

П. З. Луговой¹, В. Ф. Мейш²

**ДИНАМИКА НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ
ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;*

e-mail: ¹plugovyy@inmech.kiev.ua; ²vfmeish@gmail.com

Abstract. The experimental works on determination of dynamics of smooth and stiffened cylindrical shells contacting with a soil medium under various non-stationary loadings are reviewed. The results of studying the three-layer shells of revolution the motion equations of which are obtained within the framework of hypotheses of Timoshenko geometrically nonlinear theory are stated. The numerical results for shells with a piece-wise or discrete filler enable to estimate an influence of geometrical and physical-mechanical parameters of constructions on their dynamics and to reveal new mechanical effects. Basing on the classical theory of shells and rods, an effect of discrete arrangement of ribs and Winkler or Pasternak elastic foundation coefficients on the eigen frequencies and modes of rectangle in plane shallow cylindrical and spherical shells is studied. The number and form of dispersion curves are determined for the longitudinal harmonic waves in stiffened cylindrical shell. The equations of vibrations of ribbed shells of revolution on the Winkler or Pasternak elastic foundation are obtained using the geometrically nonlinear theory and Timoshenko hypotheses. The numerical algorithms in application of integro-interpolational method are developed and corresponding non-stationary problems are solved. The special attention is drawn to statement and solving the coupled problems on character of dynamical interaction of cylindrical or spherical shells with the soil fluid-saturated medium of different structure.

Key words: experimental studies, dynamical problems, impulsive loads, discretely ribbed shells of revolution, three-layer elements of shell structures, geometrically nonlinear Timoshenko shell theory, Winkler and Pasternak elastic foundation, soil medium system, harmonic waves, dispersion curves, eigenfrequencies, nonstationary vibrations, numerical method.

Введение.

Анализ динамического поведения современных оболочечных систем свидетельствует о существенном влиянии на их прочность неоднородностей типа подкрепляющих ребер, конструкции слоистости по толщине, и взаимодействия оболочек с окружающей средой. В [6, 10, 24, 25, 33, 34, 71, 144] приведены обзоры работ, в которых дан анализ теоретических и экспериментальных исследований по динамике оболочек вращения. Однако, вопросы, связанные с экспериментальной оценкой колебаний и напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочечных конструкций, контактирующих со сплошной средой и подверженных импульсным нагрузкам, изучены недостаточно. В данном обзоре значительное внимание уделено экспериментальным исследованиям динамики неоднородных цилиндрических оболочек в грунтовой среде при нестационарных нагрузках. Полученные экспериментальные данные позволяют дать оценку правомочности применимости используемых теоретических подходов.

В технике значительное распространение получили трехслойные оболочечные элементы, состоящие из двух несущих слоев и кусочно-однородного заполнителя, который обеспечивает их совместную работу. При расчете на прочность указанных

оболочечных структур с кусочно-однородным наполнителем при динамических нагрузках необходимо определить НДС как в области, так и на значительном расстоянии от неоднородностей. Из анализа работ [14, 15, 28, 32, 40, 43, 51] следует, что публикаций, посвященных изучению динамических процессов в трехслойных оболочках с кусочно-однородным наполнителем, опубликовано недостаточно; в основном, в них рассмотрены установившиеся колебания. Одним из направлений дальнейших исследований является изучение влияния параметров кусочно-однородного наполнителя на закономерности колебательных процессов в трехслойных оболочках вращения. Для этого сформулирована постановка нелинейных динамических задач теории трехслойных оболочек вращения с кусочно-однородным наполнителем и дан вывод (с помощью вариационного принципа Рейсснера) уравнений колебаний, условий контакта по длине конструкции в области изменения параметров наполнителя и граничных условий при независимых кинематических и статических гипотезах для каждого слоя оболочки с учетом поперечных нормальных и сдвиговых деформаций в наполнителе. При этом использованы допущения, соответствующие (в геометрически нелинейной теории оболочек) гипотезам Тимошенко [138], и развита эффективная численная методика решения задач данного класса. Полученные решения осесимметричных задач для трехслойных оболочек вращения с кусочно-однородным наполнителем при нестационарных нагрузках позволяют исследовать влияние геометрических и физико-механических параметров исходных конструкций на их НДС и выявить новые механические эффекты [62, 63, 101].

Анализ динамического поведения трехслойных оболочек вращения с учетом дискретности наполнителя приводит к необходимости разработки уточненных методов расчета указанных тонкостенных систем. Исходя из этого, получены уравнения колебаний и соответствующие естественные граничные условия на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского в рамках геометрически нелинейной теории оболочек и стержней, соответствующим гипотезам Тимошенко, в квадратичном приближении. Развита эффективная численная методика и разработаны алгоритмы решения задач о нестационарных осесимметричных и неосесимметричных колебаниях трехслойных оболочек вращения с учетом дискретности наполнителя. Численный метод, который применен для решения динамических задач теории трехслойных оболочек, основан на привлечении интегро-интерполяционного метода для построения разностных схем по пространственным координатам и явной конечно-разностной схемы по временной координате [33].

На основе исходной расчетной модели и разработанных численных алгоритмов получены решения динамических задач для случая осесимметричных и неосесимметричных колебаний и проведен анализ НДС трехслойных оболочек вращения при нестационарных нагрузках в широком диапазоне изменения геометрических и физико-механических параметров. Дан анализ числовых результатов, закономерностей и механических эффектов, характерных для волновых процессов в рассматриваемых трехслойных оболочках. Для случая цилиндрических оболочек проведено сравнение численных результатов для величин прогиба, полученных согласно теории трехслойных оболочек с учетом дискретности наполнителя и конструктивно-ортотропной теории трехслойных оболочек. Расчеты свидетельствуют, что величины прогибов согласно конструктивно-ортотропной модели имеют место в пределах изменения величин прогибов внутреннего и внешнего слоев согласно теории с учетом дискретности ребер.

Исследования динамики неоднородных оболочечных систем на упругом основании интенсивно развиваются вследствие практического использования указанных конструкций. В работах [6, 33] достаточно полно освещены вопросы динамики гладких и подкрепленных пластин и оболочек вращения.

В данном обзоре, исходя из уравнений колебаний классических теорий стержней, пластин и оболочек [3], учитывающей дискретное размещение ребер, представлена методика и определены собственные частоты и формы колебаний прямоугольных в плане полых ребристых оболочек на упругом основании Винклера и Пастернака [13, 35, 95]. Аналогичные задачи решены для подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании [36]. Определены числа и формы дисперсионных кривых для гармонических волн, распространяющихся вдоль продольно подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании [100]. Дана постановка задач о колебаниях ребристых оболочек

на упругом основании с использованием геометрически нелинейной теории стержней и оболочек с учетом допущений, соответствующих гипотезам Тимошенко, и получены уравнения колебаний дискретно подкрепленных оболочек вращения на упругом основании Винклера или Пастернака с помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. Для дискретно подкрепленных оболочек вращения на упругом основании получены конечно-разностные схемы с использованием интегро - интерполяционного метода построения разностных схем и решены соответствующие нестационарные задачи [8, 9, 74, 27, 97]. Особое внимание уделено постановке связанных задач о взаимодействии цилиндрических и сферических оболочек с грунтовой средой, моделирующей нелинейным трехкомпонентным грунтом. Для уравнений движения и граничных условий грунтовой среды при взаимодействии с цилиндрическими и сферическими оболочками, соответственно, построены конечно-разностные схемы Мак – Кормака. Разработаны численные алгоритмы решения динамических задач дискретно подкрепленных оболочек вращения на упругом основании, а также для связанных задач взаимодействия при действии импульсных нагрузок на цилиндрические и сферические оболочки в водонасыщенном грунтовой массиве. Решение связанных задач колебаний дискретно подкрепленных оболочек вращения при импульсных нагрузках [6, 10, 15, 17, 22, 25, 26, 28] позволяет исследовать влияние свойств упругой среды на механические эффекты в неоднородных оболочечных системах. Подобие структуры уравнений цилиндрических и сферических оболочек на упругом основании и в грунтовой среде позволило провести теоретическую оценку коэффициента Винклера. Получены новые данные о действии импульсных нагрузок на цилиндрические полости и цилиндрические оболочки, расположенные в периодических грунтовых средах [41, 42, 54].

В данном обзоре предпочтение отдано результатам, полученным непосредственно авторами этой статьи, а также выполненными совместно с сотрудниками по работе. Следует отметить, что в обзоре не отражены результаты исследований, полученные другими авторами. В частности отметим, что в обзоре не полностью представлены исследования по динамическому поведению многослойных оболочек.

§1. Экспериментальные исследования влияния окружающей среды на динамику неоднородных оболочечных конструкций при импульсных нагрузках.

В публикациях [6, 10, 33, 34, 71] представлены обзоры работ по экспериментальным исследованиям колебаний и НДС оболочечных конструкций. Однако, вопросы, связанные с экспериментальной оценкой динамики оболочечных конструкций, контактирующих со сплошной средой и подверженных нестационарным нагрузкам, изучены недостаточно. Поэтому в данном обзоре значительное внимание уделено экспериментальным исследованиям динамики неоднородных цилиндрических оболочек в грунтовой среде при импульсных нагрузках. Применение теоретических методов исследования оболочечных систем целесообразно сочетать с экспериментальными подходами с целью обоснования их эффективности и установления пределов их применимости.

1.1. Исследование явления квазиполного внутреннего отражения (КПВО) в оболочках с жидкостью. Анализ проведенных исследований явления КПВО [4] позволяет сделать выводы, что подобные явления КПВО могут иметь место в различных конструкциях, заполненных жидкостью. Например, при проведении прострелочных работ в обсадных трубах заполненных жидкостью, когда взрыв происходит на оси ортотропной цилиндрической оболочки, углы КПВО [18, 19] определяются из уравнения $\cos \beta_k = a / V_k$ (β_k – угол КПВО, a – скорость звука в жидкости, V_k – скорость квазипродольной волны в цилиндрической оболочке). Известно [7, 102], что при значительном изменении параметра жесткости упругого основания ($0 < C <$) и геометрии оболочки ($0 < R <$) критические скорости квазипродольных волн в ортотропной обсадной трубе на упругом основании изменяются мало, т.к. они при этом ограничены диапазоном $V_1 < V_k < V_3$ при $G_{13} < E_1$. Аналогично также изменяются углы отражения β_k в области $\beta_1 < \beta_k < \beta_3$. Этот факт указывает на то, что наиболее опасным для разрушения является участок обсадной трубы, который будет иметь размеры $l \leq$

$\leq R(1 - \cos \beta_3) / \cos \beta_3$. Таким образом, проведенные теоретические исследования дают возможность уточнить параметры проведения безопасной взрывной обработки скважин, что желательнее проверить экспериментально.

В экспериментах в качестве испытуемых образцов использована ортотропная труба длиной $L = 0,35$ м, радиуса $R = 0,138$ м и толщиной $h = 0,008$ м. Модули упругости для материала рассматриваемой оболочки приняты: $E_1 = 4,3 \cdot 10^{10}$ Па и $E_2 = 0,76 \cdot 10^{10}$ Па [11]. На середине ее внутренней поверхности в направлении образующей был наклеен тензодатчик для измерения продольных деформаций. Источником ударных волн служил электроразряд конденсатора на оси трубы. Сигнал с мостовой схемы (с тензодатчика) регистрировался с помощью осциллографа С9-8. Оболочка с тензодатчиком погружена в воду и установлена в центре резервуара, поэтому стенки резервуара и дневная поверхность воды не оказывали влияния на результаты экспериментов. Точка электроразряда фиксировано перемещалась по оси трубы на расстояние от начала (над датчиком) до 0,13 м. Ортотропная труба была заполнена водой и размещалась в воде, поэтому упругой постелью для нее являлась вода.

В табл. 1.1 приведены расстояния (l) по образующей против эпицентра взрыва и средние значения максимальных растягивающих деформаций (ε_{cp}).

Таблица 1.1

l , мм	0	10	20	30	40	50	60	70
$\varepsilon_{cp} \cdot 10^5$	-0,8	0,2	0,5	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
l , мм	80	85	90	95	100	110	120	130
$\varepsilon_{cp} \cdot 10^5$	6,0	7,0	8,0	9,5	8,0	6,0	5,0	3,0

Из анализа данных табл. 1.1 следует, что наибольшие деформации внутренней поверхности оболочки имеют место в точке $l = 0,095$ м, что соответствует углу КПВО в $55,8^\circ$. Согласно приведенной выше теории угол КПВО равен $50,3^\circ$. Отличие между теоретическими результатами и экспериментальными данными не превышает 11%. Таким образом, приходим к выводу, что полученный теоретически и подтвержденный экспериментально эффект резкого возрастания деформаций и напряжений в точках, определяющих угол КПВО, необходимо учитывать при составлении проектов безопасного проведения взрыво-прострелочных работ в скважинах с жидкостью.

1.2. Динамика стеклопластиковой оболочечной конструкции при поперечном импульсном нагружении. Изучено влияние импульсного нагружения стеклопластиковой оболочечной конструкции, представляющей собой соединение замкнутой цилиндрической оболочки с цилиндрическим патрубком, на ее собственные частоты и формы колебаний, а также ее НДС.

Представляют интерес также исследования влияния окружающей среды на минимальную собственную частоту колебаний и на НДС оболочки с патрубком при ударном нагружении [99].

1.3. Частоты и формы резонансных колебаний. Для экспериментального исследования использована оболочка (рис. 1.1). Толщина оболочки и патрубка $h = 0,003$ м. Согласно выводам работы [11] модули упругости для материала рассматриваемой оболочки приняты: $E_1 = 4,3 \cdot 10^{10}$ Па и $E_2 = 0,76 \cdot 10^{10}$ Па. Система, состоящая из оболочки, прикрепленной жестко

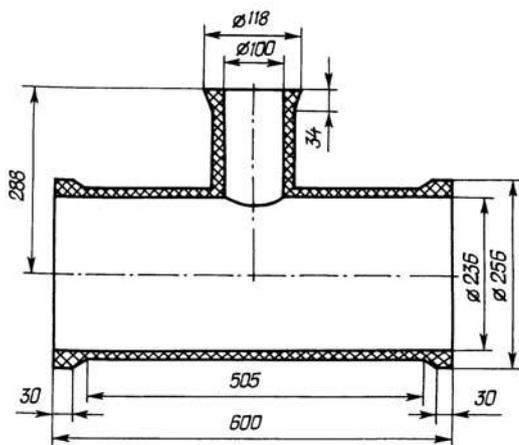


Рис. 1.1

с помощью колец к массивным кронштейнам, была установлена в металлическую емкость с размерами $0,80 \times 0,45 \times 0,45$ м. Указанная емкость наполнялась материалом так, что патрубок не контактировал с ним. Возбуждение колебаний оболочки осуществлено кинематическим способом с использованием вибрационного электродинамического стенда ВЭДС-10А. Частоту вынужденных колебаний контролировали при помощи электронно-счетного частотомера типа ЧЗ-32. Измерение амплитуд колебаний оболочки осуществлено бесконтактным способом при помощи вибропреобразователя, на который подавался сигнал с алюминиевой пластинки, центр которой находился на расстоянии $L/4$ от торца оболочки (L – длина оболочки). Аналогичная пластинка была приклеена в точке $L/2$. Результаты определения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) оболочки приведены на рис. 1.2, *а* (для оболочки без песка), а для оболочки, контактирующей со средой – на рис. 1.2, *б*. Формы колебаний в среднем сечении оболочки $L/2$ показаны на рис. 1.3, *а*, а для сечения $L/4$ от края оболочки – на рис. 1.3, *б*. Максимальная собственная частота колебаний оболочки, не контактирующей со сплошной средой, оказалась равной 230 Гц, а соответствующие ей формы колебаний с $n = 4$ (в точке $L/2$ и точке $L/4$) представлены на рис. 1.3 *а, б*, соответственно. Минимальная собственная частота колебаний оболочки, контактирующей с песком, равна 49 Гц.

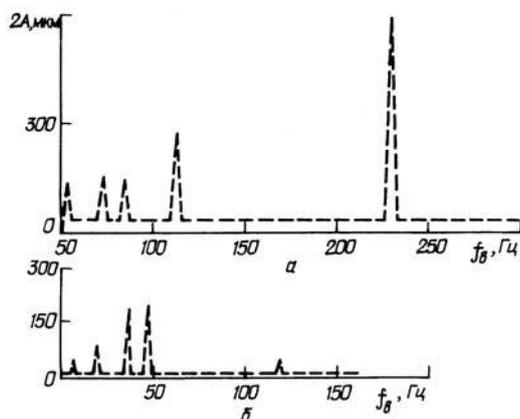


Рис. 1.2

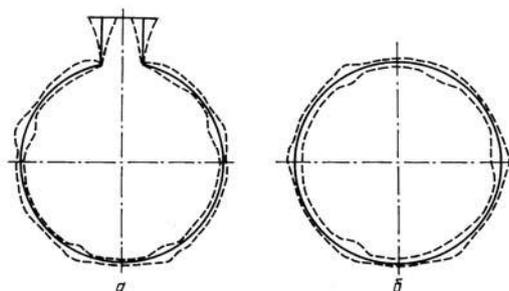


Рис. 1.3

Установлено, что контакт оболочки со сплошной средой оказывает существенное влияние как на минимальную собственную частоту колебаний оболочки, так и на собственные частоты колебаний всей системы.

1.4. Экспериментальное определение НДС оболочки при импульсном нагружении.

Импульсное нагружение при исследованиях осуществлено ударом, вызванным сбрасыванием на диафрагму монолитной массы. Диафрагма представляла собой конус, радиус основания которого $R = 0,10$ м. Указанный конус прикреплен с помощью трех винтов к верхнему краю патрубка так, что ось конуса совпадала с осью патрубка. На дно конуса была установлена прокладка из вакуумной резины толщиной 6 мм. В качестве монолита использован стальной цилиндр, масса которого составляла 4,78 кг. Высота сбрасывания груза h изменялась и была равна: 0,05, 0,10, 0,15 и 0,20 м. Для измерения деформаций использованы тензометры, которые были приклеены в точках $L/2$ и $L/4$. Тензометры поочередно подключались в мостовую схему, состоящую из трех магазинов МСР-63. Напряжения разбаланса моста определены при помощи милливольтметра ВЗ-56. По измеренным напряжениям разбаланса моста определены деформации оболочки в кольцевом и продольном направлениях как на наружной, так и на внутренней поверхностях оболочки. Вычисление деформаций осуществлено согласно [6].

Напряжения разбаланса моста подавались на вход осциллографа с запоминанием С8-17 и записывались на его экране. Виброграммы, полученные в точке $L/2$ в окружном и продольном направлениях от действия импульсной нагрузки, приведены на рис. 1.4, *а, б*, соответственно. На основе полученных виброграмм установлены мак-

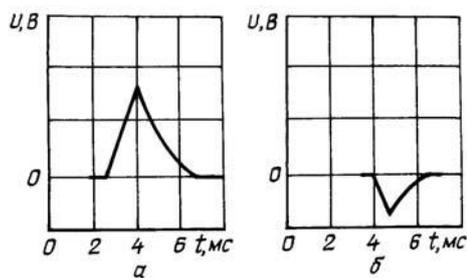


Рис. 1.4

симальные значения деформаций в местах крепления тензометров. При этом в качестве амплитудного значения действующего на конструкцию импульса принимали его максимальное значение при высоте сбрасывания монолита равной 0,20 м. Согласно выводу, полученному в работе [18], величину ударной силы можно принять постоянной в течение всего времени удара, а ее значение определяется соотношением

$$F = \frac{m\sqrt{2gh}}{\tau}, \quad (1.1)$$

где m – масса падающего монолита; g – ускорение свободного падения; h – высота сбрасывания груза; τ – длительность удара.

В табл. 1.2 приведена зависимость вибронапряжений ($\sigma_{1расч}^1/10^5$ Па – для оболочки без среды, $\sigma_{1расч}^2/10^5$ Па – для оболочки со средой) от величины максимума суммарного импульса для варианта $L/2$. Приведенные данные свидетельствуют о том, что реакция оболочечной конструкции на импульсное нагружение существенным образом зависит от того, находится ли конструкция в контакте со сплошной средой или нет. При отсутствии сплошной среды вибронапряжения существенно меньше, чем для оболочки со средой (табл. 1.2). Для четвертого варианта отличие составляет около 13 %.

