двумерная краевая задача относительно выбранных неизвестных $\bar{N} = \{N_n(\alpha, \theta)\} = \begin{Bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{U} \end{Bmatrix}$ ($n = \overline{1, 8}$) может быть условно записана в следующем векторно-матричном виде [4]:

$$\frac{\partial \bar{N}}{A \partial \alpha} = L \bar{N} + \bar{G} + \bar{q}^0, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J}), \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (3)$$

$$S_{1j} \bar{N} = S_{0j+1} \bar{N} + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_j = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (4)$$

$$B_{01} \bar{N} = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (5)$$

$$B_{1J} \bar{N} = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J}; \quad (6)$$

$$\bar{N}(\alpha, \theta + 2\pi) = \bar{N}(\alpha, \theta), \quad (7)$$

где $L = \sum_{s=0}^4 R_s [(\partial^s \bar{N}) / \partial \theta^s]$ – матричный дифференциальный оператор четвертого порядка по переменной θ , построенный по основным соотношениям принятой модели деформирования; A – коэффициент Ляме по координате α выбранной системы координат $\alpha \theta \gamma$; компоненты вектора $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$ – квадратичные функции компонент вектора \bar{N} , соответствующие геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении; $S_{1j} = \{S_{ni}^{1j}\}$, $S_{0j+1} = \{S_{ni}^{0j+1}\}$ – матрицы, формулирующие условия сопряжения в сечении $\alpha = \alpha_j$ ($j = \overline{1, J-1}$) как условия равновесия статических (1) и равенство кинематических (2) факторов НДС в общей системе координат $r0z$; $B_{01} = \{b_{ni}^{01}\}$, $B_{1J} = \{b_{ni}^{1J}\}$ – матрицы задания граничных условий на контурах $\alpha = \alpha_{01}$ и $\alpha = \alpha_{1J}$, соответственно, ($n, i = \overline{1, 8}$); $\bar{q}^0 = \{q_n^0\}$, $\bar{F}_j^0 = \{f_{nj}^0\}$ и $\bar{b}_{01}^0 = \{b_{01n}^0\}$, $\bar{b}_{1J}^0 = \{b_{1Jn}^0\}$ – векторы, характеризующие осесимметричные распределенные нагрузки и температурные поля, сосредоточенные усилия – моменты в сечении $\alpha = \alpha_j$ ($j = \overline{1, J-1}$) и контурные воздействия при $\alpha = \alpha_{01}$, $\alpha = \alpha_{1J}$ (выражения для элементов матриц $R_s = \{r_{ni}^s(\alpha)\}$ и компонент вектора $\bar{G} = \{g_n(\alpha)\}$ приведены в [4]).

При исследовании устойчивости таких систем рассматриваем воздействия в одной или нескольких компонентах векторов \bar{q}^0 , \bar{F}_j^0 , \bar{b}_{01}^0 , \bar{b}_{1J}^0 , изменение которых пропорционально одному параметру λ (комбинация разных нагрузок связана с построением области устойчивости соответствующей размерности).

Для определения предельных и бифуркационных критических значений действующих нагрузок из решения задачи в общей нелинейной постановке с использованием статического критерия устойчивости принимается физически обоснованное допущение о малости отклонения бифуркационной формы равновесия \bar{N}^{bif} от исходной осесимметричной формы \bar{N}^0 . Это допущение позволяет приближенно принять, что

$$\bar{N} \approx \bar{N}^0 + \bar{N}^{bif}, \quad \bar{N}^{bif} \ll \bar{N}^0.$$

Соответственно, задачу (3) – (7) можно приближенно свести к таким задачам:

– задача о докритическом состоянии оболочек при заданных осесимметричных нагрузках, которая является одномерной нелинейной краевой задачей и формулируется относительно вектор-функции $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha)\}$, т.е.

$$\frac{d\bar{N}^0}{Ad\alpha} = L^0 \bar{N}^0 + \bar{G}(\alpha, \bar{N}^0, \dots) + \bar{q}^0, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j}) \ (j = \overline{1, J}); \quad (8)$$

$$S_{1j} \bar{N}^0 = S_{0j+1} \bar{N}^0 + \bar{F}_j^0, \quad \alpha = \alpha_j \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (9)$$

$$B_{01} \bar{N} = \bar{b}_{01}^0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (10)$$

$$B_{1J} \bar{N} = \bar{b}_{1J}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (11)$$

(L^0 – матричный дифференциальный оператор нулевого порядка);