Таблица 1.2

$F, Н$	$\sigma_{1расч}^1/10^5, Па$	$\sigma_{1расч}^2/10^5, Па$
675,9	245,53	384,14
956,0	552,98	687,73
1170,8	737,02	893,41
1352,0	882,90	996,45

1.5. Экспериментальное исследование влияния сплошной среды на виброускорения оболочечной конструкции, подверженной динамическому нагружению. Для измерения ускорений оболочечной конструкции применен стандартный акселерометр Д14, который жестко прикреплялся к стенке оболочки в точке $L/2$. Определены максимальные значения ускорений в точке крепления акселерометра. В табл. 1.3 приведена зависимость максимальных ускорений от величины максимума суммарного импульса для двух вариантов: ускорения a – при возбуждении оболочки без взаимодействия со средой, а ускорения a^1 – для оболочки, контактирующей со сплошной средой.

Таблица 1.3

$F, Н$	$a, м/с^2$	$a^1, м/с^2$
675,9	30	25
956,0	50	36
1170,8	70	50
1352,0	90	70

В табл. 1.4, 1.5 представлены зависимости ускорений в точке $L/2$ от уровня возбуждения оболочки с помощью вибратора в резонансном режиме. Отметим, что полученные данные (табл. 1.4, 1.5) свидетельствуют о том, что реакция оболочечной конструкции на импульсное нагружение существенным образом зависит от контакта конструкции со сплошной средой. В табл. 1.4 приведена зависимость виброускорений a от уровня возбуждения оболочки (без сплошной среды), который регулировался с помощью миллиамперметра. В табл. 1.5 приведена такая же зависимость виброускорений a^1 от уровня возбуждения для этой же оболочки, но контактирующей со сплошной средой.

Таблица 1.4

f_s , Гц	I , мА	a , м/с ²
112	22	260
	28	185
	35	150
	42	105
230	22	190
	28	162
	35	135
	42	110

Таблица 1.5

f_s , Гц	I , мА	a^1 , м/с ²
38	22	32
	28	24
	35	20
	42	13
49	22	35
	28	29
	35	22
	42	14

Из анализа данных, представленных в табл. 1.3 – 1.5, следует, что при отсутствии сплошной среды виброускорения существенно больше, чем для рассмотренной конструкции, контактирующей со средой.

1.6. Экспериментальное исследование колебаний цилиндрических оболочек, контактирующих со средой, при импульсном нагружении. В работах [94, 98] определены собственные частоты и формы колебаний и виброускорений цилиндрической оболочки, наполненной сплошными средами. Для проведения экспериментов разработана специальная установка, в которой рабочими средами являются вода, глина и песок. Определены частоты и формы колебаний модели и полученные результаты сопоставлены с результатами экспериментальных исследований [17].

1.7. Экспериментальное исследование собственных частот и форм колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки. В качестве экспериментального образца использована подкрепленная цилиндрическая оболочка радиуса $R = 0,20$ м, длины $L = 0,45$ м и толщины $h = 0,0005$ м [98].

С наружной стороны оболочка была подкреплена 32 стрингерами уголкового профиля $0,004 \times 0,0035 \times 0,0005$ м, равномерно расположенными по окружности. Длины стрингеров – равны 0,45 м. Оболочка и стрингеры изготовлены из алюминиевого сплава АМг – 6М. Края оболочки установлены в круговые пазы стальных дисков, наполненных расплавленным парафином, при отверждении которого были реализованы условия жесткого защемления торцов оболочки. В процессе экспериментов оболочка наполнялась жидкостью, глиной или песком. Для определения собственных частот и форм колебаний использован резонансный метод. Формы колебаний оболочки определены путем измерения амплитуд прогибов в окружном и продольном направлениях. Амплитуды колебаний определены с помощью вибропреобразователя токовихревого типа и электронного блока ВВВ – 302. Испытуемую оболочку устанавливали на массивном основании. Бесконтактный вибропреобразователь прикреплялся к жесткому кронштейну, установленному на массивной плите. Возбуждение колебаний в

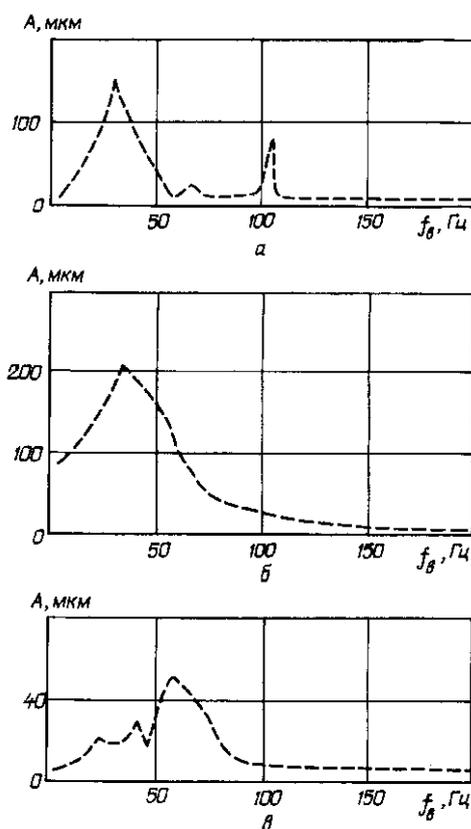


Рис. 1.5

оболочке осуществлено с помощью вибрационного электродинамического стенда – ВЭДС – 10А. При построении АЧХ величина электрического тока в катушке сохранялась постоянной и контролировалась амперметром. Частоту вынужденных колебаний регистрировали электронносчетным частотомером ЧЗ-32 с точностью до 1 Гц. Результаты измерений АЧХ колебаний оболочки для $H_1 = 0$ и $H_1 = 1$ ($H_1 = H / L$, где H – высота наполнения оболочки сплошными средами) для $n = 8$ (n – число волн в окружном направлении) показаны на рис. 1.5. На рис. 1.5, *a – в* приведены АЧХ, соответственно, для оболочки, наполненной глиной, «чистой» оболочки и оболочки с сухим песком. Число полуволн в продольном направлении всегда было постоянным ($m = 1$). Из анализа результатов, приведенных на рис. 1.5, следует, что с увеличением удельного веса сплошных сред амплитуды колебаний оболочки уменьшаются, а резонансные частоты несколько увеличиваются.

1.8. Экспериментальные исследования влияния сплошных сред на виброускорения в оболочке, возникающие при ее импульсном нагружении. Ребристая цилиндрическая оболочка радиуса $R = 0,20$ м, длиной $L = 0,45$ м и толщиной $h = 0,0005$ м изготовлена из сплава АМг-6М и жестко закреплена в дисках. Оболочка помещалась в контейнер, установленный на массивном основании. Импульсное нагружение осуществлялось ударом груза, сбрасываемого на оболочку. Удар по оболочке осуществлялся по нормали в точке, находящейся на расстоянии 0,12 м от торца оболочки и акселерометра (точка удара груза и акселерометр находились вдоль общей образующей). Масса груза составляла 0,8 кг. Высота сбрасывания груза h изменялась и была равна, соответственно: 0,05; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25 и 0,30 м. Для измерения виброускорений системы применен стандартный акселерометр Д14, который жестко прикреплялся к стенке оболочки в ее среднем сечении. Измерены максимальные значения ускорений a в точке крепления акселерометра. В табл. 1.6 приведены зависимости максимальных ускорений a от величины максимума суммарного импульса F для рассмотренных вариантов импульсного нагружения. Амплитуда импульса принята постоянной в течение всего времени удара и ее значение определялось по формуле (1.1). В табл. 1.6 также представлены величины ускорений a_1 при возбуждении оболочки без взаимодействия со средой, а ускорения со средой: a_2 – для оболочки, контактирующей с глиной; a_3 – для оболочки с сухим песком и a_4 – для оболочки с влажным песком.

Таблица 1.6

F, H	$a_1, \text{м/с}^2$	$a_2, \text{м/с}^2$	$a_3, \text{м/с}^2$	$a_4, \text{м/с}^2$
158,3	28	15	23	14
224,0	35	20	29	24
273,6	45	23	40	30
316,8	60	27	46	35
353,6	70	31	58	38
387,2	80	34	65	42

В табл. 1.7 приведены зависимости максимальных виброускорений a от величины суммарного импульса при изменении удельного веса песка (ρ , кг/см³). Удельный вес песка изменялся после равномерного добавления воды.

На основе анализа экспериментальных данных, приведенных в табл. 1.7 следует, что увеличение влажности песка привело к существенному уменьшению виброускорений при соответствующей величине максимума ударного импульса. Виброграммы, полученные при возбуждении импульсов в «чистой» оболочке и оболочке, наполненной глиной, сухим песком и влажным песком (при одинаковой высоте сбрасывания $h = 0,2$ м), приведены, соответственно, на рис. 1.6, *a – г*. При этом направление измерений ускорений совпадало с нормалью к оболочке. Сигналы от акселерометров подавались на входы осциллографа с запоминанием GDS – 806S и записывались на его экране.

Таблица 1.7

F, Н	$a, \text{м/с}^2$						
	$\rho, \text{г/см}^3$						
	1,87	1,94	2,02	2,09	2,16	2,24	2,31
158,3	23	23	23	20	17	16	14
224,0	33	33	33	33	32	28	24
273,6	40	40	40	38	36	33	30
316,8	46	46	46	46	44	40	35
353,6	58	58	57	52	48	44	38
387,2	65	65	58	58	52	50	42

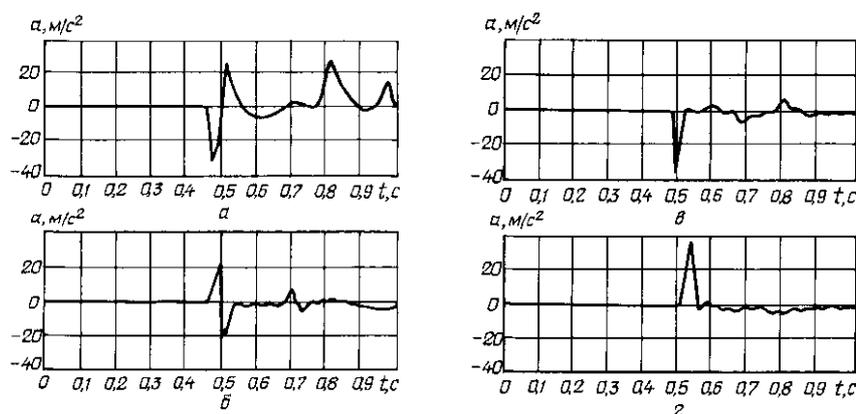


Рис. 1.6

Из анализа полученных виброграмм установлено, что увеличение удельного веса сред, контактирующих с внешней стороны оболочки при одинаковой высоте сбрасывания груза, приводит к существенному уменьшению виброускорений и незначительному увеличению длительности импульса.

Для аналогичных исследований учета степени влажности окружающей среды на виброускорения в оболочке, возникающие при ее импульсном нагружении [94] использована также цилиндрическая оболочка радиуса $R = 0,09$ м, длиной $L = 0,58$ м и толщиной $h = 0,003$ м. Оболочка изготовлена из титанового сплава ОТ4 – 1, для которого модуль упругости $E = 1,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,34$ (плотность $\rho = 4400$ кг/м). Условия жесткого защемления краев оболочки и импульсное нагружение были реализованы, как и в предыдущих испытаниях. В табл. 1.8 приведены зависимости ускорений a в средней точке оболочки от величины максимума суммарного импульса для рассмотренных вариантов динамического нагружения ($h = 0,05; 0,10$;

Таблица 1.8

F, Н	$a_1, \text{м/с}^2$	$a_2, \text{м/с}^2$					
		$\rho, \text{г/см}^3$					
		1,87	1,96	2,05	2,13	2,22	2,31
158,3	25	3,3	3,1	3,0	2,8	2,7	2,5
224,0	32	9,0	8,0	7,0	6,5	6,0	5,5
273,6	39	14	13	11	10	9	8
316,8	45	17	16	15	14	13	11

0,15; 0,20 м). Здесь введены такие обозначения: a_1 – виброускорения для оболочки без среды; a_2 – виброускорения для оболочки, контактирующей со сплошной средой; ρ – удельный вес песка; F – величина ударной силы, которая определена по формуле (1.1).

Из анализа экспериментальных данных, приведенных в табл. 1.8, следует, что увеличение влажности песка привело к существенному уменьшению виброускорений в точке при одинаковой величине максимума ударного импульса.

Виброграммы, полученные при возбуждении импульсов в «чистой» оболочке и оболочке, контактирующей с сухим песком и влажным песком (при одинаковой высоте сбрасывания груза $h = 0,05$ м) для вариантов, когда акселерометры располагались на расстоянии 0,28 м и 0,40 м от точки удара груза, приведены, соответственно, на рис. 1.7, а – в и рис. 1.8, а – в. На рис. 1.7, 1.8 верхняя кривая получена для точки крепления акселерометра 0,28 м, а нижняя – в точке 0,40 м.

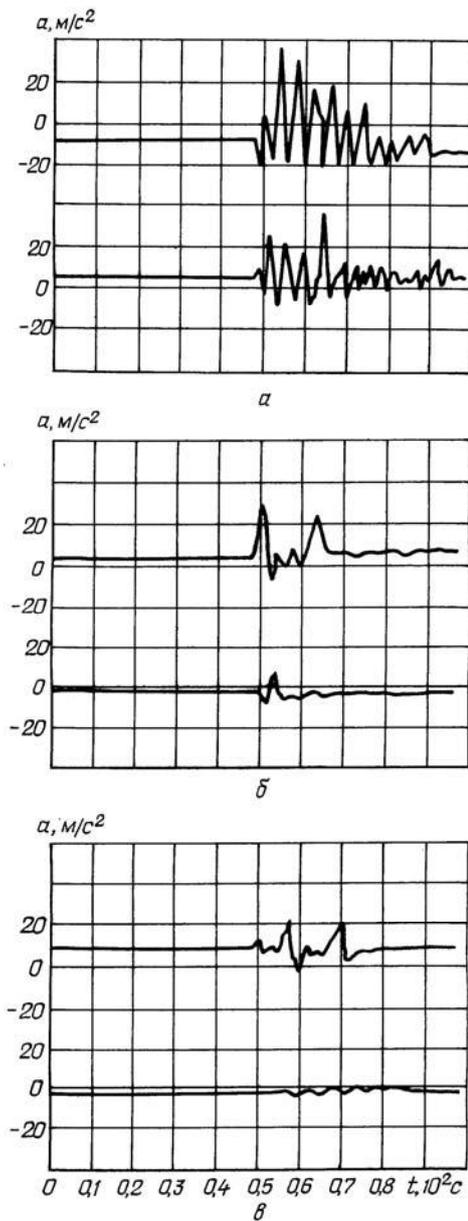


Рис. 1.7

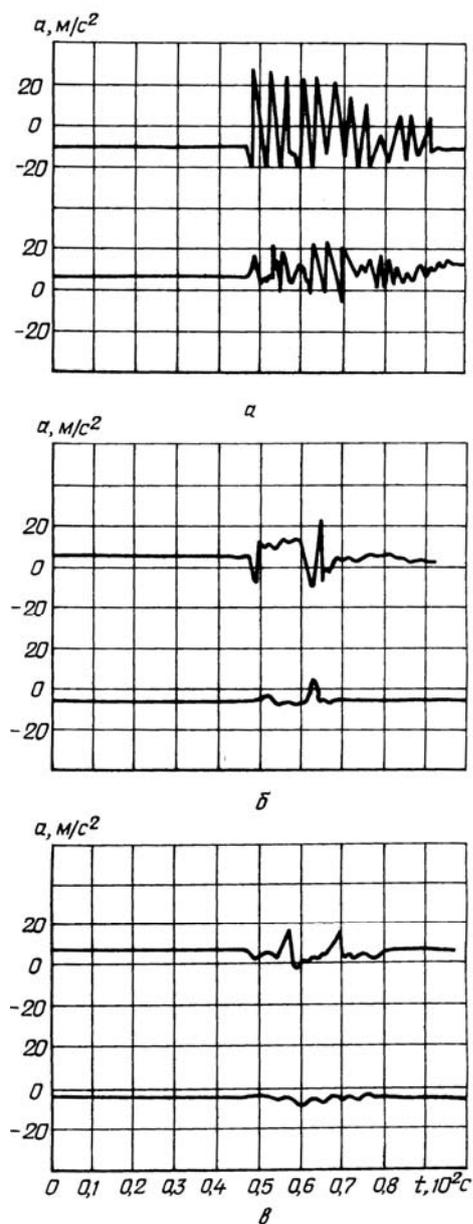


Рис. 1.8

Из анализа полученных экспериментальных данных следует, что для рассмотренных вариантов нагружения получена близкая к линейной зависимость виброускорений от величины ударной силы. Установлено, что с увеличением удельного веса песка за счет увлажнения, скорость распространения упругих волн в данной системе увеличивается. Увеличение скорости распространения волн в рассмотренной среде происходит вследствие уменьшения воздушной составляющей влажного песка, что подтверждается теоретическими расчетами. Из анализа полученных виброграмм следует, что увеличение удельного веса окружающей среды, контактирующей с внешней стороны оболочки при одинаковой высоте сбрасывания груза, приводит к существенному уменьшению виброускорений.

1.9. Экспериментальное исследование динамики подкрепленной цилиндрической оболочки при ее разгерметизации. Представляет интерес вопрос измерения собственных частот, форм колебаний и виброускорений при разгерметизации подкрепленной цилиндрической оболочки, контактирующей со сплошной средой. Для проведения экспериментов изготовлена специальная установка, в которой внешней средой для ребристой цилиндрической оболочки является сухой песок. Явление разгерметизации моделировалось следующим образом: во внутреннюю полость оболочки закачивался воздух, а после снятия резиновой пробки с верхнего диска, в оболочке возбуждались колебания. Для экспериментальных исследований использована цилиндрическая оболочка: радиус $R = 0,15$ м, длина $L = 0,5$ м и толщина $h = 0,0005$ м. Оболочка с внешней стороны подкреплена семью шпангоутами, расстояние между которыми составляло $0,0625$ м. Толщина шпангоутов с Z-образным поперечным сечением такая как и у оболочки; высота вертикальной стойки – $0,005$ м, а горизонтальных полок – $0,008$ м. Оболочка и шпангоуты изготовлены из сплава АМг – 6М. Края оболочки были установлены на прокладки из вакуумной резины, при этом были реализованы условия шарнирного опирания торцов оболочки. Испытуемая оболочка была установлена внутри контейнера, который наполнялся песком. Указанный контейнер был установлен на массивном основании. Экспериментальные значения собственных частот и форм колебаний определены резонансным методом. Для возбуждения колебаний оболочки использован генератор ГЗ – 110, а для измерения амплитуд колебаний оболочки применен бесконтактный вибропреобразователь и измерительный блок ВВВ – 302. Бесконтактный вибропреобразователь использован для определения форм колебаний. При этом измерялись амплитуды колебаний в 20 точках в окружном направлении (в среднем сечении) и в 15 точках в меридиональном направлении. Зависимость собственных частот колебаний f_{mn} от числа окружных волн n для пустой оболочки приведена на рис. 1.9. В продольном направлении получена одна полуволна $m = 1$ ($f_{1n}^{\min} = 475$ Гц). Определена минимальная собственная частота колебаний данной оболочки, наполненной песком. Установлено, что минимальная собственная частота колебаний ребристой оболочки с песком равна $f_{1n}^{\min} = 250$ Гц. Выявлено, что собственные частоты колебаний оболочки, контактирующей со средой с внутренней или внешней стороны, отличаются незначительно. Установлено, что при контакте с внешней стороны собственные частоты колебаний несколько выше, чем для варианта внутреннего наполнения оболочки средой.

Из анализа полученных результатов следует, что сплошная среда существенно снижает минимальную собственную частоту колебаний рассмотренной системы.

Импульсное нагружение, моделирующее разгерметизацию оболочки, осуществлено снятием пробки с отверстия в верхнем диске. Диаметр указанного отверстия составлял $0,017$ м. Начальное давление

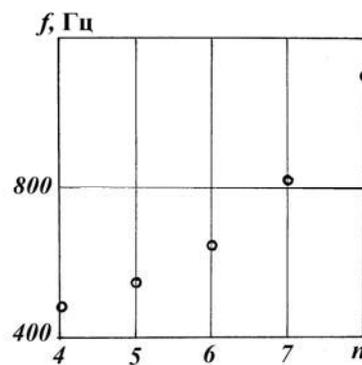


Рис. 1.9

Таблица 1.9

$P \cdot 10^{-5}, \text{Па}$	$a, \text{м/с}^2$			
	$m=0$		$m=1$	
	1	2	1	2
0,10	3,5	0,8	3,0	0,3
0,15	4,0	1,2	5,0	0,5
0,20	5,0	1,5	6,0	0,7
0,25	6,5	1,9	7,0	0,9
0,30	7,5	2,1	8,0	1,0

внутри оболочки измерено с помощью образцового манометра и было равно (0,1; 0,15; 0,20; 0,25 и 0,30) · 10⁵ Па. Для измерения виброускорений системы применено два стандартных акселерометра Д14. Один акселерометр 1 располагался в среднем сечении оболочки, а второй 2 – на расстоянии 0,31 м от верхнего торца оболочки. Измерены максимальные значения ускорений a в точках крепления акселерометров. В табл. 1.9 приведены зависи-

мости максимальных виброускорений a от величины начального давления для двух рассмотренных вариантов нагружения (без песка и с песком). Введены следующие обозначения: m – вариант установки ($m=0$, когда в контейнере была только оболочка без песка; $m=1$ – для оболочки, наружная поверхность которой находится в контакте с песком); P – начальное давление внутри оболочки.

Из анализа экспериментальных данных (табл. 1.9) следует, что увеличение начального давления внутри оболочки приводит к существенному увеличению виброускорений. Установлено, что при наполнении контейнера песком виброускорения в среднем сечении оболочки несколько увеличиваются, а на краю оболочки – уменьшаются.

Усиленные сигналы от акселерометров 1,2 подавались на входы осциллографа с запоминанием GDS – 806S. Виброграммы, полученные при возбуждении импульсов при начальном давлении $P = 0,3 \cdot 10^5$ Па в оболочке, не контактирующей с песком даны в среднем сечении (рис. 1.10, а) и на краю оболочки (рис. 1.10, б), а в оболочке, контактирующей с сухим песком, приведены на рис. 1.10, в, г, соответственно.

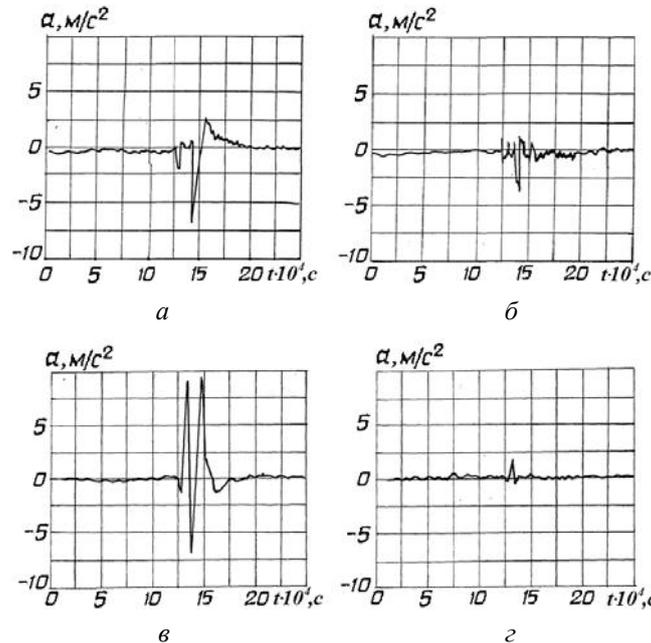


Рис. 1.10

Из анализа полученных виброграмм следует, что при контакте ребристой цилиндрической оболочки со сплошной средой виброускорения в среднем сечении при разгерметизации несколько увеличиваются, а на краю оболочки уменьшаются.

Экспериментальное моделирование разгерметизации ребристой цилиндрической оболочки, которая находится в песке, позволяет утверждать, что для рассмотренного варианта импульсного нагружения, получена близкая к линейной зависимость виброускорений от величины внутреннего начального давления.

§2. Трехслойные оболочки вращения с кусочно-однородным наполнителем.

Двумерные теории деформирования многослойных оболочек условно можно представить как теории, основанные на применении аналитического метода приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной, и теории оболочек, построенные на основе метода гипотез.

В первом случае построение двумерных теорий происходит путем разложения искомым перемещений в ряды по толщинной координате. Порядок полученных при этом уравнений зависит как от числа слоев, так и от числа членов, оставленных в разложении.

При выводе уравнений многослойных оболочек более широкое применение получил метод гипотез в силу его простоты, наглядности и возможности построения алгоритмов решения широкого класса практически важных задач. Значительные успехи в разработке теории многослойных оболочек и решении задач их колебаний получены в работах [2, 82, 110 – 113, 139,]. В теориях этого направления можно выделить *два подхода*. Для *первого подхода* характерно то, что при исследовании поведения оболочечных конструкций используются теории слоистых оболочек, основанные на применении гипотез ко всему пакету в целом [2, 28, 32, 40, 43, 51, 59, 72 – 77, 82, 105, 106, 110 – 116, 118 – 128, 131, 137, 139 – 141]. Этот подход получил широкое применение в случаях ограниченного отличия между физико-механическими параметрами слоев и при малых градиентах НДС. В этом случае порядок разрешающей системы уравнений не зависит от количества слоев. Теории, построенные с использованием обобщенных гипотез ко всему пакету слоев, значительно расширили класс задач по отношению к классической теории, однако они не позволяют с достаточной степенью точности исследовать НДС многослойных оболочек с физико-механическими характеристиками слоев, которые значительно отличаются. *Другое*, более общее направление, характеризуется тем, что при исследовании НДС оболочек используются теории, основанные на отдельных гипотезах для каждого из слоев. Этот подход используется при значительном отличии физико-механических характеристик слоев. Отметим, что при этом порядок разрешающей системы уравнений зависит от количества слоев и вид разрешающей системы значительно усложняется [14, 15, 52, 55 – 57, 60, 61, 64, 104, 144].

В большинстве работ рассмотрены задачи статического или квазистатического деформирования оболочечных структур. Публикации, посвященные изучению динамических процессов, в литературе встречаются значительно реже и, в основном, в них рассмотрены установившиеся колебания. Решению нестационарных задач теории трехслойных оболочек при принятии независимых гипотез к каждому слою посвящены работы [14, 15, 52, 55 – 57, 60, 61, 64, 104, 144]. Для *второго подхода* используют уточняющие модели оболочек и допущения, соответствующие гипотезам Тимошенко для каждого слоя. В работах указанных авторов рассмотрены трехслойные оболочки различной геометрии с однородными слоями по длине оболочечных конструкций. В литературе практически отсутствуют работы по исследованию вынужденных колебаний трехслойных оболочек с кусочно-однородным наполнителем при принятии независимых гипотез к каждому слою.

Ниже рассмотрены задачи и изучены вынужденные колебания трехслойных оболочек вращения с кусочно-однородным наполнителем при использовании независимых гипотез к каждому слою при значительном отличии физико-механических параметров при нестационарных осесимметричных нагрузках.

2.1 Постановка исходных задач. Уравнения колебаний трехслойных оболочек вращения с однородным и кусочно-однородным наполнителем при использовании гипотез к каждому слою представлены в работах [14, 15, 52, 55 – 57, 60, 61, 64, 104, 144]. Для трехслойной оболочки вращения постоянной толщины, состоящей из внешних слоев (обшивка) и внутреннего кусочно-однородного слоя (наполнитель) (рис. 2.1), принято, что ее НДС может быть полностью определено в рамках простейшего нелинейного варианта теории упругих оболочек с учетом поперечных линейных и угловых деформаций в квадратичном приближении. Вводится предположение о неразрывности всех слоёв; слои оболочки деформируются без проскальзывания и отрыва.

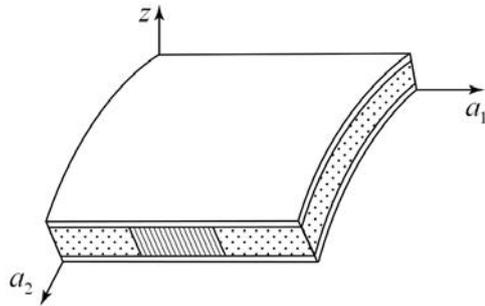


Рис. 2.1

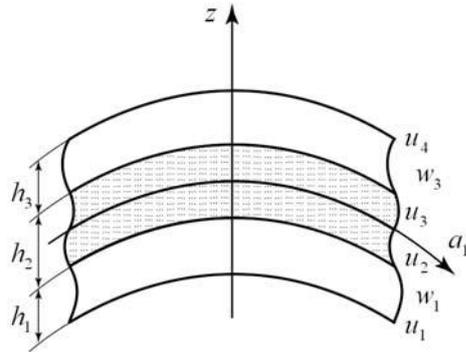


Рис. 2.2

При выводе уравнений колебаний трехслойных оболочек вращения принимаем независимые кинематические и статические гипотезы для каждого слоя с учетом поперечных нормальных и сдвиговых деформаций в заполнителе. Кинематические гипотезы имеют вид [61]:

$$\begin{aligned}
 u_1^{kz}(\alpha_1, z) &= u_1^k(\alpha_1) + z\varphi_1^k(\alpha_1) \quad (k = \overline{1, 3}); \\
 u_3^{kz}(\alpha_1, z) &= u_3^k(\alpha_1) \quad (k = 1, 3); \\
 u_3^2(\alpha_1, z) &= u_3^2(\alpha_1) + z\varphi_3^2(\alpha_1); \quad u_1^k(\alpha_1) = (u_{k+1}(\alpha_1) + u_k(\alpha_1)) / 2 \quad (k = \overline{1, 3}); \\
 u_3^k(\alpha_1) &= w_k(\alpha_1) \quad (k = 1, 3); \\
 u_3^2(\alpha_1, z) &= (w_3(\alpha_1) + w_1(\alpha_1)) / 2; \quad \varphi_1^k(\alpha_1) = (u_{k+1}(\alpha_1) - u_k(\alpha_1)) / h_k \quad (k = \overline{1, 3}); \\
 \varphi_3(\alpha_1) &= (w_3(\alpha_1) - w_1(\alpha_1)) / h_2.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

В качестве независимых искоемых функций выбираем компоненты обобщенного вектора перемещений на поверхностях слоев, который имеет вид $\bar{U} = (u_1(\alpha_1), u_2(\alpha_1), u_3(\alpha_1), u_4(\alpha_1), w_1(\alpha_1), w_3(\alpha_1))^T$ (рис. 2.2).

Поперечные сдвиговые напряжения изменяются по толщине слоя согласно закону

$$\sigma_{13}^{kz}(\alpha_1, z) = f_k(z)\sigma_{13}^k(\alpha_1) \quad (k = \overline{1, 3}), \tag{2.2}$$

причем функции $f_k(z)$ выбираем таким образом, чтобы выполнялось условие непрерывности величин поперечных сдвиговых напряжений при отсутствии поверхностных нагрузжений. Поперечное нормальное напряжение σ_{33} в заполнителе задаем в виде

$$\sigma_{33}^z(\alpha_1, z) = f(z)\sigma_{33}(\alpha_1), \tag{2.3}$$

причем функцию $f(z)$ выбираем таким образом, чтобы выполнялись условия $\sigma_{33}^z(\pm h_2 / 2) = P_3^\pm(\alpha_1)$, где $P_3^\pm(\alpha_1)$ – поперечное нормальное нагружение.

В исходных уравнениях физико-механические параметры заполнителя являются кусочно-однородными по длине конструкции и определяются следующими соотношениями:

$$\begin{bmatrix} E_{fil}(\alpha_1) \\ \nu_{fil}(\alpha_1) \\ \rho_{fil}(\alpha_1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N [\eta(\alpha_1 - \alpha_{1i}) - \eta(\alpha_1 - \alpha_{1i-1})] \begin{bmatrix} E_i(\alpha_1) \\ \nu_i(\alpha_1) \\ \rho_i(\alpha_1) \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

где $\eta(\alpha_i)$ – функция Хевисайда; величины E_i, ν_i, ρ_i – физико-механические параметры однородного заполнителя; α_{i_1} – линии контакта заполнителя; α_{1_0} и α_{1_N} – линии границ оболочки.

Для вывода уравнений колебаний трехслойной оболочки используем вариационный принцип Рейсснера для динамических процессов, согласно которому [33] имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R - T) - \delta A] dt = 0, \quad (2.5)$$

где R – функционал Рейсснера; T – кинетическая энергия; A – работа внешних сил. Выражения для функционала R и кинетической энергии имеют вид

$$\begin{aligned} R = & \int_s \left\{ \sum_{i=1,3} \int_{z_i} \left\{ \sigma_{11}^{iz} \varepsilon_{11}^{iz} + \sigma_{22}^{iz} \varepsilon_{22}^{iz} + \sigma_{13}^{iz} \varepsilon_{13}^{iz} - \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{13}^{iz})^2}{G_{13}^i} \right\} dz_i + \right. \\ & \left. + \int_{z_2} \left\{ \sigma_{11}^{2z} \varepsilon_{11}^{2z} + \sigma_{22}^{2z} \varepsilon_{22}^{2z} + \sigma_{33}^{2z} \varepsilon_{33}^{2z} + \sigma_{13}^{2z} \varepsilon_{13}^{2z} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{(\sigma_{11}^{2z})^2}{E_{fil}(s)} + \frac{(\sigma_{22}^{2z})^2}{E_{fil}(s)} + \frac{(\sigma_{33}^{2z})^2}{E_{fil}(s)} - 2\nu_{fil}(s) \frac{\sigma_{11}^{2z} \sigma_{22}^{2z}}{E_{fil}(s)} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 2\nu_{fil}(s) \frac{\sigma_{11}^{2z} \sigma_{33}^{2z}}{E_{fil}(s)} - 2\nu_{fil}(s) \frac{\sigma_{22}^{2z} \sigma_{33}^{2z}}{E_{fil}(s)} + \frac{\sigma_{13}^{2z}}{G_{fil}(s)} \right] \right\} dz_2 \right\} ds, \quad (2.6) \\ T = & \frac{1}{2} \int_s \left\{ \sum_{i=1,3} \rho_i \int_{z_i} \left[\left(\frac{\partial u_1^{iz}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{iz}}{\partial t} \right)^2 \right] dz_i + \rho_{fil}(s) \int_{z_2} \left[\left(\frac{\partial u_1^{2z}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{2z}}{\partial t} \right)^2 \right] dz_2 \right\} ds. \end{aligned}$$

В выражениях (2.6) величины z_i соответствуют областям интегрирования по толщине соответствующих слоев; ρ_i, ρ_{fil} – плотности материалов соответствующих слоев; $E_1^2, E_2^2, E_3^2, \nu_{21}^2, \nu_{31}^2, \nu_{32}^2$ – физико-механические характеристики материала заполнителя (верхний индекс 2); δ_{i_2} – символ Кронекера.

Использование вариационного принципа Рейсснера позволяет устранить формальные противоречия в уравнениях обобщенного закона Гука для поперечных нормальных и сдвиговых напряжений соответствующих слоев при принятии независимых гипотез аппроксимаций перемещений (2.1) и напряжений (2.2), (2.3). При использовании принципа Рейсснера независимому варьированию подлежат как перемещения, так и напряжения. После стандартных преобразований в функционале (2.5), с учетом независимости вариаций компонент обобщенного вектора перемещений, получена система уравнений колебаний трехслойных оболочек вращения в дифференциальной форме.

Уравнения колебаний исходной оболочечной структуры относительно независимых функций перемещений на поверхностях слоев $u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_3$ имеют вид

$$\begin{aligned} L_{3m+1}(\bar{U}) = & \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+1} + u_{2m+2}}{2} \right) + \\ & + (-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+2} - u_{2m+1}}{h_{2m+1}} \right) \quad (m = 0, 1); \\ L_3(\bar{U}) = & \frac{\rho_{fil}(s) h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_1 + u_2}{2} \right) - \frac{\rho_1 h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2 - u_1}{h_1} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_{fil}(s)h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 + u_2}{2} \right) + \frac{\rho_{fil}(s)h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 - u_2}{h_2} \right); \\
L_4(\bar{U}) &= \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2 + u_3}{2} \right) + \frac{\rho_{fil}(s)h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3 - u_2}{h_2} \right) - \\
& - \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4 + u_3}{2} \right) + \frac{\rho_3 h_3^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4 - u_3}{h_3} \right); \tag{2.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{m+5}(\bar{U}) &= \rho_{2m+1} h_{2m+1} \frac{\partial^2 w_{2m+1}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{fil}(s)h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_1 + w_3}{2} \right) + \\
& + (-1)^{m+1} \frac{\rho_{fil}(s)h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_3 - w_1}{h_2} \right) \quad (m = 0; 1),
\end{aligned}$$

где операторы $L_m(\bar{U})$, $m = \overline{1, 6}$, с учетом интегральных характеристик по толщине слоев имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
L_{3m+1}(\bar{U}) &= \frac{1}{2A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}^{2m+1}) - T_{22}^{2m+1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] - \\
& - (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1} A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^{2m+1}) - M_{22}^{2m+1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + \\
& + (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} T_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^{2m+1} k_1 \quad (m = 0; 1); \\
L_{m+1}(\bar{U}) &= \frac{1}{2A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}^m) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}^{m+1}) - (T_{22}^m + T_{22}^{m+1}) \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] + \\
& + \frac{1}{h_m A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^m) - M_{22}^m \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] - \frac{1}{h_{m+1} A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}^{m+1}) - M_{22}^{m+1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right] - \\
& - \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^m + \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^{m+1} + \frac{k_1}{2} (\bar{T}_{13}^m + \bar{T}_{13}^{m+1}) \quad (m = 1; 2); \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{m+5}(\bar{U}) &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[A_2 \left(\bar{T}_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^2 \right) \right] - \\
& - (T_{11}^{2m+1} k_1 + T_{22}^{2m+1} k_2) - \frac{1}{2} (T_{11}^2 k_1 + T_{22}^2 k_2) + (-1)^m \frac{1}{h_2} T_{33}^2 - \\
& - (-1)^m \frac{1}{h_2} (M_{11}^2 k_1 + M_{22}^2 k_2) \quad (m = 0; 1);
\end{aligned}$$

$$\bar{T}_{13}^i = T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1^i \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Интегральные характеристики напряжений для каждого слоя заданы согласно формулам:

$$(T_{11}^k, T_{22}^k, T_{13}^k, T_{33}^k) = \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}, \sigma_{33}^{kz}) dz ;$$

$$(M_{11}^k, M_{22}^k) = \int_z (z^k \sigma_{11}^{kz}, z^k \sigma_{22}^{kz}) dz \quad (k = \overline{1; 3}), \quad z \in [-h/2; h/2].$$

Уравнение колебаний трехслойных оболочек вращения с кусочно-однородным заполнителем дополняются соответствующими естественными условиями контакта, граничными и начальными условиями. В частности, граничные условия для свободного края при $s = 0$ или $s = L$ ($s = A_1 \alpha_1$) имеют вид [132]:

$$\frac{1}{2} T_{11}^{2m-1} - \frac{M_{11}^{2m-1}}{h_{2m-1}} = F_{3m-2}; \quad \frac{1}{2} T_{11}^m + \frac{M_{11}^m}{h_m} + \frac{1}{2} T_{11}^{m+1} - \frac{M_{11}^{m+1}}{h_{m+1}} = F_{m+1};$$

$$\bar{T}_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^2 = \Phi_m \quad (m = 1, 2). \quad (2.9)$$

Граничные условия для жестко закрепленного края имеют вид:

$$S = 0 \quad \text{или} \quad s = L: \bar{U} = 0. \quad (2.10)$$

$$\text{Начальные условия} \quad \text{при} \quad t = 0; \quad \bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

2.2. Численный алгоритм. Рассмотрим построение численного алгоритма решения нестационарных динамических задач трехслойных оболочек вращения с кусочно-однородным заполнителем. Выбор метода решения задач теории слоистых оболочек зависит от конкретной постановки (расчетная схема, граничные условия, кусочно-однородный заполнитель, природа нагрузки). Как следует из литературных данных, для получения решения задач нестационарного поведения слоистых конструкций широкое применение получили численные методы. Метод конечных разностей использован для задач динамики слоистых оболочек при нестационарных нагрузках [6, 33, 69].

Численный алгоритм решения нестационарных задач теории трехслойных оболочек с кусочно-однородным заполнителем при использовании независимых кинематических и статических гипотез к каждому слою, с учетом поперечных нормальных и сдвиговых деформаций в заполнителе основывается на одном из вариантов разностной аппроксимации исходного вариационного функционала (2.5). В силу произвольности вариаций перемещений и напряжений, после стандартных преобразований в вариационном функционале, получим две группы уравнений. Одна из них представляет собой уравнения колебаний трехслойных оболочек в усилиях – моментах, которые записываются для областей однородного заполнителя, вторая – соотношения обобщенного закона Гука.