– задача о малых отклонениях от исходной формы равновесия, которая получена в результате линеаризации исходной задачи (3) – (7) относительно вектор-функции $\bar{N}^{bif} = \{N_n^{bif}(\alpha, \theta)\}$ и представляет собой двумерную однородную краевую задачу (статический критерий):

$$\frac{\partial \bar{N}^{bif}}{A \partial \alpha} = \tilde{L} \bar{N}^{bif}, \quad \alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \quad (j = \overline{1, J}), \theta \in [0, 2\pi]; \quad (12)$$

$$S_{1j} \bar{N}^{bif} = S_{0j+1} \bar{N}^{bif}, \quad \alpha = \alpha_j = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (13)$$

$$B_{01} \bar{N}^{bif} = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (14)$$

$$B_{1J} \bar{N}^{bif} = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}; \quad (15)$$

$$\bar{N}^{bif}(\alpha, \theta + 2\pi) = \bar{N}^{bif}(\alpha, \theta) \quad (16)$$

(здесь $\tilde{L} = L + (\partial \bar{G}) / (\partial \bar{N}^0)$ – дифференциальный матричный оператор, содержащий в качестве параметрических членов компоненты вектор-функции докритического НДС $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha, \lambda)\}$, как функции заданной величины нагружения λ).

Для решения одномерной нелинейной краевой задачи (8) – (11) используем процедуру линеаризации в форме Ньютона – Канторовича – Рафсона (метод квазилинеаризации [14]) в сочетании с методом ортогональной прогонки, алгоритм которой изложен в [4].

Представим рассматриваемую задачу (8) – (11) в следующей скалярной форме относительно компонент вектор-функции $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha, \lambda)\} \ (n = \overline{1, 8})$:

$$\frac{dN_n^0}{Ad\alpha} = \sum_{l=1,8} a_{nl}(\alpha) N_l^0 + \sum_{l=1,8} \sum_{i=1,8} d_{nli}(\alpha) N_l^0 N_i^0 + q_n^0(\alpha) \equiv y_n(\alpha, N_1^0, N_2^0, \dots, N_8^0), \quad (17)$$

$$\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} \ (j = \overline{1, J}; n = \overline{1, 8});$$

$$\sum_{l=1,8} s_{nl}^{1j} N_l^0 = \sum_{l=1,8} s_{nl}^{0j+1} N_l^0 + f_n^0, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J}; n = \overline{1, 8}); \quad (18)$$

$$\sum_{l=1,8} b_{nl}^{01} N_l^0 = b_{01n}^0, \quad \alpha = \alpha_{01} \quad (n = \overline{1, 4}); \quad (19)$$

$$\sum_{l=1,8} b_{nl}^{1J} N_l^0 = b_{1Jn}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (n = \overline{1, 4}). \quad (20)$$

Здесь $a_{nl}(\alpha)$ и $d_{nli}(\alpha)$ – составляющие линейной и нелинейной частей уравнения (8), выражения для которых приведены в [4].

Применительно к задаче (17) – (20) указанная процедура линеаризации сводится к следующему итерационному процессу (параметр $m = 1, 2, \dots$):

$$\frac{dN_n^{0(m)}}{Ad\alpha} = y_n(\alpha, N_1^{0(m-1)}, N_2^{0(m-1)}, \dots, N_8^{0(m-1)}) + \sum_{l=1,8} \frac{\partial g_n}{\partial N_l^0} (N_l^{0(m)} - N_l^{0(m-1)}),$$

$$\alpha = \{\alpha_j \in (\alpha_{0j}, \alpha_{1j})\} (j = \overline{1, J}; n = \overline{1, 8}); \quad (21)$$

$$\sum_{l=1,8} s_{nl}^{1j} N_l^{0(m)} = \sum_{l=1,8} s_{nl}^{0j+1} N_l^{0(m)} + f_{nj}^0, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}; n = \overline{1, 8}); \quad (22)$$

$$\sum_{l=1,8} b_{nl}^{01} N_l^{0(m)} = b_{01n}^0, \quad \alpha = \alpha_{01} \quad (n = \overline{1, 4}); \quad (23)$$

$$\sum_{l=1,8} b_{nl}^{1J} N_l^{0(m)} = b_{1Jn}^0, \quad \alpha = \alpha_{1J} \quad (n = \overline{1, 4}), \quad (24)$$

где $(\partial g_n)/(\partial N_l^0)$ – элементы матрицы Якоби, вычисляемые при $N_l^0 = N_l^{0(m-1)}$.

Для решения линейных краевых задач (21) – (24) на каждом шаге приближения m ($m = 1, 2, \dots$) используем метод ортогональной прогонки.

Представленный процесс квазилинеаризации в сочетании с методом ортогональной прогонки характеризуется рядом факторов, обуславливающих его эффективность. Это, в частности, квадратичная сходимость последовательных приближений, широта области сходимости, совпадающая в данном классе задач с докритической стадией деформирования вплоть до значений критических нагрузок, простота выбора начального приближения, точность решения и т.д.

Таким образом, докритическое НДС по постановке задачи и методике ее решения определяется с учетом его моментности, неоднородности и нелинейности.

Вычисление бифуркационных критических нагрузок λ_{cr} сводится к определению нетривиального решения линеаризованной двумерной однородной краевой задачи (12) – (16) с параметрическими членами в виде компонент докритического НДС $\bar{N}^0 = \{N_n^0(\alpha, \lambda)\}$.

В силу условий периодичности (16) представим искомое решение $\bar{N}^{bif} = \{N_n^{bif}(\alpha, \theta, \lambda)\}$ ($n = \overline{1, 8}$) в виде следующего ряда Фурье по тригонометрическим функциям окружной координаты θ :

$$N_n^{bif}(\alpha, \theta, \lambda) = \sum_{k=0,1,2,\dots} N_{nk}^{bif}(\alpha, \lambda) \begin{bmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где параметр k и функциональные коэффициенты $N_{nk}^{bif}(\alpha, \lambda)$ определяют форму потери устойчивости, соответственно, в окружном и меридиальном направлениях; выражения в квадратных скобках означают, что функции \hat{S}_α и ν представляются рядами по $\sin k\theta$, а остальные – по $\cos k\theta$. Тогда задача (12) – (16) для каждого номера гармоники k в (25) сводится к однородной одномерной краевой задаче относительно вектор-функций $\bar{N}_k^{bif} = \{N_{nk}^{bif}(\alpha, \lambda)\}$ ($n = \overline{1, 8}$), т.е.

$$\frac{d\bar{N}_k^{bif}}{Ad\alpha} = \tilde{L}_k \bar{N}_k^{bif}, \quad \alpha \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \quad (j = \overline{1, J}); \quad (26)$$

$$S_{1j} \bar{N}_k^{bif} = S_{0j+1} \bar{N}_k^{bif}, \quad \alpha = \alpha_{1j} = \alpha_{0j+1} \quad (j = \overline{1, J-1}); \quad (27)$$

$$B_{01} \bar{N}_k^{bif} = 0, \quad \alpha = \alpha_{01}; \quad (28)$$

$$B_{1J} \bar{N}_k^{bif} = 0, \quad \alpha = \alpha_{1J}, \quad (29)$$

где $\tilde{L}_k = \{\tilde{l}_{ij}^k(\alpha, k, \bar{N}^0(\lambda))\}$ – матричный алгебраический оператор, полученный из дифференциального оператора \tilde{L} с учетом представления (25).

Для определения параметра критической нагрузки λ_{cr} и соответствующей ему формы потери устойчивости оболочечной системы при фиксированном k использованы методы пошагового поиска ($\Delta(\lambda)$ – метод) [8] и ортогональной прогонки. Суть $\Delta(\lambda)$ -метода состоит в определении таких значений $\lambda = \lambda_{cr}$, при которых однородная краевая задача (26) – (29) имеет нетривиальное решение $\bar{N}_k(\alpha, \lambda_{cr}) \neq 0$. Искомое решение этой задачи (согласно методу ортогональной прогонки) принимаем в виде следующей линейной комбинации (индекс k на этом этапе изложения опускаем):

$$\bar{N}^{bif}(\alpha, \lambda) = \sum_{m=1,4} C_m \bar{Z}_m(\alpha, \lambda),$$

где $\bar{Z}_m(\alpha, \lambda)$ ($m = \overline{1,4}$) – последовательно ортонормированные векторы, представляющие собой решения задач Коши для системы (26), (27) с линейно независимыми векторами начальных условий, удовлетворяющих (28) при $\alpha = \alpha_{01}$. Определение нетривиальных значений C_m ($m = \overline{1,4}$) из системы однородных условий (29) при $\alpha = \alpha_{1j}$ сводится к определению нулей характеристического детерминанта

$$\Delta(\lambda) = \det \left(\sum_{m=1,4} B_{1j} Z_m(\alpha_{1j}, \lambda) \right) = 0. \quad (30)$$

Алгоритм получения нулей выражения (30) реализован стандартным образом: путем перебора значений λ определяем два последовательных значения λ_v и λ_{v+1} , удовлетворяющих условию

$$\Delta(\lambda_v) \Delta(\lambda_{v+1}) \leq 0, \quad (31)$$

а затем с помощью известных интерполяционных приемов, в частности, способа половинного деления, интервал $(\lambda_v, \lambda_{v+1})$ стягиваем до получения $\lambda_{cr} \in (\lambda_v, \lambda_{v+1})$ с заданной точностью.