Основой численного алгоритма является явная конечно-разностная схема типа «крест» по пространственной и временной координатам. Переход от непрерывной системы уравнений к конечно-разностной выполняется в *два этапа*. *Первый этап* состоит в конечно-разностной аппроксимации дивергентных уравнений колебаний в усилиях-моментах в областях однородного заполнителя, что эквивалентно использованию интегро-интерполяционного метода аппроксимации уравнений движения [6, 33, 69]. После стандартных преобразований, с учетом соотношений (2.1) – (2.5), (2.7) – (2.9), получим разностные уравнения колебаний трехслойной оболочки вращения относительно независимых функций перемещений на поверхности слоев $u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_3$:

$$L_{3m+1}(\bar{U}_i^n) = \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{4} [(u_{2m+1,i}^n)_{\bar{r}t} + (u_{2m+2,i}^n)_{\bar{r}t}] +$$

$$+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{12} [(u_{2m+2,i}^n)_{\bar{r}t} - (u_{2m+1,i}^n)_{\bar{r}t}] \quad (m = 0, 1); \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
L_{3m+1}(\bar{U}_i^n) &= \frac{\rho_{m+1}h_{m+1}}{4} \left[(u_{m,i}^n)_{\bar{r}t} + (u_{m+1,i}^n)_{\bar{r}t} \right] + \\
&+ (-1)^m \frac{\rho_m h_m}{12} \left[(u_{m+1,i}^n)_{\bar{r}t} - (u_{m,i}^n)_{\bar{r}t} \right] + (-1)^m \frac{\rho_{m+1}h_{m+1}}{4} \left[(u_{m+2,i}^n)_{\bar{r}t} + (u_{m+1,i}^n)_{\bar{r}t} \right] + \\
&+ \frac{\rho_{m+1}h_{m+1}}{12} \left[(u_{m+2,i}^n)_{\bar{r}t} - (u_{m+1,i}^n)_{\bar{r}t} \right] \quad (m = 1, 2); \\
L_{m+5}(\bar{U}_i^n) &= \rho_{2m+1}h_{2m+1}(w_{2m+1,i}^n)_{\bar{r}t} + \frac{\rho_2 h_2}{4} \left[(w_{1,i}^n)_{\bar{r}t} + (w_{3,i}^n)_{\bar{r}t} \right] + \\
&+ (-1)^m \frac{\rho_2 h_2}{12} \left[(w_{3,i}^n)_{\bar{r}t} - (w_{1,i}^n)_{\bar{r}t} \right] \quad (m = 0, 1).
\end{aligned}$$

В разностных уравнениях (2.12) величины $L_j(\bar{U}_i^n)$, $j = \overline{1, 6}$, соответствуют разностным операторам согласно уравнений (2.9) в i -й дискретной точке по пространственной координате s и n -му дискретному слою по временной координате t . Обозначение разностных производных вводится согласно [69].

Второй этап аппроксимации уравнений состоит в выборе энергетически согласованных конечно-разностных аппроксимаций величин усилий-моментов и соответствующих деформаций в областях однородного заполнителя, чтобы выполнялся конечно-разностный аналог энергетического уравнения. Используя явную схему «крест», компоненты обобщенного вектора перемещений аппроксимируем в целых точках разностной сетки, а компоненты обобщенного тензора деформаций и усилия-моменты в полужелтых точках сетки [6, 33]. Такой подход позволяет сохранить дивергентную форму разностного представления дифференциальных уравнений, а также и выполнение закона сохранения полной механической энергии на разностном уровне.

2.3. Вынужденные колебания трехслойных оболочек. Рассмотрен ряд динамических задач теории трехслойных оболочек вращения со сплошным и кусочно-однородным заполнителем при осесимметричных нестационарных нагрузках. Ниже приведены постановки задач и численные алгоритмы решения уравнений колебаний трехслойных оболочек вращения с использованием независимых гипотез к каждому слою. Представлены численные результаты решений динамических задач нестационарного поведения трехслойных оболочек вращения с кусочно-однородным заполнителем (цилиндрических, сферических, конических и эллипсоидальных оболочек) в широком диапазоне изменения физико-механических и геометрических параметров, при разных видах граничных условий и видах нагрузки. Рассмотрены: задачи динамического деформирования трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным заполнителем в случаях жесткого закрепления краев оболочки при внутренней распределенной нагрузке, когда один из краев оболочки жестко закреплен, а второй – свободный при внутреннем распределенном нагружении; задачи нестационарного поведения незамкнутых трехслойных сферических, конических и эллипсоидальных оболочек в случаях жесткого закрепления краев и свободных краев при внутренней распределенной нагрузке [14, 15, 52, 55 – 57, 60, 61, 104, 132].

Рассмотрена задача динамического поведения трехслойной цилиндрической оболочки с неоднородным заполнителем при распределенной нагрузке. Принято, что цилиндрическая оболочка жестко закреплена по торцам. Задача решена при следующих геометрических и физико-механических параметрах:

$$\begin{aligned}
R/h &= 30; \quad h = h_1 + h_2 + h_3; \quad h_1 = h_3; \quad h_2/h_1 = 8; \quad L/R = 2; \\
\rho_1 = \rho_3 &= 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad E_1^1 = E_2^1 = E_3^1 = E_2^3 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}.
\end{aligned}$$

В областях $0 \leq x \leq L/4$ и $3/4L \leq x \leq L$ принято: $E_1/E_{fil} = 100$, $\rho_1/\rho_{fil} = 4$; в области $L/4 \leq x \leq 3/4L$ – $E_1/E_{fil} = 400$, $\rho_1/\rho_{fil} = 8$. Обозначения E_1^1, ρ_1 соответствуют физико-механическим параметрам величин материала обшивок; E_{fil}, ρ_{fil} – величины заполнителя.

Нагрузка задана согласно следующей формуле:

$$P_3(t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)], \quad (2.13)$$

где $A = 10^6$ Па – амплитуда нагрузки, $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с – длительность нагрузки, η – функция Хевисайда.

На рис. 2.3, 2.4 представлены характерные распределения величин прогибов w_1, w_3 и напряжения σ_{22} в заполнителе по пространственной координате x в момент времени $t = 7T$. Графическое представление позволяет анализировать качественное и количественное распределение величин прогибов и напряжений по длине цилиндрической оболочки. Четко проявляется область с заполнителем $E_1/E_{fil} = 400 - L/4 \leq x \leq 3/4L$. В областях $0 \leq x \leq L/4$ и $3/4L \leq x \leq L$ величины прогибов для внутренней обшивки (кривая 1) и внешней обшивки (кривая 2) практически совпадают. Различие проявляется в области $L/4 \leq x \leq 3/4L$. Для величин заполнителя σ_{22} (рис. 2.4) в области $L/4 \leq x \leq 3/4L$ наблюдаются высокочастотные колебания, которые объясняются влиянием поперечного нормального напряжения σ_{33} и, соответственно, нормальных поперечных деформаций в исходных уравнениях колебаний. На рисунках четко проявляются области контакта заполнителя с различными физико-механическими свойствами.

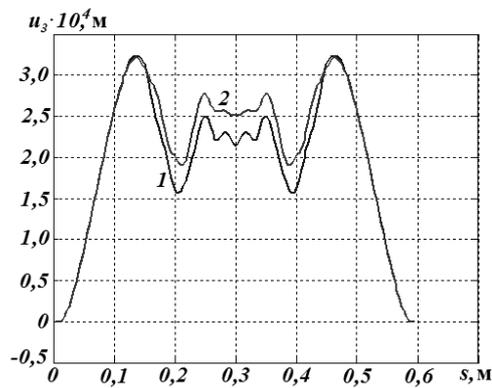


Рис. 2.3

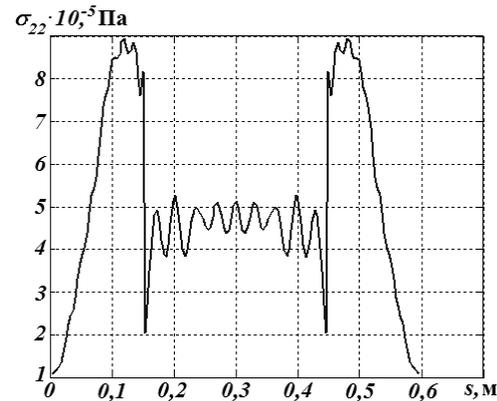


Рис. 2.4

Рассмотрена задача динамического поведения жестко заземленной по краям трехслойной конической оболочки с неоднородным заполнителем при действии распределенной нормальной внутренней нагрузки $P_3(t)$ при следующих геометрических и физико-механических параметрах исходной структуры: $R_0/h = 30$; $h = h_1 + h_2 + h_3$; $h_1 = h_3$; $h_2/h_1 = 8$; $L/R = 2$; $\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $E_1^1 = E_2^1 = E_1^3 = E_2^3 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1^1 = \nu_2^1 = \nu_1^3 = \nu_2^3 = 0,3$;

1) в областях $0 \leq s \leq L/4$ и $3L/4 \leq s \leq L$ параметры заполнителя $E_{fil} = E_1^1/100$; $\rho_{fil} = \rho_1/4$; $\nu_{fil} = 0,34$; 2) в области $s/4 \leq s \leq 3L/4$ параметры заполнителя $E_{fil} = E_1^1/500$; $\rho_{fil} = \rho_1/8$; $\nu_{fil} = 0,34$.

Обозначения E_1^1, ν_1^1, ρ_1 соответствуют физико-механическим параметрам величин материала обшивок, а $E_{fil}, \nu_{fil}, \rho_{fil}$ – величинам заполнителя. Распределенная нормальная нагрузка задана в виде (2.13).

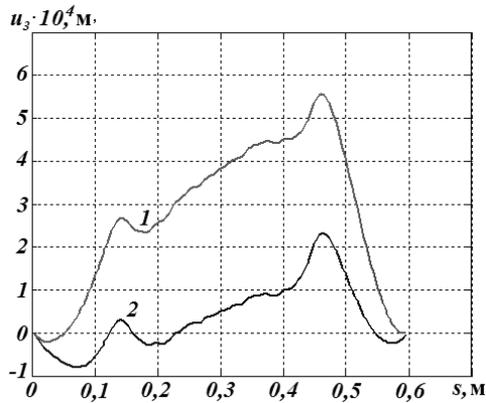


Рис. 2.5

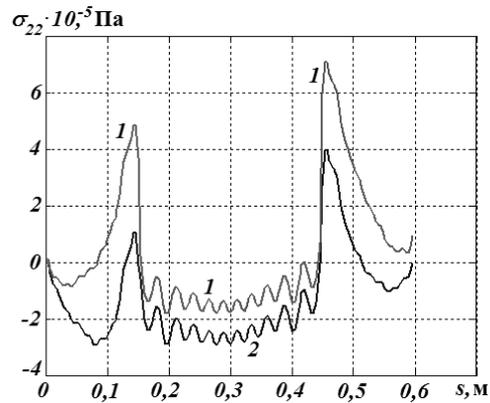


Рис. 2.6

Расчеты проведены для случаев $\beta = \pi/12$ и $\beta = \pi/6$ (β – угол конусности). В частности, на рис 2.5 представлено характерное распределение величин u_3 в зависимости от пространственной координаты s для внутренней обшивки в момент времени $t = 7T$. Кривая 1 соответствует случаю $\beta = \pi/6$, кривая 2 – $\beta = \pi/12$.

На рис. 2.6 приведены зависимости величин σ_{22} для заполнителя (обозначения соответствуют рис. 2.5). Графическое представление позволяет анализировать качественное и количественное распределение величин u_3 и σ_{22} по длине конической оболочки (линии контактов, которые обусловлены неоднородностью заполнителя, влияние угла конусности на распределение НДС структуры и т.д.).

Рассмотрена задача динамического поведения жестко защемленного по краям сегмента эллипсоидальной оболочки ($\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}$) с кусочно-однородным заполнителем при распределенной нормальной внутренней нагрузке $P_3(t)$. Геометрические и физико-механические параметры исходной структуры следующие: $a/h = 20$; $\alpha_{10} = \pi/12$; $\alpha_{1N} = 11\pi/12$; $h = h_1 + h_{fil} + h_3$; $b/a = 1,25$; $h_1 = h_3$; $h_{fil}/h_1 = 8$; $\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$; $E_1^1 = E_2^1 = E_1^3 = E_2^3 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $\nu_1^1 = \nu_2^1 = \nu_1^3 = \nu_2^3 = 0,3$; 1) в областях $s_0 \leq s \leq s_0 + \Delta s/4$ и $s_N - \Delta s/4 \leq s \leq s_N$; $\Delta s = s_N - s_0$; $E_{fil} = E_1^1/100$; $\rho_{fil} = \rho_1/4$; $\nu_{fil} = 0,34$; 2) в области $s_0 + \Delta s/4 \leq s \leq s_N - \Delta s/4$; $E_{fil} = E_1^1/400$; $\rho_{fil} = \rho_1/4$; $\nu_{fil} = 0,34$. Обозначения E_1^1, ν_1^1, ρ_1 соответствуют физико-механическим параметрам величин материала обшивок, а обозначения $E_{fil}, \nu_{fil}, \rho_{fil}$ – параметрам заполнителя. Распределенная нормальная нагрузка задана в виде (2.13).

Расчеты проведены на временном интервале $t = 20T$. Полученные результаты позволяют выполнить детальный анализ НДС исследуемой неоднородной оболочки в любой момент указанного временного интервала. В частности, на рис 2.7. представлено характерное распределение величин w_1 и w_3 (внутренний и внешний прогибы) в зависимости от пространственной координаты в момент времени $t = 7,5T$ (в силу симметрии исходной конструкции относительно $\alpha_1 = \pi/2$, результаты представлены для $\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \pi/2$). Кривая с индексом 1 соответствует прогибу w_1 для внутренней обшивки, кривая с индексом 2 – прогибу для внешней обшивки w_3 .

На рис. 2.8 представлено распределение величин напряжения σ_{22} в срединной поверхности заполнителя в зависимости от пространственной координаты в момент времени $t = 3T$ (время достижения максимального значения на исследуемом интервале времени).

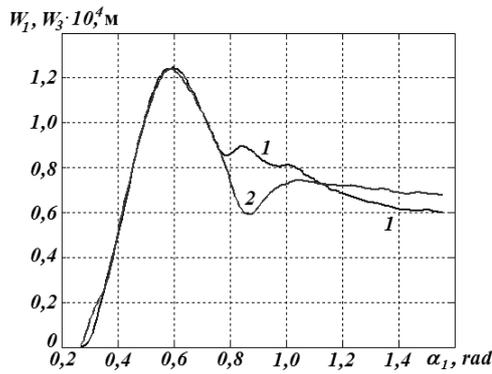


Рис. 2.7

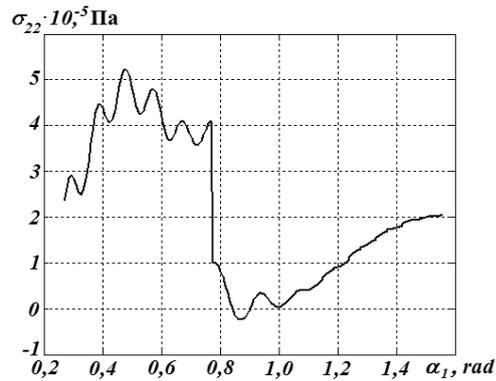


Рис. 2.8

На приведенных зависимостях четко выделяется линия разрыва, которая разделяет области заполнителя с различными физико-механическими параметрами ($\alpha_1 \approx 0,8$ рад). Как показывают численные расчеты, в области заполнителя $E_{fil} = E_1^1 / 100$; $\rho_{fil} = \rho_1 / 4$; $\nu_{fil} = 0,34$ величины прогибов w_1 и w_3 и практически не отличаются. Различие начинает проявляться при значениях меньших чем $E_{fil} = E_1^1 / 100$ (в частности, в области $s_0 + \Delta s / 4 \leq s \leq s_N - \Delta s / 4$). Выявлено, что учет геометрически нелинейных составляющих может существенно влиять на НДС трехслойных оболочек вращения. Были проведены расчеты (линейный и нелинейный варианты) согласно теории с использованием гипотез к каждому слою при внутренней распределенной нагрузке ($E_1 / E_{fil} = 1000$). Отметим, что влияние геометрически нелинейных факторов при внутренней распределенной нагрузке проявляются значительно (отличие согласно линейной и нелинейной теорий достигает порядка 15 – 20%).

2.4. Достоверность полученных результатов. Практическая сходимость численных результатов представлена для случая задачи динамического поведения трехслойной цилиндрической оболочки с кусочно-однородным заполнителем при действии внутренней распределенной нагрузки. Приняты граничные условия жесткого закрепления для левого и правого краев цилиндрической оболочки. В табл. 2.1 в первом столбце приведено количество дискретных интервалов разбиения. Во втором и третьем столбцах приведены максимальные величины внутреннего прогиба w_1 , соответственно, в сечениях $x = L/8$ и $x = L/2$. В четвертом и пятом столбцах приведены максимальные величины напряжения в заполнителе в сечениях $x = L/8$ и $x = L/2$. Как следует из представленных результатов, наблюдается достаточно хорошая сходимость.

Зависимость практической сходимости от количества дискретных интервалов разбиения приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Количество интервалов разбиения	$w_1 \cdot 10^{-3}$, м	$w_1 \cdot 10^{-3}$, м	$\sigma_{22зан} \cdot 10^6$, Па	$\sigma_{22зан} \cdot 10^6$, Па
	$x = L/8$	$x = L/2$	$x = L/8$	$x = L/2$
$N = 20$	–	–	–	–
$N = 40$	0,245	0,281	0,821	0,445
$N = 80$	0,239	0,275	0,708	0,445
$N = 160$	0,240	0,276	0,701	0,436
$N = 320$	0,240	0,276	0,701	0,439

В табл. 2.2 представлена зависимость численных результатов от числа Куранта K , которая связывает временной безразмерный дискретный шаг Δt с безразмерным пространственным дискретным шагом Δx , для выше приведенной задачи при $N = 160$.

Таблица 2.2

Значение числа Куранта	$w_1 \cdot 10^{-3}$, м	$w_1 \cdot 10^{-3}$, м	$\sigma_{22_{fil}} \cdot 10^6$, Па	$\sigma_{22_{fil}} \cdot 10^6$, Па
	$x = L/8$	$x = L/2$	$x = L/8$	$x = L/2$
$K = 1,00$	–	–	–	–
$K = 0,95$	0,240	0,276	0,701	0,436
$K = 0,90$	0,240	0,276	0,701	0,436

$$\Delta t = K \Delta x / c_{11}; \quad c_{11} = E_1 / [\rho_1(1 - \nu_1^2)]. \quad (2.14)$$

В табл. 2.2 в первом столбце приведено значение числа Куранта согласно формулы (2.14). Обозначения в других столбцах соответствуют предыдущему случаю при $N = 160$. Как видим, при значениях числа Куранта, близких к единице, наблюдается удовлетворительная сходимость по временной координате.

Проведено косвенное сравнение численных результатов расчетов согласно уравнений, приведенных в обзоре для однородного по длине заполнителя, с результатами, полученными согласно других прикладных теорий (теорий трехслойных оболочек Кирхгофа – Лява и с учетом гипотез Тимошенко в рамках пакета) с известными экспериментальными и аналитическими данными решения соответствующих задач [1, 57, 66, 104]

Косвенный анализ проведен, исходя из следующих предположений. Рассмотрены известные аналитические решения задач и экспериментальные данные по теории трехслойных балок в статике (как частный случай трехслойных оболочек). При заданных геометрических и физико-механических параметрах проведены расчеты по динамическому поведению трехслойных цилиндрических оболочек согласно уравнений, представленных в [57], для однородного по длине заполнителя. Задача рассмотрена при действии внезапно приложенной распределенной нагрузки вида $P_3(x, t) = A f(x) f(t)$, где A – амплитуда нагрузки; $f(t)$ – функция, соответствующая изменению нагрузки во времени; $f(x)$ – функция, отвечающая форме нагрузки по пространственной координате x . Полученные кинематические и силовые параметры сопоставлены с известными данными решения соответствующих задач статики через динамический коэффициент K_δ . Известные значения коэффициента динамичности для случая шарнирно опертой балки при действии нагрузки $P_3(x, t)$ и вида функции $f(t) = (1 - t/T) \cdot \eta(t - T)$, где T – длительность нагрузки, $\eta(t)$ – функция Хевисайда. Показано, что при величине $\omega T \geq 100$ коэффициент динамичности $K_\delta = 2$, где ω – круговая частота колебаний балки при заданной функции прогиба. Исходя из этого, при расчетах при действии внезапно приложенной нагрузки для случая $f(t) = \eta(t)$ как предельный случай полагался коэффициент динамичности $K_\delta = 2$.