В целом, построение диаграммы равновесных состояний оболочечной системы с определением бифуркационных и предельных значений действующих нагрузок проводится пошагово ($i = 1, 2, \dots$). Промежуточный i -ый шаг процесса реализуется для значения параметра нагрузки λ_i из некоторой возрастающей последовательности $\lambda_i = \lambda_{i-1} + d_i$ ($d_i > 0$ – шаг нагружения). Значение предельной критической нагрузки λ_{cr}^{\lim} принадлежит отрезку $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ ($\lambda_{cr}^{\lim} \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$), если при λ_{i-1} – итерационный процесс (21) – (24) решения нелинейной задачи (17) – (20) сходится монотонно, а при λ_i – расходится. Значения критической бифуркационной нагрузки λ_{cr}^{bif} принадлежит отрезку $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ ($\lambda_{cr}^{bif} \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$), если при монотонной сходимости итерационного процесса (21) – (24) для $\lambda = \lambda_{i-1}$ и $\lambda = \lambda_i$ условие (31) выполняется для какого-либо значения $k = k^{bif}$. Уточнение значений λ_{cr}^{\lim} и λ_{cr}^{bif} осуществляется путем дробления шага d_i до получения их значений с требуемой точностью. Если при монотонной сходимости итерационного процесса (21) – (24) для $\lambda = \lambda_{i-1}$ и $\lambda = \lambda_i$ условие (31) не выполняется, то осуществляем переход к следующему $(i+1)$ -му шагу поиска для интервала $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ с повторением всех описанных процедур.

Как отмечено выше, в отдельных случаях для подтверждения достоверности полученных критических значений привлекается динамический критерий устойчивости [3].

Суть этого критерия состоит в следующем: за критическое принимаем такое значение нагрузки $\lambda = \lambda_{cr}$, при котором частота колебаний предварительно напряженной оболочки равна нулю. В рассматриваемых консервативных задачах, как известно, применение статического и динамического критериев идентично с позиции механики деформируемых систем. Однако привлечение разных методик для их реализации может служить дополнительным основанием для оценки достоверности получаемых результатов. В данной работе для определения частот предварительно нагруженных оболочечных систем использован метод последовательных приближений в варианте обратной итерации совместно с методом ортогональной прогонки. Этот алгоритм подробно изложен в работах [4, 18].

2. Тестирование методики.

При тестировании представленной численно-аналитической методики используем обычный прием прикладной математики: сравнение с результатами, полученными другими методами аналитически, численно или экспериментально для отдельных частных задач рассмотренного класса (эти данные приведены в последних столбцах таблиц 1 – 3). Здесь представлены 3 тестовые задачи, заимствованные из работ [6, 9, 10], для изотропных и ортотропных оболочек разных геометрических форм и различных условий на торцевых контурах. При этом по данной методике приводим значения предельных и бифуркационных критических нагрузок, полученных по докритическому состоянию в нелинейной постановке (I), по статическому критерию устойчивости (II), по динамическому критерию при расчете докритического состояния в линейной (III, а) и нелинейной (III, б) постановках.

Задача 1. Рассмотрим весьма пологий сферический купол длины l , радиуса R , постоянной толщины h из изотропного материала и некоторых значениях параметра кривизны $k^* = a^2/Rh$ (a – радиус опорного контура). В центре оболочки принимаем условия симметрии, а по окружности основания – условия жесткого защемления. Оболочка находится под действием равномерной нормальной нагрузки интенсивности q , направленной к центру кривизны. Расчет предельной критической нагрузки проводим при следующих исходных данных [9]: $l = 20d$, $l/h = 1/20$, $h/R = 1/100$, $E = E_0$, $\nu = 0,3$; $k^* = 4; 6; 8$ (d – характерный линейный размер).

Значения параметра предельной критической нагрузки $q_{cr}^{lim*} = (q_{cr} a^4)/(Eh^4)$, соответствующие прощелкиванию, полученные по предложенному подходу (I, II, III, б) и по результатам работы [9], где использован метод конечных разностей повышенной точности, представлены в табл. 1.

Таблица 1

k^*	$q_{cr}^{lim*} = (q_{cr} a^4)/(Eh^4)$			
	Методики расчета			
	I	II	III, б	[9]
4	11,31	11,23	11,52	11,63
6	25,13	24,48		24,75
8	51,20	48,90	51,37	49,69

Как видно из табл. 1, различия в значениях приведенных критических частот имеют место в пределах 3%.

Задача 2. Рассмотрим упругую систему, состоящую из двух сопряженных оболочек вращения разной геометрии: 1-ый участок – полусфера, 2-ой участок – цилиндр, имеющие внутренний радиус R , толщину стенок h , длины сферического и цилиндрического участков, соответственно, l_1 и l_2 . В центре сферической оболочки принимаем усло-

вия симметрии, а торец цилиндрической части жестко зашпелен. Оболочка изготовлена комбинированным методом укладки и намотки однонаправленных слоев стеклоарматуры в соотношении 1:2 и находится под действием внешней равномерной нормальной нагрузки интенсивности q . Определение бифуркационной критической нагрузки q_{cr}^{bif} проведено при следующих исходных данных [6]: $R = 80$ мм, $h = 0,66$ мм, $l_1 = 125,66$ мм; $l_2 = 200$ мм; $E_1 = 0,392 \cdot 10^5$ МПа; $E_2 = 0,686 \cdot 10^4$ МПа; $G_{12} = 0,3626 \times 10^4$ МПа; $\nu_1 = 0,214$; $\nu_2 = 0,0375$.

В работе [6] представлены результаты экспериментальных исследований устойчивости такого класса стеклопластиковых сферо-цилиндрических оболочек. Расчеты бифуркационной критической нагрузки q_{cr}^{bif} по разработанной методике (II, III, а, III, б) приведены в табл. 2 и соответствуют 6-ти волнам выпучивания в окружном направлении.

Таблица 2

Методики расчета	II	III, а	III, б	[6]
q_{cr}^{bif} , КПа	42,34	40,00	40,30	(40,20 – 48,04)

Полученные расчетные значения критической нагрузки q_{cr}^{bif} имеют место в диапазоне приведенных экспериментальных данных [6].

Рассмотрен также отдельный участок сферо-цилиндрической оболочки – цилиндр. Для этого участка расчет бифуркационных критических значений проведен при условии наличия торцевого шпангоута в зоне сопряжения цилиндра с полусферой. Значение критической нагрузки q_{cr}^{bif} при 6-ти волнах выпучивания в окружном направлении, полученное по разработанному подходу (III, б), равно 41,91 КПа, а по результатам работы [6] с использованием энергетического метода – 42,16 КПа. Различие в полученных величинах не превышает 2%.

Задача 3. Рассмотрена усеченная изотропная коническая оболочка длины l , постоянной толщины h с углом наклона α при основании. Оболочка жестко зашпелена по меньшему основанию, а по большему – шарнирно оперта и находится под действием внешней равномерной нормальной нагрузки интенсивности q . Определение бифуркационной критической нагрузки проведено при следующих исходных данных [10]: $l = 150d$; $l/h = 1/150$; $\alpha = 60^\circ$; $E = E_0$; $\nu = 0,3$.

Значения параметра бифуркационной критической нагрузки $q_{cr}^{bif*} = q_{cr} \cdot 10^5 / E_0$, соответствующие 6 волнам в окружном направлении, полученные по разработанному подходу (II, III, а, III, б) и по результатам работы [10] методом конечных разностей представлены в табл. 3.

Таблица 3

Методики расчета	II	III, а	III, б	[10]
$q_{cr}^{bif*} = q_{cr} \cdot 10^5 / E_0$	1,319	1,316	1,342	1,341

Представленные примеры тестирования предложенной методики показали, что различия полученных результатов по сравнению с данными, полученными другими методами, имеют место в пределах погрешности классической модели оболочек. Это свидетельствует о правомерности ее применения при исследовании статической устойчивости данного класса оболочечных конструкций.

3. Анализ устойчивости составной оболочечной системы.

Ниже разработанная численно-аналитическая методика расчета критических значений воздействующих нагрузок использована для анализа устойчивости составной системы из оболочек разной гауссовой кривизны.

Рассмотрена устойчивость системы, состоящей из следующих трех оболочек вращения (рис. 2): цилиндрической радиуса r_c , длины l_c (С), торозэллиптической отрицательной кривизны с полуосями эллипса a, b и расстоянием r_{01} его центра от оси вращения Oz (E^-), торозэллиптической положительной кривизны с такими же полуосями и расстоянием r_{02} центра эллипса от оси

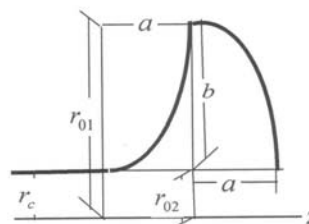


Рис. 2

вращения (E^+). Все оболочки имеют одинаковую толщину h , изготовлены из изотропного материала майлара (E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона), а оба торцевые контура жестко закреплены. Система $C-E^-E^+$ находится в осесимметричном силовом поле внешнего нормального воздействия интенсивности q .