В табл. 2.3, 2.4 представлены результаты расчетов и дан сравнительный анализ экспериментальных данных и теоретических расчетов согласно прикладных теорий трехслойных балок. Косвенное сравнение результатов согласно экспериментов [1, 66] и согласно прикладных теорий трехслойных балок представлено в табл. 2.3 [1], а в табл. 2.4 – согласно экспериментов [66]. При расчетах принят вариант цилиндрических оболочек при $1/R = 0$. Результаты табл. 2.3 соответствуют варианту расчетов шарнирно опертой балки при действии распределенной нагрузки $P_3 = A f(x) \eta(t)$, где L – длина балки. Результаты эксперимента и аналитического решения приведены согласно работ [1, 66].

Таблица 2.3

Тип результатов	$U_3 \cdot 10^{-2}$, м	Δ , %
результат согласно эксперимента	0,153	
результат согласно аналитики	0,160	4,68
теория согласно независимых гипотез	0,1432	6,4
теория согласно гипотезам Тимошенко	0,168	9,8
теория Кирхгофа	0,1155	24,5

Таблица 2.4

Тип результатов	$U_3 \cdot 10^{-2}$, м	Δ , %
результат согласно эксперимента	0,348	
результат согласно аналитики	0,363	4,13
теория согласно независимых гипотез	0,354	1,7
теория согласно гипотезам Тимошенко	0,1995	42,7
теория Кирхгофа	0,1902	45,3

Рассмотрена трехслойная балка с обшивками, изготовленными из материала типа сплав Д16-Т, и заполнителя – типа пенопласт. Геометрические и физико-механические параметры балки приняты следующими: толщина обшивки $\delta_1 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ м; заполнителя – $\delta_2 = 0,37 \cdot 10^{-2}$ м; $E_{обш} = 7,03 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0,33$; $E_{обш} / E_{зан} = 471$; $A = 0,0996 \cdot 10^5$ Па; $L = 0,28$ м.

В табл. 2.3 обозначено: а) – результаты экспериментов [66] для значений прогиба U_3 на внешней поверхности балки при $x = L/2$; б) – результаты аналитического решения; в) – расчеты согласно данного обзора; г) – теория трехслойных балок Тимошенко (пакет); д) – теория трехслойных балок Кирхгофа (пакет). Третья колонка в табл. 2.3 соответствует относительной погрешности Δ , вычисляемой по формуле $|\Delta = (w_m - w_*) / w_m| \cdot 100\%$, где w_m – значение эксперимента, а w_* – соответствующие значения согласно разным расчетным схемам.

В табл. 2.4 приведено сравнение величин прогиба согласно эксперимента [66]. Рассмотрен случай шарнирно опертой балки при действии нагрузки $P_3 = Af(x)\eta(t)$. Геометрические и физико-механические параметры балки следующие: $L/h = 10$; $\delta_1 / \delta_2 = 0,5$; $h = 2\delta_1 + \delta_2$; $E_{обш} = 2,02 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_{обш} = 0,3$; $E_{зан} = 0,394 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_{зан} = 0,35$; $A = 5 \cdot 10^5$ Па. Обозначения величин в табл. 2.4 аналогичны обозначениям табл. 2.3. Как следует из приведенных результатов, расчеты по теории независимых аппроксимаций наиболее согласуются с соответствующими экспериментальными и аналитическими решениями, что косвенно подтверждает достоверность полученных результатов.

§3. Трехслойные оболочки вращения с дискретным ребристым заполнителем.

Ниже рассмотрены трехслойные оболочки с учетом дискретности ребристого заполнителя при импульсных нагрузках. Как было указано выше, при построении вариантов теории многослойных оболочек существует два основных подхода: применение единых гипотез ко всему пакету и гипотез, которые учитывают кинематические и статические параметры каждого слоя. Очевидно, что оболочки с учетом дискретности заполнителя можно отнести ко второму подходу построения моделей многослойных оболочек. С другой стороны, эти неоднородные оболочечные структуры с учетом дискретности ребристого заполнителя можно рассматривать как оболочки с дискретным размещением ребер.

Наиболее полно современное состояние исследований в области динамики подкрепленных оболочек изложено в монографиях и работах [3, 6, 10, 24 – 26, 33, 34, 36, 37, 40, 43, 51]. Практически большинство исследований проведено с использованием

расчетной схемы, основанной на уравнениях прикладной теории оболочек Кирхгофа – Лява и теории стержней Кирхгофа – Клебша. В основном рассмотрены задачи на собственные колебания. Вынужденные колебания подкрепленных оболочек рассмотрены при гармонических нагрузках [3]. Применение моделей оболочек и стержней, соответствующих гипотезам Тимошенко в задачах для подкрепленных оболочек при учете дискретности размещения ребер, рассмотрено в работах [6, 24, 25, 33] (численное моделирование осесимметричных и неосесимметричных колебаний, подкрепленных оболочек вращения при нестационарных нагрузках в линейной и геометрически нелинейной постановках).

Приведенный анализ исследований нестационарных колебаний неоднородных оболочек [143] показал, что задачи о вынужденных осесимметричных и неосесимметричных колебаниях трехслойных оболочек вращения с учетом дискретности заполнителя при нестационарных нагрузках являются актуальными.

3.1. Уравнения колебаний трехслойных оболочек с учетом дискретности ребристого заполнителя. Трехслойная оболочка с внутренним заполнителем представляет собой упругую структуру, состоящую из внутренней и внешней обшивок и набора ребер, жестко соединенных с указанными обшивками. Схематическое изображение элемента указанной структуры представлено на рис. 3.1. Принимаем, что НДС обшивок может быть определено в рамках геометрически нелинейной теории оболочек с учетом допущений, соответствующих гипотезам Тимошенко (в квадратичном приближении). Для расчета ребер принято геометрически нелинейный вариант теории стержней Тимошенко.

3.2. Осесимметричные уравнения колебаний трехслойных оболочек вращения с дискретным ребристым заполнителем. Математической моделью процесса динамического деформирования трехслойной упругой структуры с дискретным заполнителем является гиперболическая система нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующих гипотезам Тимошенко. При выводе уравнений движения рассматриваемой структуры используем вариант геометрически нелинейной теории тонких оболочек в квадратичном приближении [6, 33, 62, 63, 101]. Деформированное состояние внутренней и внешней сплошных оболочек вращения определяется соответствующими составляющими обобщенных векторов перемещений $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_3^1, \varphi_1^1)^T$ и $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_3^2, \varphi_1^2)^T$. Внутренний заполнитель моделируем системой дискретных ребер. При этом полагаем, что деформированное состояние j -го ребра определяется обобщенным вектором перемещения центра тяжести его поперечного сечения $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{3j}, \varphi_{1j})^T$. Исходя из предположений жесткого соединения дискретных ребер с обшивками, представляем условия контакта центров тяжести ребер с обшивками в виде:

$$u_{1j} = u_1^i(s_j) \pm h_j^i \varphi_1^i(s_j); \quad u_{3j} = u_3^i(s_j); \quad \varphi_{1j} = \varphi_1^i(s_j) \quad (i = 1, 2; \quad j = \overline{1, J}), \quad (3.1)$$

где s_j – координата линии сопряжения центра тяжести поперечного сечения j -го ребра с соответствующей срединной поверхностью; $h_j^i = 0,5h_i + H_j$, h_i ($i = 1, 2$) – толщины внутренней и внешней оболочек; H_j – расстояние от оси j -го ребра до поверхностей гладких оболочек.

Для вывода уравнений колебаний трехслойной неоднородной по толщине структуры используем вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского, согласно которого имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) - \delta A] dt = 0, \quad (3.2)$$

где Π – потенциальная энергия упругой системы; K – кинетическая энергия; A – работа внешних сил.

Выражения для величин $\delta\Pi$ и δK записываем следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \sum_{i=1}^2 \delta\Pi_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta\Pi_j; \quad \delta K = \sum_{i=1}^2 \delta K_{0i} + \sum_{j=1}^J \delta K_j; \\ \delta\Pi_{0i} &= \int_{s_i} (T_{11}^i \delta\varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta\varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta\varepsilon_{13}^i + M_{11}^i \delta\kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta\kappa_{22}^i) ds_i; \\ \delta\Pi_j &= T_{22j} \delta\varepsilon_{22j}; \\ \delta K_{0i} &= \rho_i h_i \int_{s_i} \left[\left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \right) \delta u_1^i + \left(\frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \right) \delta u_3^i + \frac{h_i^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \right) \delta \varphi_1^i \right] ds_i; \\ \delta K_j &= \rho_j F_j \left[\left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{1j} + \left(\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \right) \delta u_{3j} + \frac{I_{\kappa pj}}{F_j} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \right)^2 \delta \varphi_{1j} \right],\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $s_i = \alpha_1 A_1^i, t$ – пространственная (для каждой обшивки) и временная координаты, соответственно; A_1^i ($i = 1, 2$) – коэффициенты первой квадратичной формы срединных поверхностей внутренней и внешней оболочек; ρ_i, ρ_j – плотности обшивок и ребра; $F_j, I_{\kappa pj}$ – геометрические параметры j -го ребра.

В соотношениях (3.3) выражения для усилий-моментов вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned}T_{11}^i &= B_{11}^i (\varepsilon_{11}^i + \nu_2^i \varepsilon_{22}^i); \quad T_{22}^i = B_{11}^i (\varepsilon_{22}^i + \nu_1^i \varepsilon_{11}^i); \quad T_{13}^i = B_{13}^i \varepsilon_{13}^i; \\ M_{11}^i &= D_{11}^i (\kappa_{11}^i + \nu_2^i \kappa_{22}^i); \quad M_{22}^i = D_{22}^i (\kappa_{22}^i + \nu_1^i \kappa_{11}^i); \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j},\end{aligned}\tag{3.4}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}^i &= \frac{\partial u_1^i}{\partial s_i} + \frac{1}{2} [\theta_{11}^i]^2 + k_1^i u_3^i; \quad \varepsilon_{22}^i = \psi^i u_1^i + k_2^i u_3^i; \quad \varepsilon_{13}^i = \varphi_1^i + \theta_{13}^i; \\ \theta_{11}^i &= \frac{\partial u_3^i}{\partial s_i} - k_1^i u_1^i; \quad \kappa_{11}^i = \frac{\partial \varphi_1^i}{\partial s_i}; \quad \kappa_{22}^i = \psi^i \varphi_{13}^i; \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}; \quad \psi^i = \frac{1}{A_2^i} \frac{dA_2^i}{ds_i}; \\ B_{11}^i &= \frac{E_1^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i h_i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}; \quad B_{13}^i = G_{13} K_i^2; \\ D_{11}^i &= \frac{E_1^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}; \quad D_{22}^i = \frac{E_2^i h_i^3}{12(1 - \nu_1^i \nu_2^i)}; \quad B_{22j} = E_j F_j.\end{aligned}\tag{3.5}$$

В соотношениях (3.5) величины k_1^i, k_2^i соответствуют кривизнам срединных поверхностей обшивок ($i = 1, 2$); величины $E_1^i, E_2^i, G_{13}^i, \nu_1^i, \nu_2^i, E_j$ – физико-механические характеристики материалов обшивок и соответствующих ребер; K_i^2 – коэффициент поперечного сдвига в теории оболочек, соответствующей гипотезам Тимошенко.

После стандартных преобразований в (3.2) с учетом (3.1), (3.3) – (3.5) получаем две группы уравнений:

1) в гладкой области между ребрами при $s_{ij} < s_i < s_{ij+1}$ –

$$\frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i T_{11}^i) - \psi^i T_{22}^i + k_1^i \bar{T}_{13}^i = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i \bar{T}_{13}^i) - k_1^i T_{11}^i - k_2^i T_{22}^i + P_3 = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{A_2^i} \frac{\partial}{\partial s_i} (A_2^i M_{11}^i) - \psi^i M_{22}^i - T_{13}^i = \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2},$$

2) на линиях разрывов $s_i = s_{ij} -$

$$\sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad \sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) = \rho_j I_{крj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Уравнения движения (3.6), (3.7) дополняются соответствующими граничными (при $s_i = s_{i0}, s_i = s_{iN}$) и начальными условиями.

3.3. Уравнения колебаний трехслойных цилиндрических оболочек с дискретным продольно поперечным ребристым заполнителем.

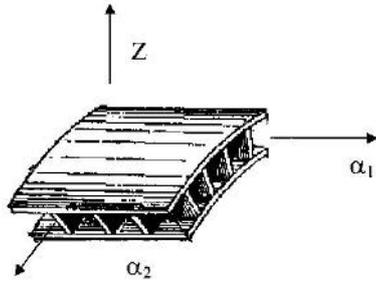


Рис. 3.1

Трехслойная цилиндрическая оболочка с дискретным ребристым заполнителем представляет собой упругую систему, состоящую из внутренней (верхний индекс 1) и внешней (верхний индекс 2) обшивок и набора дискретных ребер, жестко соединенных с указанными обшивками. Принимаем, что НДС обшивок (цилиндрических оболочек) и ребер может быть определено в рамках простейшего геометрически нелинейного варианта теории оболочек и стержней, в котором приняты гипотезы Тимошенко [6, 33, 137]. Схематическое изображение указанной упругой структуры представлено на рис. 3.1.

Деформированное состояние внутренней и внешней обшивок может быть определено через компоненты обобщенных векторов перемещений соответствующих срединных поверхностей: $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$ и $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$. Деформированное состояние ребра, направленного вдоль оси x , определяется вектором перемещения линии центра тяжести поперечного сечения: $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$. Соответственно, для ребра, направленного вдоль оси y – вектором $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$.

Для вывода уравнений колебаний трехслойной упругой структуры с продольно-поперечным дискретным ребристым заполнителем используем вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского (3.2). Выражения для полной потенциальной и кинетической энергий записываем в виде

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{i=1}^I \Pi_i + \delta; \quad (3.8)$$

$$\delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{i=1}^I K_i + \delta; \quad (3.9)$$

$$\delta \Pi^i = \int_S (T_{11}^i \delta \varepsilon_{11}^i + T_{22}^i \delta \varepsilon_{22}^i + T_{13}^i \delta \varepsilon_{13}^i + T_{12}^i \delta \varepsilon_{12}^i + M_{11}^i \delta \kappa_{11}^i + M_{22}^i \delta \kappa_{22}^i + H^i \delta \kappa_{12}^i) dS; \quad (3.10)$$

$$\delta \Pi_i = \int_{L_i} (T_{11i} \delta \varepsilon_{11i} + T_{12i} \delta \varepsilon_{12i} + T_{13i} \delta \varepsilon_{13i} + M_{11i} \delta \kappa_{11i} + M_{12i} \delta \kappa_{12i}) dL_i; \quad (3.11)$$

$$\delta \Pi_j = \int_{L_j} (T_{22j} \delta \varepsilon_{22j} + T_{21j} \delta \varepsilon_{21j} + T_{23j} \delta \varepsilon_{23j} + M_{21j} \delta \kappa_{21j} + M_{22j} \delta \kappa_{22j}) dL_j; \quad (3.12)$$

$$\delta K^i = \int_S \left[\rho_i h_i \left(\frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2} \delta u_1^i + \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial t^2} \delta u_2^i + \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2} \delta u_3^i \right) + \rho_i \frac{h_i^3}{12} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2} \delta \varphi_1^i + \frac{\partial^2 \varphi_2^i}{\partial t^2} \delta \varphi_2^i \right) \right] dS; \quad (3.13)$$

$$\delta K_i = \int_{L_i} \left[\rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2} \delta u_{1i} + \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2} \delta u_{2i} + \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2} \delta u_{3i} \right) + \rho_i \left(I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2} \delta \varphi_{1i} + I_{kri} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2} \delta \varphi_{2i} \right) \right] dL_i; \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \delta K_j = & \int_{L_j} \left[\rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2} \delta u_{1j} + \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2} \delta u_{2j} + \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2} \delta u_{3j} \right) + \right. \\ & \left. + \rho_j \left(I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \delta \varphi_{1j} + I_{2j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} \delta \varphi_{2j} \right) \right] dL_j. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В соотношениях (3.8) – (3.15) для обозначения интегральных характеристик обшивок и ребер введены согласно [6, 33].

После стандартных преобразований в вариационном функционале (3.2) имеем три группы уравнений колебаний:

в гладкой области –

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial S^k}{\partial y} + P_1^k &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S^k}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial y} + \frac{\bar{T}_{23}^k}{R_k} + P_2^k = \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \bar{T}_{13}^k}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_{23}^k}{\partial y} - \frac{T_{22}^k}{R_k} + P_3^k &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}^k}{\partial x} + \frac{\partial H^k}{\partial y} - T_{13}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial H^k}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial y} - T_{23}^k = \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2}; \quad \bar{T}_{13}^k = T_{13}^k + T_{11}^k \theta_1^k + S^k \theta_2^k; \quad \bar{T}_{23}^k = T_{23}^k + T_{22}^k \theta_2^k + S^k \theta_1^k;$$

для i -го дискретного заполнителя, расположенного вдоль оси OX , в данной цилиндрической структуре –

$$\begin{aligned} [S]_i + \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}; \quad [T_{22}]_i + \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2}; \quad [\bar{T}_{23}]_i + \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2}; \\ [H]_i + \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} - T_{13i} &= \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2}; \quad [M_{22}]_i + \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} = \rho_i I_{kri} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\bar{T}_{12i} = T_{12i} + T_{11i} \theta_{2i}; \quad \bar{T}_{13i} = T_{13i} + T_{11i} \theta_{1i};$$

для j -го дискретного элемента, расположенного вдоль оси OY –

$$\begin{aligned} [T_{11}]_j + \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad [S]_j + \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + k_{2j} \bar{T}_{23j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2}; \\ [T_{13}]_j + \frac{\partial \bar{T}_{23j}}{\partial y} - k_{2j} T_{22j} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad [M_{11}]_j + \frac{\partial M_{21j}}{\partial y} = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$[H]_j + \frac{\partial M_{22j}}{\partial y} - T_{23j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2}.$$

Связь между величинами усилий-моментов и соответствующих величин деформаций для обшивок и ребер принимается согласно [6, 33].

Связь между компонентами векторов перемещений, описывающих НДС обшивок, и соответствующими величинами обобщенных векторов перемещений элементов заполнителя представлена согласно следующих формул, в частности, для обшивок и продольных ребер:

$$\begin{aligned} u_{1i}(x) &= u_1^k(x, y_i) \pm H_i^k \varphi_1^k(x, y_i); \quad u_{2i}(x) = u_2^k(x, y_i) \pm H_i^k \varphi_2^k(x, y_i); \\ u_{3i}(x) &= u_3^k(x, y_i); \quad \varphi_{1i}(x) = \varphi_1^k(x, y_i); \quad \varphi_{2i}(x) = \varphi_2^k(x, y_i) \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В соотношениях (3.19) $H_i^k = 0,5(h_i + h_k)$; h_i – высоты i -го элемента дискретного заполнителя; h_k ($k = 1, 2$) – толщины обшивок; y_i – координатная линия проектирования центров тяжести поперечного сечения i -го продольного дискретного элемента заполнителя, направленного вдоль оси OX , на соответствующую срединную поверхность обшивки. Аналогично записываются условия контакта для соответствующих обшивок и поперечных ребер.

Уравнения колебаний неоднородной упругой структуры дополняются естественными граничными и начальными условиями, которые следуют из вариационного принципа (3.2).

3.4. Численные алгоритмы решения задач динамического поведения трехслойных оболочек с дискретным ребристым заполнителем. Рассмотрим численные алгоритмы решения нестационарных динамических задач для трехслойных оболочек с учетом дискретности ребристого заполнителя.