На примере этой системы проиллюстрируем взаимосвязь всех ее элементов при определении предельных $\lambda = q_{cr}^{lim}$ и бифуркационных $\lambda = q_{cr}^{bif}$ критических значений заданной нагрузки в зависимости от параметра эллиптичности $\beta = a/b = 0,5; 1,0; 2,0$ элементов E^- и E^+ ($b = fixed$).

Решение задачи представим для таких исходных данных: $r_c = 0,1 м$, $l_c / r_c = 1,0$; $b / r_c = 2,0$; $a / b = 0,5 - 2,0$; $r_{01} / r_c = 3,0$; $r_{02} / r_c = 1,0$; $h / r_c = 0,01$; $E = 5,0285 ГПа$; $\mu = 0,33$; $\alpha \in [0, \pi/2]$ (α – центральный угол обеих эллиптических оболочек).

Картина НДС системы вблизи предельной критической нагрузки $q / q_{cr}^{lim} = 0,93$ представлена на рис. 3, а, б в виде распределения прогиба $w_* = w \cdot 10$, м и окружного усилия $N_{*\theta} = N_\theta \cdot 2 \cdot 10^6$, Н/м по меридиану-образующей $s_* = s \cdot 10^2$, м, соответственно, для $\beta = 1,0$ (толстые линии отвечают результатам нелинейной постановки задачи, тонкие линии – линейной, вертикальными прямыми нанесены нормальные сечения $s = const$ сопрягаемых элементов системы). Качественный характер приведенных зависимостей, полученных по линейной; и нелинейной постановкам, сохраняется как для прогибов, так и для напряжений, а количественно максимальные значения этих функций различаются более, чем в два раза.

Аналогичная картина НДС вблизи бифуркационной критической нагрузки $q / q_{cr}^{bif} = 0,99$ в виде распределения амплитудных значений прогиба $w_* = w \cdot 50$, м и меридионального $N_{*s} = N_s \cdot 4 \cdot 10^7$, Н/м и окружного $N_{*\theta} = N_\theta \cdot 4 \cdot 10^7$, Н/м усилий представлена на рис. 4, а, б для третьего элемента системы – торозэллипса положительной кривизны E^+ . На двух остальных элементах системы значения этих функции более, чем на два порядка, ниже. Таким образом, наибольшие сжимающие напряжения и прогибы при внешней нагрузке концентрируются в зоне эллиптической оболочки положительной кривизны E^+ , так что она является наиболее опасным звеном с позиции устойчивости всей системы.

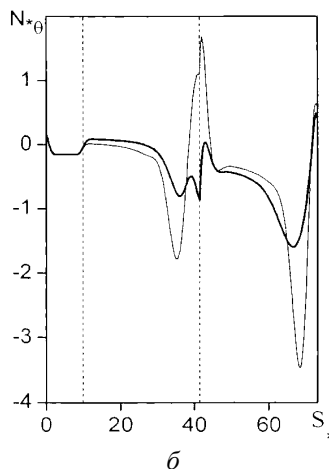
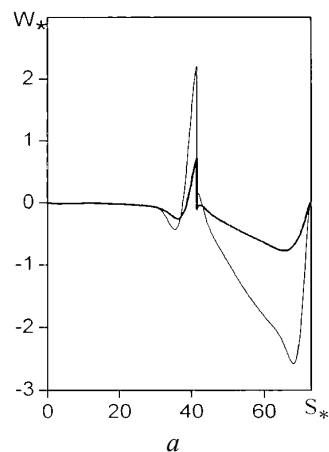


Рис. 3

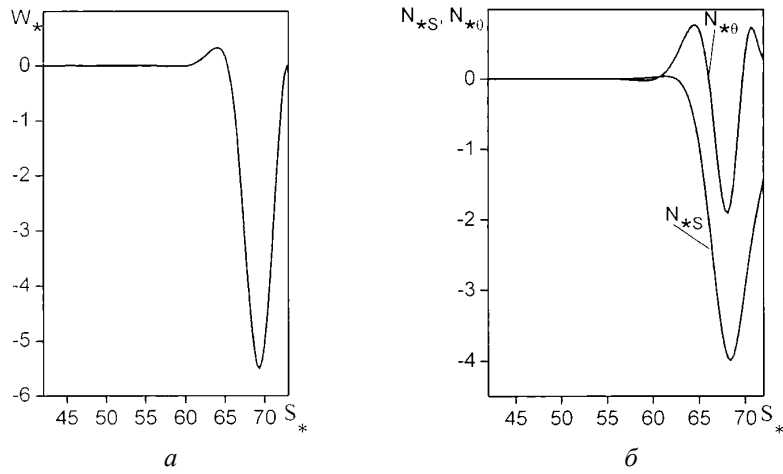


Рис. 4

Оценим возможность определения критических нагрузок системы в целом $C - E^- - E^+$ по этому отдельному, наиболее опасному элементу. Для сравнения в табл. 4, 5 для $\beta \in [0,5 - 2,0]$ приведены величины предельной (табл. 4) и бифуркационной (табл. 5) критических нагрузок для системы $C - E^- - E^+$ и отдельной оболочки E^+ при условии ее шарнирного опирания в сечении сопряжения с оболочкой E^- ($k; m$ – характеристики формы потери устойчивости в окружном и меридиональном направлениях).

Таблица 4

$\beta = a/b$	$q_{cr}^{lim}, \text{КПа}; m;$			
	0,5	1,0	1,5	2,0
$C - E^- - E^+$	25,4; $m = 4$	32,2; $m = 2$;	41,9; $m = 2$;	49,8; $m = 2$;
E^+	9,43; $m = 0$	15,2 $m = 0$	21,6 $m = 0$	28,4 $m = 0$

Таблица 5

$\beta = a/b$	$q_{cr}^{bif}, \text{КПа}; k; m;$			
	0,5	1,0	1,5	2,0
$C - E^- - E^+$	2,26; $k = 9; m = 7$;	4,74; $k = 11; m = 5$;	7,32; $k = 13; m = 5$;	10,05; $k = 14; m = 4$;
E^+	1,19; $k = 10; m = 4$;	2,55; $k = 12; m = 3$;	3,98; $k = 14; m = 2$;	5,42; $k = 15; m = 2$;

Как следует из этих таблиц, для системы в целом и ее элемента E^+ тенденция зависимости обеих критических нагрузок с ростом параметра эллиптичности β сохраняется. Во всех случаях эта зависимость представлена возрастающими функциями, причем с ростом β количество волн выпучивания в окружном направлении (k) увеличивается, а число перемен знака по меридиану (m) уменьшается. Сопоставляя значения q_{cr}^{lim} и q_{cr}^{bif} для $C - E^- - E^+$ и E^+ видим, что для системы в целом критическое значение предельной нагрузки в 1,7 – 2,5 раза, а бифуркационной, примерно, вдвое ($\approx 1,8$) превышает соответствующие значения для оболочки E^+ . Таким образом, устойчивость системы обусловлена взаимодействием всех ее составляющих, а не отдельного, пусть даже наиболее неустойчивого, элемента. При внешнем нормальном давлении элементы $C - E^-$ в данной системе играют стабилизирующую роль.

Заметим, что бифуркационная потеря устойчивости для всех случаев конфигурации системы наступает гораздо ниже предельной и для системы в целом, и для отдельного ее элемента. При этом значения критических нагрузок могут различаться более, чем на порядок, например, при $\beta = 0,5$.

Заключение.

Предложена единая численно-аналитическая методика определения критических бифуркационных и предельных нагрузок для сопрягаемых оболочек вращения разной геометрии и структуры на основе общей нелинейной постановки задачи с использованием статического критерия устойчивости. Идеология методики состоит в рациональном сведении соответствующих математических задач к одномерным линейным краевым задачам по меридиональной переменной. Это позволяет в континуальном виде учесть изменение геометрических и жесткостных характеристик оболочек в данном направлении, что особенно важно для составных систем.

Тестирование методики на ряде частных задач, решение которых получено другими методами, подтверждает правомерность ее использования в данном классе оболочек.

Проведено исследование устойчивости составной системы с элементами разной гауссовой кривизны. Показана взаимосвязь всех ее составляющих при определении критических бифуркационных и предельных нагрузок.

РЕЗЮМЕ. Для систем, складених з співвісних оболонок обертання різної геометрії і структури, запропонована єдина чисельно-аналітична методика розрахунку біфуркаційних і граничних критичних значень осесиметричних навантажень на основі нелінійної постановки задачі з використанням статичного критерію стійкості. Методика базується на раціональному зведенні відповідних задач до лінійних одновимірних задач за меридіональною змінною. Це дозволяє в континуальному вигляді врахувати змінність геометричних і жорсткісних характеристик оболонок в цьому напрямку, що особливо важливо для складених систем. На ряді числових прикладів проведено тестування методики і досліджено стійкість складених оболонок з елементами різної гауссової кривизни.