3.4.1. Численные алгоритмы решения динамических осесимметричных задач трехслойных оболочек вращения с ребристым заполнителем. Согласно применения интегро-интерполяционного метода построения разностных схем [69] для уравнений колебаний неоднородных оболочек [6, 33] получены следующие разностные уравнения для (3.6), (3.7):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{A_{2l}^k} \frac{A_{2l+1/2}^k T_{11l+1/2}^{kn} - A_{2l-1/2}^k T_{11l-1/2}^{kn}}{\Delta s} - \\ & - \frac{\Psi_{kl}}{2} (T_{22l+1/2}^{kn} + T_{22l-1/2}^{kn}) + \frac{k_{1l}}{2} (\bar{T}_{13l+1/2}^{kn} + \bar{T}_{13l-1/2}^{kn}) + P_{1l}^{kn} = \rho_k h_k (u_{1l}^{kn})_{\bar{t}t}; \\ & \frac{1}{A_{2l}^k} \frac{A_{2l+1/2}^k \bar{T}_{13l+1/2}^{kn} - A_{2l-1/2}^k \bar{T}_{13l-1/2}^{kn}}{\Delta s} - \frac{k_{1l}}{2} (T_{11l+1/2}^{kn} + T_{11l-1/2}^{kn}) - \frac{k_{2l}}{2} (T_{22l+1/2}^{kn} + T_{22l-1/2}^{kn}) + \\ & + P_{3l}^{kn} = \rho_k h_k (u_{3l}^{kn})_{\bar{t}t}; \\ & \frac{1}{A_{2l}^k} \frac{A_{2l+1/2}^k M_{11l+1/2}^{kn} - A_{2l-1/2}^k M_{11l-1/2}^{kn}}{\Delta s} - \frac{\Psi_{kl}}{2} (M_{22l+1/2}^{kn} + M_{22l-1/2}^{kn}) - \frac{1}{2} (T_{13l+1/2}^{kn} + T_{13l-1/2}^{kn}) + \\ & + m_{1l}^{kn} = \rho_k \frac{h_k^3}{12} (\varphi_{1l}^{kn})_{\bar{t}t}; \\ & \bar{T}_{13l\pm 1/2}^{kn} = T_{13l\pm 1/2}^{kn} + T_{11l\pm 1/2}^{kn} \theta_{1l\pm 1/2}^{kn}; \quad \Psi_{kl} = \frac{1}{A_{2l}^k} \frac{A_{2l+1/2}^k - A_{2l-1/2}^k}{\Delta s}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Разностные соотношения для величин усилий-моментов принимаются согласно [6, 33].

3.4.2. Численный алгоритм решения динамических задач, применяемый к трехслойным цилиндрическим оболочкам с продольно-поперечным дискретным ребристым заполнителем. Согласно подходу [6, 33, 69], разностные соотношения для решения уравнений (3.16) имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{1l+1/2,m}^{kn} - T_{1l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{S_{11l,m+1/2}^{kn} - S_{11l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} + P_{1lm}^{kn} = \rho_k h_k (u_{1lm}^{kn})_{\bar{t}}; \\
& \frac{S_{l+1/2,m}^{kn} - S_{l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{T_{22l,m+1/2}^{kn} - T_{22l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} + \frac{\bar{T}_{23l,m+1/2}^{kn} + \bar{T}_{23l,m-1/2}^{kn}}{2R_k} + P_{2lm}^{kn} = \rho_k h_k (u_{2lm}^{kn})_{\bar{t}}; \\
& \frac{\bar{T}_{13l+1/2,m}^{kn} - \bar{T}_{13l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{\bar{T}_{23l,m+1/2}^{kn} - \bar{T}_{23l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} - \frac{T_{22l,m+1/2}^{kn} + T_{22l,m-1/2}^{kn}}{2R_k} + P_{3lm}^{kn} = \rho_k h_k (u_{3lm}^{kn})_{\bar{t}}; \\
& \frac{M_{11l+1/2,m}^{kn} - M_{11l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{H_{l,m+1/2}^{kn} - H_{l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} - \frac{T_{13l+1/2,m}^{kn} + T_{13l-1/2,m}^{kn}}{2} + m_{1lm}^{kn} = \rho_k \frac{h_k^3}{12} (\varphi_{1lm}^{kn})_{\bar{t}}; \\
& \frac{H_{l+1/2,m}^{kn} - H_{l-1/2,m}^{kn}}{\Delta x} + \frac{M_{22l,m+1/2}^{kn} - M_{22l,m-1/2}^{kn}}{\Delta y} - \frac{T_{23l,m+1/2}^{kn} + T_{23l,m-1/2}^{kn}}{2} + m_{2lm}^{kn} = \rho_k \frac{h_k^3}{12} (\varphi_{2lm}^{kn})_{\bar{t}}; \\
& \bar{T}_{13l\pm 1/2,m}^{kn} = T_{13l\pm 1/2,m}^{kn} + T_{11l\pm 1/2,m}^{kn} \theta_{1l\pm 1/2,m}^{kn} + S_{l\pm 1/2,m}^{kn} \theta_{2l\pm 1/2,m}^{kn}; \\
& \bar{T}_{23l,m\pm 1/2}^{kn} = T_{23l,m\pm 1/2}^{kn} + T_{22l,m\pm 1/2}^{kn} \theta_{2l,m\pm 1/2}^{kn} + S_{l,m\pm 1/2}^{kn} \theta_{1l,m\pm 1/2}^{kn}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Аналогичным образом записываем конечно – разностные соотношения для продольного i -го и поперечного j -го подкрепляющих элементов [6, 33, 62, 63, 101].

3.5. Вынужденные колебания трехслойных оболочек с дискретным ребристым заполнителем. Рассмотрены задачи динамического поведения теории трехслойных оболочек вращения с дискретным ребристым заполнителем при осесимметричных нестационарных нагрузках. Приведены постановки задач и численные алгоритмы решения уравнений колебаний трехслойных оболочек вращения с дискретным ребристым заполнителем. Представлены численные результаты решений динамических задач нестационарного поведения трехслойных оболочек вращения с дискретным ребристым заполнителем (цилиндрических, сферических, конических и эллипсоидальных оболочек) в широком диапазоне изменения физико-механических и геометрических параметров при разных видах граничных условий и типах нагрузки [6, 33].

Рассмотрены задачи динамического деформирования трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным заполнителем в случаях: жесткое закрепление краев оболочки при внутренней распределенной нагрузке; один из краев оболочки жестко закреплен, а второй свободный при внутреннем распределенном нагружении; задачи нестационарного поведения незамкнутых трехслойных сферических, конических и эллипсоидальных оболочек в случаях жесткого закрепления краев и свободных краев при внутренней распределенной нагрузке [6, 33].

Численный алгоритм решения нестационарных задач теории неоднородных трехслойных оболочек основан на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем по пространственным координатам и явной конечно-разностной схеме типа «крест» по временной координате. В силу исходной постановки задач численное решение определим в гладкой области упругой структуры (для обшивок между дискретными элементами заполнителя) и на линиях пространственных разрывов (для соответствующих элементов заполнителя).

Каждая группа уравнений для элементов неоднородной упругой структуры представляется в виде двух систем уравнений. Одна из них – уравнения колебаний элементов трехслойных оболочек (для обшивок, продольных и поперечных элементов заполнителя), а вторая – соотношение обобщенного закона Гука для каждого из указанных элементов. Переход от непрерывной системы уравнений к конечно-разностной выполняется в *два этапа*. *Первый этап* заключается в конечно-разностной аппроксимации дивергентных уравнений колебаний в усилиях-моментах, основанный на применении интегро-интерполяционного метода аппроксимации уравнений колебаний. *Второй этап* аппроксимации уравнений заключается в выборе энергетически

согласованных конечно-разностных аппроксимаций величин усилий-моментов и соответствующих величин деформаций таким образом, чтобы выполнялся конечно-разностный аналог энергетического уравнения.

Ниже описаны алгоритмы решения задач осесимметричных колебаний для трехслойных цилиндрических оболочек и оболочек вращения с учетом дискретности заполнителя при нестационарных нагрузках. Исходя из того, что явные конечно-разностные схемы являются условно устойчивыми, для случая цилиндрических оболочек проведено исследование устойчивости соответствующих разностных уравнений и получено необходимое условие устойчивости конечно-разностных уравнений. Случай неосесимметричных колебаний рассмотрен для цилиндрических оболочек с учетом продольно-поперечного дискретного заполнителя. Соответственно, построены алгоритмы получения решений в гладкой области срединных поверхностей обшивок и алгоритмы для получения решений по линиям пространственных разрывов (линии центра тяжести поперечного сечения продольных и поперечных дискретных элементов заполнителя). Для этого случая проведено исследование устойчивости разностных уравнений и получено необходимое условие устойчивости.

Приведены решения конкретных задач динамического поведения трехслойных оболочек различной геометрии при нестационарных нагрузках и исследованы закономерности протекания волновых процессов в оболочечных структурах с учетом дискретности ребристого заполнителя [62, 63]. Изложены результаты и анализ численного решения задач осесимметричных колебаний трехслойных оболочек вращения (цилиндрических, сферических и конических) при нестационарных нагрузках. Рассмотрены задачи динамического деформирования цилиндрических оболочек при различных граничных условиях (случай жесткого закрепления торцов оболочки при внутренней осесимметричной распределенной нагрузке и случай, когда к свободному краю приложена продольная краевая нагрузка).

Проведено сравнение численных результатов колебаний цилиндрических оболочек согласно изложенной в [62] теории с результатами, полученными согласно конструктивно-ортотропной модели трехслойных оболочек. Рассмотрена задача о динамическом поведении трехслойной цилиндрической оболочки с заполнителем, который представляет собой набор дискретных кольцевых ребер, при внутренней нормальной осесимметричной импульсной нагрузке. При этом использованы уравнения колебаний с учетом дискретности заполнителя и уравнения колебаний согласно конструктивно-ортотропной теории трехслойных цилиндрических оболочек. Принято, что края оболочек жестко защемлены. Начальные условия – нулевые.

Осесимметричные колебания трехслойных цилиндрических оболочек согласно указанных теорий рассмотрены при следующих геометрических и физико-механических параметрах: $L/h_1 = 40$; $h_1 = h_2$; $R_1/h_1 = 10$; $H_j/h_1 = 2$; $F_j = H_j h_1$; $E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Нормальная импульсная нагрузка задана в виде (2.13). Подкрепляющие элементы расположены в точках $x_j = [11 + (k-1) \cdot 15] \cdot \Delta x$ ($k=1, \dots, 5$, $\Delta x = L/80$). Полученные

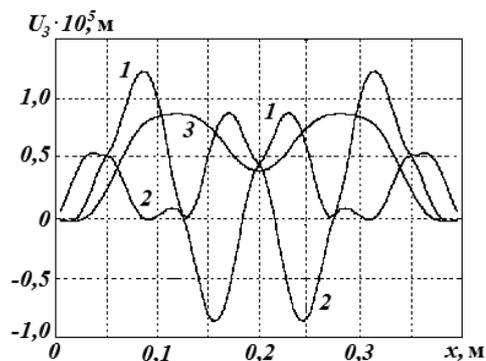


Рис. 3.2

численные результаты позволяют характеризовать НДС трехслойной упругой структуры цилиндрического типа в любой момент времени на исследуемом временном интервале согласно вышеуказанных постановок. Расчеты проведены на временном интервале $0 \leq t \leq 40T$. В частности, на рис. 3.2 приведены зависимости величин прогиба u_3 от пространственной координаты x , (м) в момент времени $t = 6T$ (момент достижения величиной u_3 максимального значения на интервале расчета по времени t). Кривая 1 соответ-

вует теории с дискретным размещением ребер (внутренний слой); кривая 2 – (внешний слой); кривая 3 – конструктивно-ортотропной теории трехслойных оболочек с заполнителем. Согласно приведенным численным данным наблюдается качественное и количественное отличие полученных результатов. Учет дискретности размещения ребер (на рисунках – точки соединения кривых 1 и 2) приводит к более густому волнообразованию величины по длине конструкции. Расчеты по конструктивно-ортотропной модели дают некоторые интегральные кривые, которые имеют место в пределах изменения величин u_3 внутреннего и внешнего слоев согласно теории с учетом дискретности ребер. Анализируя количественный характер приведенных результатов видим, что отличие по максимальным величинам u_3 (согласно приведенным теориям) достигает $\approx 40\%$.

Исследовано динамическое поведение незамкнутых, со свободным отверстием, трехслойных полусферических оболочек при внутренней распределенной нагрузке $P_3(s, t)$. Принято, что один край оболочки при $\alpha_1 = \alpha_{10}$ – свободный, а другой край оболочки при $\alpha_1 = \alpha_{1N}$ – закреплен. Граничные условия для свободного края при $\alpha_1 = \alpha_{10}$ имеют следующий вид: $T_{11}^k = 0$, $\bar{T}_{13}^k = 0$, $M_{11}^k = 0$ ($k = 1, 2$). Для случая жесткого закрепления при $\alpha_1 = \alpha_{1N}$ принято: $u_1^k = u_3^k = \varphi_1^k = 0$; $k = 1, 2$. Нестационарная импульсная нагрузка задана в виде (2.13). Принято также, что обшивки изготовлены из ортотропного материала. Расчеты проведены при следующих геометрических и физико-механических параметрах: $E_1^1 = E_1^2 = 19 \cdot 10^9$ Па; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,12$; $E_2^1 = E_2^2 = E_j = 33 \cdot 10^9$ Па; $G_{13}^1 = G_{13}^2 = 3,69 \cdot 10^9$; $R_1 = 0,3$ м; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 1,9 \cdot 10^3$ кг/м³; $R_1 / h_1 = 30$; $h_1 = h_2$; $h_j = 2h$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $\alpha_{10} = \pi / 12$; $\alpha_{1N} = \pi / 2$. Дискретные подкрепляющие элементы расположены в точках $\alpha_j = [3 + (m - 1) \cdot 16] \cdot \Delta\alpha$, $m = \overline{1, 5}$; $\Delta\alpha = (\alpha_{1N} - \alpha_{10}) / 80$.

Полученные численные результаты позволяют проводить анализ НДС трехслойной упругой структуры сферического типа в произвольный момент времени (расчеты проведены на временном интервале $0 \leq t \leq 40T$) согласно данной постановке задачи. В частности, на рис. 3.3 представлены зависимости величин u_3 от пространственной координаты α_1 ; кривая 1 соответствует величине u_3 для внутренней сферической оболочки, а кривая 2 – величине u_3 для внешней сферической оболочки в момент времени $t = 7T$. Точки соединения кривых 1 и 2 указывают на размещение дискретных ребер.

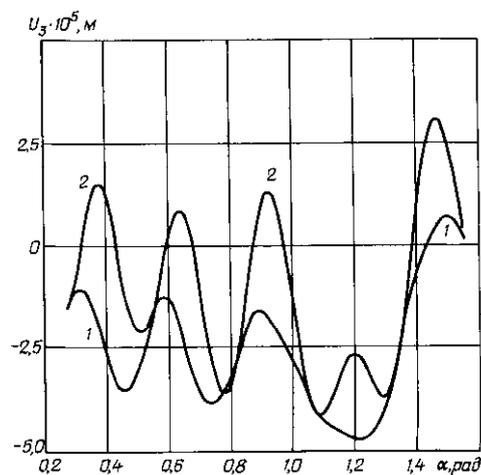


Рис. 3.3

Рассмотрена задача об осесимметричных колебаниях жестко закрепленной по краям трехслойной конической оболочки под действием внутренней распределенной нагрузки. Исследована численная сходимость полученных результатов на примере динамического поведения жестко защемленной по краям трехслойной цилиндрической оболочки с учетом дискретного ребристого заполнителя при распределенной нагрузке.

Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек при распределенной динамической нагрузке рассмотрены для случаев цилиндрических структур с учетом как продольного, так и продольно-поперечного дискретных заполнителей. В частнос-

ти, задача о неосесимметричных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки с учетом продольно-поперечного дискретного заполнителя при нормальной внутренней нагрузке рассмотрена для случая жесткого закрепления краев исходной структуры. При этом приняты следующие геометрические и физико-механические параметры: $L/h_1 = 80$, $h_1 = h_2$, $R_1/h_1 = 20$, $h_i = 2h_1$, $i = \overline{1, I}$; $h_j = h_1$, $j = \overline{1, J}$; $E_1^1 = E_1^2 = E_i = E_j = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_i = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, где R_k, h_k ($k = 1, 2$) – радиус срединной поверхности и толщина, соответственно, внутренней и внешней оболочек; L – длина конструкции. Рассмотрен случай продольно-поперечного дискретного заполнителя при $I = 4$ и $J = 3$, когда дискретные элементы равномерно расположены по пространственным координатам между внутренней и внешней обшивками. Центры тяжести поперечного сечения дискретных элементов заполнителя проецируются на соответствующие срединные поверхности обшивок по линиям $y = (i-1)\pi R/2$ ($i = \overline{1, 4}$) и $x_j = jL/4$ ($j = \overline{1, 3}$). Нормальная импульсная нагрузка задана в виде (2.13).

На рис. 3.4 и рис. 3.5 приведены зависимости величин u_3 и σ_{22} между продольными ребрами по оси симметрии вдоль пространственной координате x в момент времени $t = 7,5T$. Кривые 1 соответствуют величинам внутренней обшивки (прогиб, напряжение), а кривые 2 – величинам внешней обшивки.

Исходя из представленного графического материала (рис. 3.4), выразительно наблюдается местоположение поперечных дискретных подкрепляющих ребер ($x_j = jL/4$, $j = \overline{1, 3}$) – это точки соединения кривых 1 и 2.

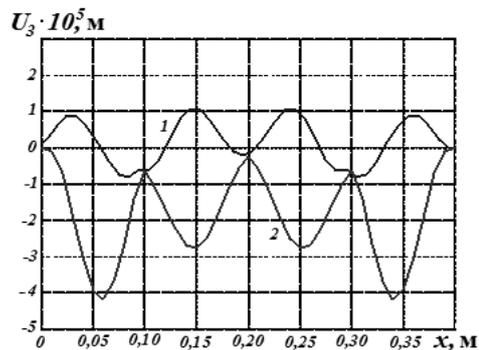


Рис. 3.4

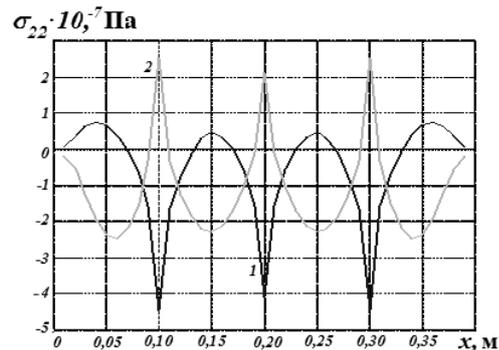


Рис. 3.5

Проведен анализ полученных результатов (величин u_3 , ε_{11} , ε_{22} , σ_{11} , σ_{22}) по линии симметрии между продольными ребрами и по линии расположения продольного ребра для внутренней и внешней обшивок на исследуемом временном интервале (в частности, для моментов времени, когда соответствующие кинематические и статические величины достигают максимальных значений). Сравнительный анализ величины u_3 вдоль ребра и величины u_3 по линии симметрии ребра показывает, что отличие по максимальным величинам достигает 1,8 раза. Аналогичная закономерность наблюдается для величин ε_{22} , σ_{22} . Характерной особенностью величин ε_{11} , ε_{22} , σ_{11} , σ_{22} является их пилообразный вид в местах расположения поперечных ребер $x_j = jL/4$, ($j = \overline{1, 3}$), что представлено на рис. 3.5. Это объясняется особенностью модели и алгоритма решения задач динамического поведения трехслойных оболочек с учетом дискретности продольно-поперечного заполнителя – определение решения в гладкой области обшивок и на линиях пространственных разрывов (вдоль линий центра тяжести поперечного сечения i -го ребра (по оси OX) и j -го ребра (по оси OY)).

§4. Влияние упругих сред на динамику оболочечных систем.

Изучению колебаний ребристых незамкнутых пологих оболочек посвящено достаточно большое число работ [6, 143]. В отличие от известных публикаций ниже основное внимание уделено исследованию влияния упругого основания Винклера и Пастернака [67] на собственные частоты и формы колебаний ребристых оболочек, прямоугольных в плане. Исследования проведены на основе классической теории пологих подкрепленных оболочек [3] с учетом воздействия упругого основания [12, 13, 95, 96]. Учет действия упругого основания происходит путем добавления в третьи из уравнений движения изотропных пологих ребристых оболочек [3] следующих слагаемых: $-C_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) + C_1 u_3$, где C_1, C_2 – коэффициенты постели Винклера и

Пастернака, соответственно. Решения, таким образом полученной системы уравнений движения для оболочек с шарнирно опертыми краями, определяются в виде двойных тригонометрических рядов

$$u_1 = \cos \omega t \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos \frac{\pi m x_1}{\alpha_1} \sin \frac{\pi n x_2}{\alpha_2}; \quad u_2 = \cos \omega t \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \cos \frac{\pi m x_1}{\alpha_1} \sin \frac{\pi n x_2}{\alpha_2};$$

$$u_3 = \cos \omega t \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cos \frac{\pi m x_1}{\alpha_1} \sin \frac{\pi n x_2}{\alpha_2},$$
(4.1)

где ω – круговая частота; α_1, α_2 – размеры оболочки в плане.

После подстановки (4.1) в полученные уравнения движения изотропных пологих ребристых оболочек на упругом основании, прямоугольных в плане [12, 13, 95, 96], задача определения собственных частот колебаний сведена к определению корней редуцированных систем алгебраических уравнений, а определение собственных форм колебаний – к решению указанных систем.

4.1. Влияние упругого основания на собственные частоты и формы колебаний оболочек. Исследование влияния упругого основания на собственные частоты и формы колебаний проведено для пологой сферической оболочки, подкрепленной шпангоутами и стрингерами [95, 96].

На рис. 4.1 – 4.3 показаны, соответственно, формы изменения прогиба (u_3) по длине оболочки без упругого основания, с основаниями Винклера и Пастернака при подкреплении ее одним, двумя, тремя и четырьмя ребрами, равномерно расположенными по длине и ширине оболочки. Расположение ребер изображено на рисунках по оси абсцисс в виде (•), (×) и (□). Полученные кривые соответствуют минимальным собственным частотам оболочки, квадратной в плане.

Из анализа результатов рис. 4.1 – 4.3 следует, что с увеличением числа ребер происходит изменение формы прогиба по длине оболочки. Так, для оболочки без упругого основания при подкреплении оболочки одним ребром, расположенным по центральному сечению оболочки, происходит деформация, при которой ребра только закручиваются.

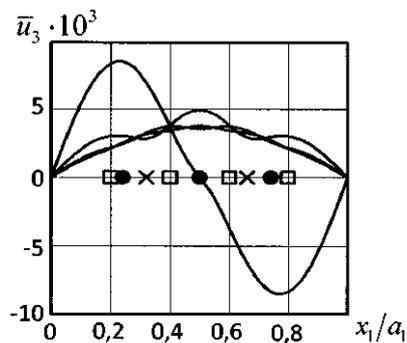


Рис. 4.1

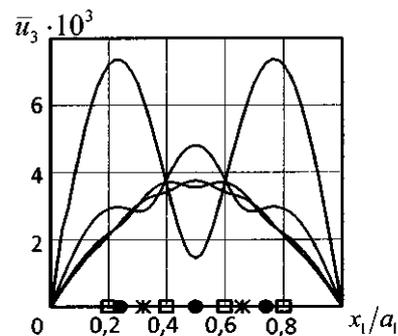


Рис. 4.2

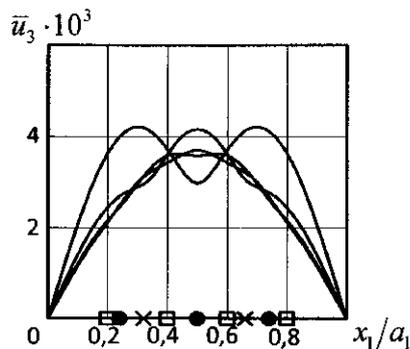


Рис. 4.3

упругого основания. Из сравнения результатов (кривые рис. 4.1–4.3) видно, что упругое основание оказало большое влияние на форму прогиба только при подкреплении оболочки одним ребром. Для оболочки без основания наблюдается деформация оболочки, когда ребро только закручивается, а при наличии упругого основания – ребро практически не деформируется. При подкреплении оболочки большим количеством ребер ($n = 4$) вид формы прогиба для оболочки с упругим основанием и без него не изменяется.

Получены также результаты вычисления первых пяти собственных частот в зависимости от изменения коэффициентов упругого основания Пастернака \bar{C}_1 , \bar{C}_2 для оболочки, подкрепленной, соответственно, одним и двумя ребрами в двух направлениях. С увеличением значений коэффициентов \bar{C}_1 , \bar{C}_2 величины собственных частот возрастают, причем с увеличением коэффициента \bar{C}_1 значения интервалов изменения коэффициента \bar{C}_2 , в которых происходит изменение формы колебаний, соответствующей минимальной частоте, уменьшаются. Если для оболочки, подкрепленной одним ребром по центральным сечениям, характерно резкое изменение формы колебаний, соответствующей минимальной частоте, которому предшествует появление кратных минимальных частот, то при подкреплении двумя ребрами изменение формы колебаний происходит плавно (форма прогиба приближается к одной полуволне).

Из анализа полученных результатов следует, что упругому основанию Пастернака соответствуют более высокие значения собственных частот, чем основанию Винклера. С изменением величины коэффициентов упругого основания происходит не только изменение значений собственных частот, но при этом возможно изменение формы колебаний. По сравнению с оболочками без упругого основания здесь появляется больше частот, близких к кратным, но имеющих разные формы колебаний.

По аналогичной методике исследовано влияние упругого основания и числа подкрепляющих ребер на собственные частоты и формы колебаний для квадратных в плане пологих цилиндрических оболочек, подкрепленных шпангоутами и стрингерами с теми же физико-механическими характеристиками [12, 13, 141 – 143]. Полученные результаты аналогичны приведенным выше для сферической оболочки.

На основании проведенного исследования можно заключить о том, что для пологих цилиндрических и сферических оболочек с прямоугольным планом, подкрепленных малым числом достаточно жестких ребер, определение собственных частот следует выполнять на основе методики, учитывающей дискретное размещение ребер. Увеличение числа подкрепляющих оболочку ребер и наличие упругого основания приводит не только к увеличению значений собственных частот, но при этом изменяется и форма колебаний.

На числовых примерах исследовано влияние упругого основания Винклера и количества подкрепляющих ребер на минимальные собственные частоты цилиндрической оболочки. Использована теория конструктивно ортотропных оболочек [3] с учетом влияния упругого основания [35]. В этом случае учет влияния ребер на величины волновых параметров может быть выполнен в одномодовом приближении:

Если увеличить число ребер вдвое, то наблюдается деформация, когда ребра изгибаются и закручиваются. При дальнейшем увеличении числа ребер деформация оболочки по длине соответствует одной полуволне.

Аналогичные выводы имеют место и для оболочек на упругом основании. В этом случае при подкреплении оболочки одним ребром по центральным сечениям наблюдается деформация, когда ребра практически не деформируются. Увеличению числа ребер соответствует деформация ребер с изгибом и кручением. Начиная с числа ребер, равном четырем, рассматриваемая оболочка деформируется по одной полуволне вдоль длины оболочки как и для оболочки без

$$\begin{aligned}
u &= u_{mn} \cos d_m \xi \sin n\theta \cos \omega_1 t_1; \quad v = v_{mn} \cos d_m \xi \sin n\theta \cos \omega_1 t_1; \\
w &= w_{mn} \cos d_m \xi \sin n\theta \cos \omega_1 t_1.
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

После подстановки (4.2) в соответствующие уравнения для подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании [35] задача определения собственных частот колебаний сведена к определению корней системы алгебраических уравнений третьего порядка. Исследование влияния упругого основания и подкрепления на собственные частоты и формы колебаний проведено на примере ребристой цилиндрической оболочки.

Результаты вычисления минимальных собственных частот в зависимости от количества подкрепляющих ребер для стрингерной, шпангоутной оболочек и оболочек, подкрепленных перекрестной системой ребер, характеризуют зависимость минимальных значений собственных частот от величины коэффициента упругого основания Винклера \bar{C}_1 . Сначала происходит возрастание собственных частот, а затем их снижение. Так, например, для стрингерной оболочки уже при восьми стрингерах наблюдается уменьшение значений собственных частот. Для оболочки, подкрепленной стрингерами и шпангоутами, такое снижение происходит в зависимости от коэффициента упругого основания. Так, для $\bar{C}_1 < 0,05$, значения собственных частот уменьшаются при подкреплении оболочки 16 ребрами в одном и другом направлениях. Для $\bar{C}_1 > 0,05$ такое снижение наблюдается при подкреплении оболочки 8 ребрами. Уменьшение значений собственных частот объясняется работой ребер как присоединенных масс. Поэтому существует необходимость выбора рационального ребристого подкрепления. Подобные приведенным выше исследованиям работы, отражены в статьях [79, 80, 83, 85 – 90, 92, 107, 109, 123].

В работе [84] изучено распространение гармонических волн в цилиндрической оболочке. Статьи [102, 117] посвящены исследованию влияния упругого основания типа Винклера на распространение гармонических волн в ортотропной цилиндрической оболочке, а влияние двухпараметрического основания (Пастернака) – на распространение гармонических волн в ортотропной цилиндрической оболочке изучено в [7]. Проведенное асимптотическое исследование возможных решений дисперсионного уравнения для длинных волн дало следующий результат:

$$V = \sqrt{\frac{E_1 E_2 h + C_1 E_1 R^2}{\rho [E_2 h + C_1 R^2 (1 - \nu_{12} \nu_{21})]}}; \quad C_1 = 0; \quad V_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}}; \quad C_1 = \infty; \quad V_2 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho (1 - \nu_{12} \nu_{21})}}.$$

Оболочка без постели имеет стержневую скорость, а с абсолютно жесткой постелью – пластинчатую. Для тонких оболочек получены следующие значения скоростей:

$$V_2 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho (1 - \nu_{12} \nu_{21})}}; \quad V_3 = \mu \sqrt{\frac{G_{13}}{\rho} \left[1 + \frac{C_2}{\mu^2 G_{13} h} \right]}.$$

В этом случае оболочка имеет пластинчатую скорость, а коэффициент C_2 существенно влияет на скорость сдвиговых волн.

Ниже с учетом дискретного размещения ребер исследовано влияние упругого основания Винклера и Пастернака на частоты записания, число и форму дисперсионных кривых для гармонических волн, распространяющихся вдоль продольно подкрепленной замкнутой цилиндрической оболочки [100]. Рассмотрена замкнутая круговая цилиндрическая оболочка с шарнирно опертыми краями, подкрепленная регулярной системой продольных ребер (все ребра имеют одинаковые геометрические и механические параметры и размещены на равных взаимных расстояниях). Оболочка находится на упругом основании, которое характеризуется коэффициентами Винклера или Пастернака C_1, C_2 .

Уравнения движения получены на основе прикладных теорий оболочек и стержней [3]: с учетом наличия упругого основания они получены в работах [26, 36, 100].

Для решения системы уравнений движения [100] используем представление его в виде рядов:

$$u = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n1} \cos n\theta + u_{n2} \sin n\theta) \cos \omega_1 t_1; \quad v = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (v_{n1} \sin n\theta + v_{n2} \cos n\theta) \cos \omega_1 t_1; \quad (4.3)$$

$$w = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n1} \cos n\theta + w_{n2} \sin n\theta) \cos \omega_1 t_1,$$

где u_{ns}, v_{ns}, w_{ns} ($s=1, 2$) – неизвестные постоянные; k – безразмерный волновой параметр (соответствующая ему длина волны $\lambda = 2\pi r / k$), $\omega_1 = \omega / \omega_0$; $\omega_0 = 1 / r \sqrt{E / (1 - \nu^2) \rho_0}$.

Используя подстановку (4.3) в уравнения движения [100], задача сведена к определению u_{ns}, v_{ns}, w_{ns} из бесконечных систем однородных линейных алгебраических уравнений, которые имеют точное решение. На его основе получены дисперсионные уравнения трех типов [100].

Таким образом, определение волновых параметров сведено к вычислению корней уравнений двух типов:

$$1 + L_n^{11} + L_n^{33} + L_n^{11} L_n^{33} + L_n^{13} L_n^{31} = 0, \quad (4.4)$$

$n = 1, \dots, n_2$ (общий случай деформации); $n = 0, (k_1 / 2) \delta_{k_1 2s_1}$ (первый частный случай деформации); для второго частного случая деформации указанные уравнения имеют вид

$$1 + L_n^{22} + L_n^{44} + L_n^{22} L_n^{44} + L_n^{24} L_n^{42} = 0 \quad (n = 0, \delta_{k_1 2s_1} k_1 / 2). \quad (4.5)$$

Выше приняты такие обозначения: $n_2 = k_1 / 2$ (при k_1 – четном); $n_2 = (k_1 - 1) / 2$ (при k_1 – нечетном); $2n$ – число узловых линий формы волны в окружном направлении; $\delta_{k_1 2s_1}$ – символ Кронеккера; $s_1 = 1, 2, \dots$.

Уравнения для вычисления частот запираания могут быть получены из (4.4) и (4.5) с учетом $k = 0$. Численные данные получены для оболочки, усиленной четырьмя ребрами ($k = 4$), размещенными на внутренней поверхности обшивки. Рассматриваемый интервал частот возбуждения: $0 \leq \omega_1 \leq 0,2$. Поскольку рассмотрены гармонические волны, распространяющиеся вдоль оболочки, ниже определены только действительные корни уравнений (4.4), (4.5). Результаты вычисления частот запираания и построения дисперсионных кривых представлены для трех вариантов нагружения ребристой оболочки гармонической нагрузкой: циклически симметричной в окружном направлении с периодом $2\pi / k_1$ ($n = 0$); циклически симметричной в окружном направлении с периодом $4\pi / k_1$ ($n = k_1 / 2$) и антисимметричной в окружном направлении нагрузкой ($n = 1$).

В рассматриваемом диапазоне частот возбуждения с увеличением коэффициентов упругого основания частоты запираания возрастают по сравнению с частотами для оболочки без упругого основания. При достаточно больших значениях коэффициентов упругого основания число частот запираания уменьшается. Упругому основанию Пастернака соответствуют более высокие значения частот запираания по сравнению с частотами запираания для упругого основания Винклера.

На рис. 4.4, 4.5 представлены дисперсионные кривые для случая деформирования оболочки, когда $n = 0$, в зависимости от коэффициента упругого основания Винклера. Кривые на рис. 4.4 соответствуют оболочке без упругого основания $\bar{C}_1 = 0$, на рис. 4.5 – для $\bar{C}_1 = 0,01$. Как видно из рис. 4.4, 4.5, с увеличением коэффициента упругого основания Винклера изменяется форма дисперсионных кривых: они становятся более пологими.

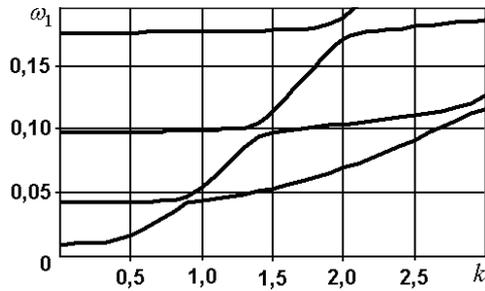


Рис. 4.4

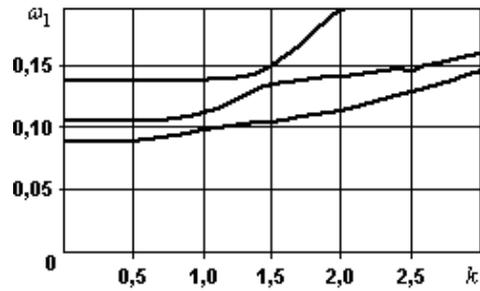


Рис. 4.5

На рис. 4.6 показаны дисперсионные кривые гармонических волн, распространяющихся вдоль продольно подкрепленной цилиндрической оболочки, находящейся на упругом основании Пастернака ($\bar{C}_1 = 0,001$ и $\bar{C}_2 = 0,005$). Дисперсионные кривые рис. 4.6 соответствуют гармоническим волнам произвольного профиля в окружном направлении (длина волны не кратна расстоянию между ребрами – общий случай деформирования оболочки).

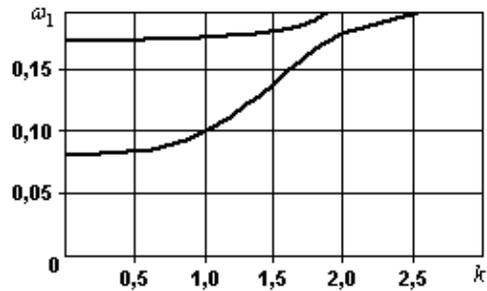


Рис. 4.6

Учет дискретного размещения ребер позволяет построить дисперсионные кривые для частного случая деформирования оболочки, когда волны имеют пучности на ребрах.

Анализ полученных результатов показывает, что с увеличением коэффициентов упругого основания величины частот записания возрастают, а их количество в заданном диапазоне частот возбуждения уменьшается. Форма дисперсионных кривых для рассмотренных случаев деформирования оболочки с возрастанием коэффициентов упругого основания изменяется – они становятся более пологими.

Значительное количество дискретно подкрепленных оболочечных конструкций, контактирующих с упругой средой, в процессе эксплуатации имеют упругие прогибы, сравнимые с их толщиной. Поэтому задачи динамического поведения тонких оболочек следует проводить на основе геометрически нелинейной теории стержней и оболочек с учетом гипотез Тимошенко [6, 8, 9, 20, 27, 30, 81, 102, 138, 143]. Численный алгоритм решения нестационарных задач теории подкрепленных оболочек на упругом основании базируется на применении интегро-интерполяционного метода построения конечно-разностных схем по пространственным координатам и явной конечно-разностной схемы по временной координате [6, 33]. При выводе уравнений колебаний подкрепленных оболочек вращения с учетом внешней среды полагалось, что НДС неоднородной упругой структуры может быть определено в рамках геометрически нелинейной теории оболочек и стержней с учетом гипотез Тимошенко [6, 33]. Деформированное состояние срединной поверхности обшивки определяется через компоненты обобщенного вектора перемещений $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$. Деформированное состояние центра тяжести поперечного сечения ребра, направленного вдоль оси x , определено обобщенным вектором перемещения $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$; соответственно, ребра, направленного вдоль оси y – вектором $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$. Принято, что оболочка и дискретные подкрепляющие ребра жестко соединены между собой.

Для вывода уравнений колебаний дискретно подкрепленной структуры используется вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, согласно которого

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - T) - \delta A] dt = 0, \quad (4.6)$$

где Π – потенциальная энергия системы с учетом упругого основания, T – кинетическая энергия системы; A – работа внешних сил.

Выражение для потенциальной энергии имеет вид $\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^I \Pi_i + \sum_{j=1}^J \Pi_j + \Pi_{foun}$,

где Π_0 – потенциальная энергия обшивки, Π_i – потенциальная энергия i -го ребра, Π_j – потенциальная энергия j -го ребра, Π_{foun} – потенциальная энергия упругого основания (модель Пастернака).

После стандартных преобразований в функционале (4.6), с учетом интегральных характеристик напряжений оболочки и ребер, получим три группы уравнений:

– уравнения колебаний собственно гладкой оболочки

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{T_{23}}{R} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\ C_2 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} - \frac{T_{22}}{R} - C_1 u_3 + P_3 &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

– уравнения колебания i -го ребра вдоль линии центра тяжести поперечного сечения центра ребра

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [S] &= \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \quad \frac{\partial T_{12i}}{\partial x} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} + [T_{23}] &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} - T_{13i} + [H] &= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right]; \\ \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [M_{22}] &= \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right]; \end{aligned}$$

– уравнения колебания j -го ребра вдоль линии центра тяжести поперечного сечения центра ребра

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21j}}{\partial y} + [T_{11}] &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \quad \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S] = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial T_{23j}}{\partial y} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [T_{13}] &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial y} + [M_{11}] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{krj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right];$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} - T_{23j} + [H] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

Уравнения колебаний (4.7) – (4.9) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Разработанная и апробированная методика расчета динамики оболочек вращения на упругом основании в геометрически линейной и нелинейной постановках позволяет исследовать динамику дискретно подкрепленных цилиндрических [6, 8, 9, 20 – 22, 31, 33], сферических [6, 21, 23, 27, 33] и конических оболочек [30, 53] на упругом основании.

Рассмотрена задача динамического поведения дискретно подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки на упругом основании типа Винклера (в уравнениях (4.7) полагалось $C_2 = 0$) под действием распределенной внутренней импульсной нагрузки [6]. Принято, что торцы оболочки при $x = 0, x = L$ жестко закреплены. Осесимметричные колебания подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании Винклера рассмотрены при следующих геометрических и физико-механических параметрах: стальная оболочка радиусом $R = 0,1$ м, толщиной $h = 0,01$ м, $L/h = 80$, $R/h = 10$, коэффициент Пуассона – $\nu = 0,3$; плотность $\rho_{об} = 7880$ кг/м, $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $c_w = 4,6 \cdot 10^{10}$ Н/м³.

Нормальная импульсная нагрузка задана в виде (2.13).

На рис. 4.7 и рис. 4.8 приведены зависимости величин прогиба u_3 и напряжений σ_{22} в зависимости от пространственной координаты x в момент времени $t = 3T$. Кривые с индексом 1 соответствуют случаю учета основания Винклера, кривые с индексом 2 – без учета основания. Различие по максимальным значениям величин u_3 и σ_{22} достигает порядка 50%. Четко проявляются линии месторасположения ребер $x_j = jL/4$ ($j = \overline{1, 3}$).