1. *Амиро И.Я., Грачев О.А., Заруцкий В.А. и др.* Устойчивость ребристых оболочек вращения. – К.: Наук. думка, 1987. – 160 с.
2. *Ванин Г.А., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф.* Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.
3. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
4. *Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
5. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 272 с.
6. *Гузь А.Н., Бабич И.Ю., Бабич Д.В.* Устойчивость элементов конструкций. – К.: «А. С. К.», 2001. – 375 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т. 10).
7. *Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я.* Введение в механику нанокompозитов. – К.: Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, 2010. – 398 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 704 с.
9. *Корнишин М.С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М.: Наука, 1964. – 191 с.
10. *Прочность, устойчивость, колебания.* Справочник в 3-х томах / Под ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Том 3. – М.: Машиностроение. – 1988. – 567 с.
11. *Al-Qablan I.I.* Semi-analytical buckling analysis of stiffened sandwich plates // J. Appl. Sci. – 2010. – N 10. – P. 2978 – 2988.
12. *Bagchi A.* Linear and Nonlinear Buckling of Thin Shells of Revolution // Trends in Applied Sciences Research. – 2012. – N 7 (3). – P. 196 – 209.
13. *Bagchi A., Humar J., Noman A.* Development of a finite element system for vibration based damage identification in structures // J. Appl. Sci. – 2007. – N 7. – P. 2404 – 2413.
14. *Bellman R.E., Kalaba R.E.* Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems. – New York: Elsevier. – 1965. – 183 p.
15. *Bochkarev S.A., Matveenko V.P.* Natural vibrations and stability of shells of revolution interacting with an internal fluid flow // J. Sound Vib. – 2011. – N 330. – P. 3084 – 3101.

16. *Bushnell D.* Computerized Buckling Analysis of Shells. – Amsterdam: Martinus Nijhoff Publishers, 1985. – 423 p.
17. *Chen L., Rotter J.M.* Buckling of anchored cylindrical shells of uniform thickness under wind load // *Eng. Struct.* – 2012. – N 41. – P. 199 – 208.
18. *Collatz L.* Quasilinearization Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen. – 2. Durchgesehene Auflage. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K., 1963. – 503 p.
19. *Correia I. F.P., Barbosa J.I., Soares C.M. M., Soares C.A.M.* A Finite Element Semi-Analytical Model for Laminated Axisymmetric Shells: Statics, Dynamics and Buckling // *Computers & Structures.* – 2000. – **76**, N 1 – 3. – P. 299 – 317.
20. *El-Kafrawy O., Bagchi A.* Computer aided design and analysis of reinforced concrete frame buildings for seismic forces // *Inform. Technol. J.* – 2007. – N 6. – P. 798 – 808.
21. *Ghorbanpour A.* Critical temperature of short cylindrical shells based on improved stability equation // *J. Appl. Sci.* – 2002. – N 2. – P. 448 – 452.
22. *Jasion P.* Stability analysis of shells of revolution under pressure conditions // *Thin-Walled Struct.* – 2009. – N 47. – P. 311 – 317.
23. *Obodan N.I., Lebedeyev A.G., Gromov V.A.* Nonlinear Behavior and Stability of Thin-Walled Shells. – Heidelberg: Springer, 2013. – 178 p.
24. *Qatu M.S., Asadi E., Wang W.* Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000-2010 // *Open J. of Composite Materials.* – 2012. – N 2. – P. 61 – 86.
25. *Semenyuk N.P.* To Stability of Two-Layered Carbon Nanotubes // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 1. – P. 73 – 81.
26. *Semenyuk N.P., Trach V.M., Zhukova N.B.* The Theory of Stability of Cylindrical Shells Revisited // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 449 – 460.
27. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* On Stability and Post-Buckling Behaviour of Orthotropic Cylindrical Shells with Local Deflections // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 3. – P. 290 – 300.
28. *Sheng G.G., Wang X.* Thermoelastic vibration and buckling analysis of functionally graded piezoelectric cylindrical shells // *Appl. Math. Modell.* – 2010. – N 34. – P. 2630 – 2643.
29. *Wang C.M., Zhang Y.Y., Xiang Y., Reddy J.N.* Recent Studies on Buckling of Carbon Nanotubes // *Appl. Mech. Reviews.* – 2010. – **63**, N 3. – P. 1 – 18.

Поступила 21.07.2016

Утверждена в печать 30.05.2017