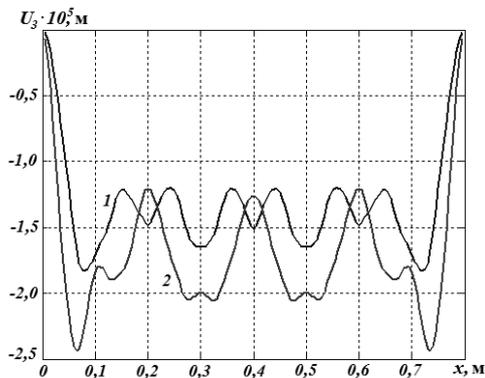


Рис. 4.7

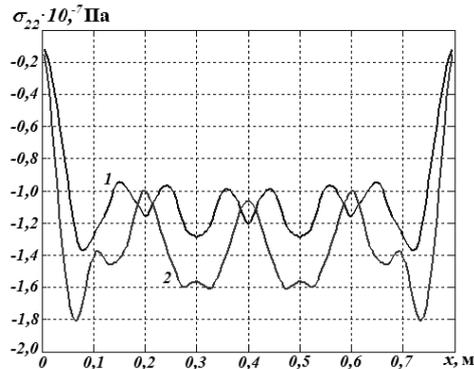


Рис. 4.8

Рассмотрена подкрепленная сферическая оболочка на упругом основании Пастернака [27]. В уравнениях колебаний и деформационных соотношениях параметры первой квадратичной формы и кривизны срединной поверхности гладкой оболочки приняты следующими: $A_1 = R$; $A_2 = R \sin \alpha_1$; $k_1 = k_2 = R$, где R – радиус срединной поверхности; α_1 – меридианальный угол.

Принято, что торцы оболочки жестко защемлены в параллельных сечениях α_{10} и α_{1N} и имеют место следующие граничные условия: $u_1 = u_2 = \varphi_1 = 0$. Начальные условия – нулевые.

Ко внутренней поверхности сферической оболочки приложена распределенная нагрузка вида (2.13). Решение задачи проведено при следующих геометрических и физико-механических параметрах: $\alpha_{10} = \pi/12$; $\alpha_{1N} = \pi/2$; $R/h = 60$; $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па;

$\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,3$; $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Коэффициенты постели: $C_1 = 0,25 \cdot 10^8 \text{ н/м}^3$; $C_2 = 10^7 \text{ н/м}$. Ребра расположены в точках $s_j = 0,2L_j$ ($L \equiv \overline{1, 4}$); $L = (\alpha_{1N} - \alpha_{10})R$.

Численные расчеты проведены на временном интервале $t = 10T$. На рис. 4.9, 4.10 показаны зависимости величин u_3 и σ_{22} от пространственной координаты. Кривая 1 на рис. 4.9, 4.10 соответствует времени $t = 2T$; кривая 2 – $t = 9T$ (рис. 4.9) и $t = 10T$ (рис. 4.10).

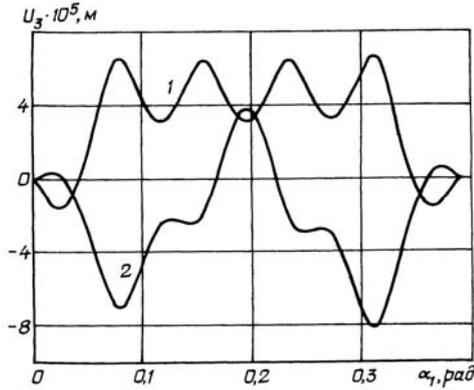


Рис. 4.9

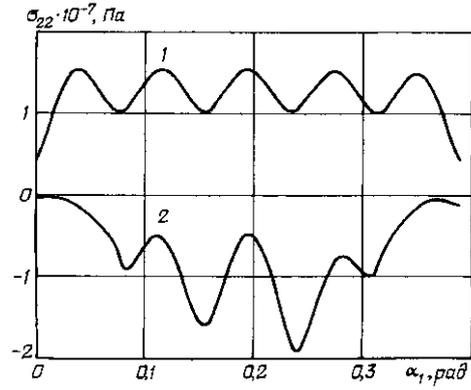


Рис. 4.10

Как видно из графиков, четко проявляется влияние подкрепляющих элементов на состояние неоднородной конструкции на упругом основании.

На рис. 4.11, 4.12 приведены зависимости величин u_3 и σ_{22} от временной координаты в сечении оболочки $s = L/2$. Здесь кривая 1 соответствует зависимостям с учетом упругого основания, кривая 2 – без учета. Кривые 1 и 2 совпадают до времени $t = 2T$, после чего наблюдается их расхождение в амплитудном и частотном диапазонах. Для сравнения на рис. 4.13 приведены результаты динамического поведения гладкой сферической оболочки данной конфигурации (по величинам σ_{22}); кривая 1 соответствует величинам напряжений без учета основания, кривая 2 – с их учетом. В данном случае совпадение результатов наблюдается до времени $t = 4T$.

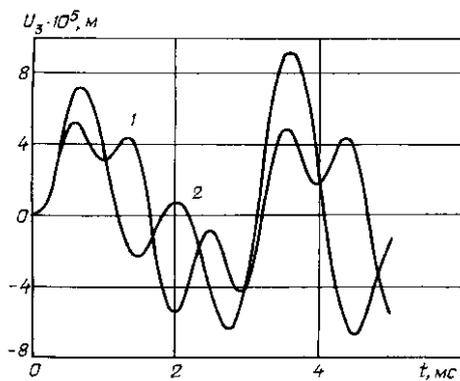


Рис. 4.11

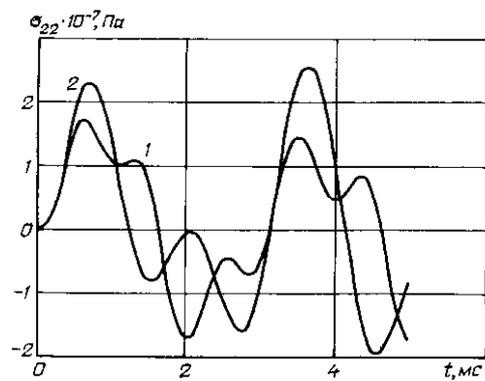


Рис. 4.12

Рассмотрена изотропная подкрепленная коническая оболочка вращения, заключенная в упругую среду Винклера, под действием внутренней импульсной нагрузки [30]. В работе [53] изучено динамическое поведение конической оболочки переменной толщины на упругом основании.

При рассмотрении теории конических оболочек в уравнениях колебаний используется система координат (s, θ, z) , где координата s ($s = \alpha_1 A_1$) отсчитывается от левого края оболочки с радиусом средней поверхности R_0 (вариант усеченных конических оболочек). Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности приняты в виде: $A_1 = 1, A_2 = R_s, k_1 = 0, k_2 = \cos \beta / R_s$, где β – угол конусности; s – текущая координата; $R_s = R_0 = s \cdot \sin \beta$. Принято, что торцы оболочки жестко закреплены в сечениях $s = s_0$ и $s = s_N$. Начальные условия – нулевые. К внутренней поверхности конической оболочки приложена распределенная нагрузка вида (2.13).

Задача решена при следующих геометрических и физико-механических параметрах: $s_0 = 0, s_N = 0,4 \text{ м}$; $R_0 / h = 60$; $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,3$; $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Коэффициент постели $C_1 = 0,25 \cdot 10^8 \text{ н/м}^3$. Ребра расположены в точках $s_j = 0,1Lj, j = \overline{1, 3}; L = s_N - s_0$.

Численные расчеты проведены на временном интервале $t = 20T$. На рис. 4.14 и рис. 4.15 приведены кривые величин u_3 и σ_{22} в зависимости от пространственной координаты s и угла конусности β в момент времени $t = 4T$. Кривая 1 на рис. 4.14, 4.15 соответствует указанным зависимостям для случая $\beta = \pi/6$, кривая 2 – $\beta = \pi/12$. Как видно из графиков, четко проявляется влияние подкрепляющих элементов ($s_j = 0,1Lj, j = \overline{1, 3}; L = s_N - s_0$) на НДС неоднородной конструкции на упругом основании.

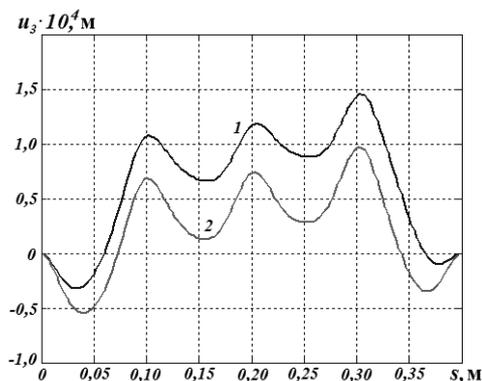


Рис. 4.14

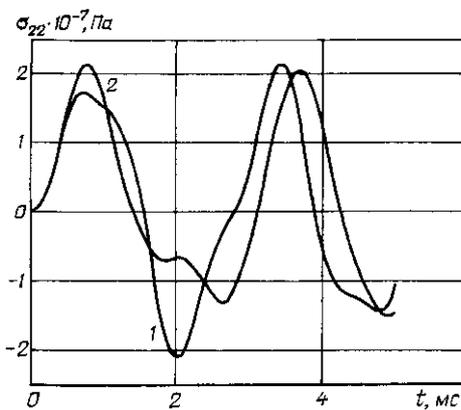


Рис. 4.13

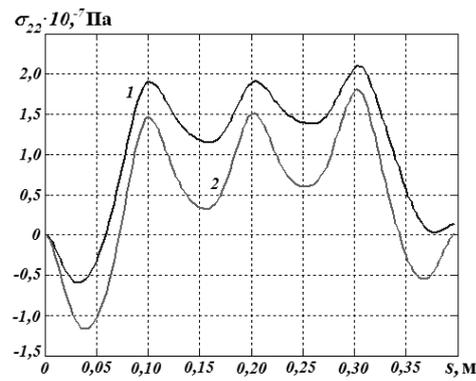


Рис. 4.15

Проведен также сравнительный анализ числовых результатов поведения подкрепленной конической оболочки с учетом упругого основания и без его учета. Различия результатов по величинам u_3 и σ_{22} в амплитудном и частотном диапазонах начинают оказывать влияние со времени $t = 2T$. Аналогичный сравнительный анализ числовых результатов по поведению гладкой конической оболочки на упругом основании и без его учета показывает, что различия результатов в амплитудном и частотном диапазонах начинают сказываться со времени $t = 4T$.

Анализ полученных численных расчетов осесимметричных колебаний дискретно подкрепленных оболочек вращения на основании Винклера и Пастернака при импульсных нагрузках показывает, что отличие от упругой среды может достигать 20 – 30%, а в отдельных случаях 50 – 70%.

Дана постановка и разработаны численные алгоритмы решения динамических задач неоднородных оболочечных структур на упругом основании двустороннего действия, которое моделируется трехкомпонентным водонасыщенным грунтом. Опыты [38, 39, 65] показывают, что модель [38, 39] достаточно правильно отображает некоторые закономерности деформирования жидких многокомпонентных сред. Для решения связанных динамических задач для системы «оболочка – грунт» построены соответствующие конечно-разностные схемы Мак-Кормака [70].

4.2. Влияние грунтовой среды на колебания цилиндрической оболочки. Рассмотрим процесс деформирования бесконечно длинной тонкой цилиндрической оболочки в грунтовой среде при внутреннем импульсном нагружении [6, 20 – 22, 31].

Движение грунтовой среды описывается системой уравнений в эйлеровых переменных [70]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho V^2 + P) - \frac{1}{r} P] = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\rho V) = 0]. \quad (4.10)$$

В уравнениях (4.10) r – пространственная координата; t – временная координата; V – скорость; ρ – плотность; P – давление.

Уравнение состояния грунтовой среды принимаем согласно модели нелинейной жидкой многокомпонентной среды [38, 39]

$$\frac{\rho_0}{\rho} \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma(P - P_0)}{\rho_0 c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}; \quad \rho_0 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \rho_0; \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1, \quad (4.11)$$

где величины с индексом 1 относятся к воздуху, 2 – к воде и 3 – к твердому компоненту; α_i – содержание компонентов по объему; γ_i – показатели изэнтроп в газообразном, жидком и твердом компонентах среды; c_{i0} – скорость звука в соответствующих компонентах среды при атмосферном давлении P_0 ; ρ_{i0} – плотности компонентов среды.

Скорость звука при давлении P определяется из условия $c = (dp / d\rho)^{1/2}$ и имеет вид

$$c = \frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_0 c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i}}{\left[\rho_0 \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{\rho_0 c_{i0}^2} \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_0 c_{i0}^2} + 1 \right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i} \right]^{1/2}}. \quad (4.12)$$

Уравнение движения тонкой оболочки радиусом R и толщиной h имеет вид

$$\rho_{об} h \ddot{u}_3 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3 - P_r(t), \quad (4.13)$$

где $P_3(t)$ – нагрузка на внутреннюю часть оболочки; $P_r(t)$ – давление грунта на оболочку; u_3 – радиальное перемещение оболочки; $\rho_{об}$, E , ν – физико-механические параметры материала оболочки.

Связанность задачи взаимодействия обеспечивается заданием условия непротекания на деформируемой поверхности контакта оболочка – грунтовая среда, т.е.

$$\dot{u}_3 = V_r, \quad (4.14)$$

где V_r – скорость границы грунтовой среды.

В качестве граничных условий для задачи динамики грунтовой среды принимают уравнения (4.13), (4.14) и условия невозмущенного движения на бесконечности.

Алгоритм решения задачи о взаимодействии цилиндрической оболочки с грунтовой средой (уравнения (4.10) – (4.12)) основан на применении конечно-разностной схемы Мак-Кормака [70].

Рассмотрена цилиндрическая оболочка в грунтовой среде при внутренней импульсной нагрузке $P_3(t)$ – уравнения (4.10) – (4.13). Расчеты проведены для стальной оболочки радиусом $R = 0,1$ м, толщиной $h = 0,01$ м. Модуль упругости материала оболочки $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона – $\nu = 0,3$; плотность – $\rho_{об} = 7880$ кг/м. Нагрузка $P_3(t)$ задана в виде зависимости (2.13).

Задача решена для двух типов водонасыщенных грунтов. Характеристики компонентов грунтов следующие: 1) воздух – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$; 2) вода – $\rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_2 = 1500$ м/с; $\gamma_2 = 7$; 3) твердый компонент – $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $c_3 = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$.

На рис. 4.16 приведены закономерности распространения волны давления P по пространственной координате r в различные моменты времени (вариант 1 – компоненты грунта $\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0,4; \alpha_3 = 0,6$). Кривая 1 соответствует времени $t_1 = 0,35 \cdot 10^{-4}$ с; кривая 2 – $t_2 = 0,125 \cdot 10^{-3}$ с; кривая 3 – $t_3 = 0,25 \cdot 10^{-3}$ с. На рис. 4.17 показаны аналогичные кривые для варианта 2 – компоненты грунта: $\alpha_1 = 0,01; \alpha_2 = 0,39; \alpha_3 = 0,6$. Как видно из приведенных кривых, содержание газообразного компонента α_1 существенно влияет на распределение давлений по пространственной и временной координатам. Максимум $P_0(t)$ более, чем в три раза меньше по сравнению с аналогичными расчетами согласно варианту 1. Наличие воздуха значительно влияет на форму импульса давления – происходит размывание формы импульса (кривые 2 и 3, соответственно). Существенно изменяется и скорость распространения волны давления по сравнению с вариантом 1 (отсутствие компоненты α_1). Кривая 1 соответствует времени $t_1 = 0,6 \cdot 10^{-4}$ с; кривая 2 – $t_2 = 0,125 \cdot 10^{-2}$ с; кривая 3 – $t_3 = 0,188 \cdot 10^{-2}$ с. Также наблюдается более медленное затухание волны давления по сравнению с вариантом 1.

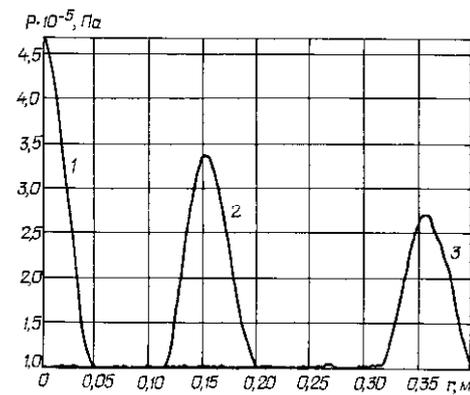


Рис. 4.16

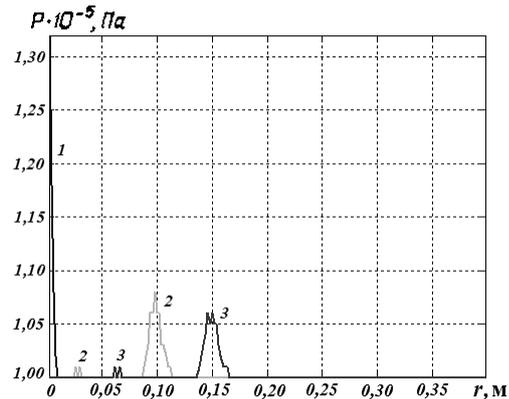


Рис. 4.17

Как частный случай уравнений (4.13), рассмотрена бесконечная цилиндрическая оболочка на упругом основании Винклера при действии импульсной внутренней нагрузки $P_3(t)$. Уравнения колебаний в этом случае имеют вид

$$-T_{22}/R - c_w u_3 + P_3(t) = \rho h \ddot{u}_3. \quad (4.15)$$

Нагрузка $P_3(t)$ задана согласно формуле (2.13).

Целью проведения расчетов согласно уравнениям (4.15) было максимально возможное равенство прогибов u_3 оболочки с расчетами по уравнениям (4.13). Исходя из подобия уравнений вида (4.13) и (4.15), можно получить формулу для коэффициентов Винклера c_w в случае конкретного варианта колебаний системы «оболочка – среда», т.е.

$$c_w = \max P_0 / u_3(t^*), \quad (4.16)$$

где величины $P_0(t)$, $u_3(t)$ определяются из решения задачи (4.13) – (4.15); t^* – время достижения $\max P_0(t)$. С учетом того, что полного совпадения результатов по двум моделям достичь невозможно, критерием достоверности принималось максимально возможное совпадение величины u_3 в первый период колебаний (рис. 4.18).

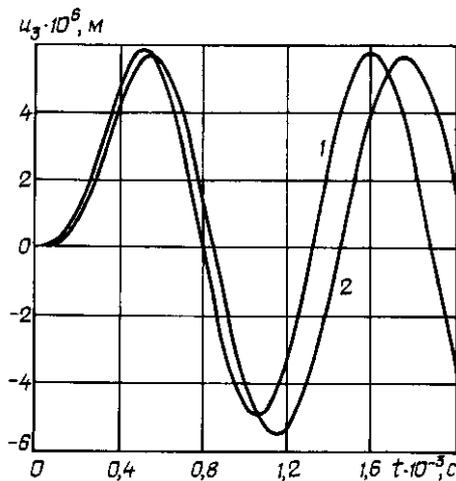


Рис. 4.18

Подобные исследования проведены для сферической оболочки на упругом основании Винклера и связанной задачи «нелинейная грунтовая среда – сферическая оболочка» [6, 21, 23]. Подобные структуры уравнений сферических оболочек на упругом основании и в грунтовой среде также позволяют провести оценку коэффициента c_w упругого основания Винклера с помощью формулы (4.16). Из данных проведенных расчетов следует, что влияние упругого основания на НДС оболочки начинает проявляться после времени достижения напряжениями σ_{22} своего максимального значения.

В работе [20] дана постановка задачи и получены уравнения вынужденных колебаний продольно-поперечно подкрепленных

цилиндрических оболочек в грунтовой среде в рамках конструктивно-ортотропной модели Тимошенка [137] при действии нестационарного нагружения. Рассмотрена бесконечная осесимметричная цилиндрическая оболочка, подкрепленная ребрами, направления которых совпадают с линиями главных кривизн ее срединной поверхности. Для непосредственно гладкой оболочки принимается следующий закон распределения перемещений по толщине: $u_1^z(x, z) = u_1(x) + z\varphi_1(x)$, $u_3^z(x, z) = u_3(x)$.

НДС ребра, которое направлено вдоль оси x , можно описать с помощью вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения $\bar{U}_{pi} = (u_{1pi}, u_{3pi}, \varphi_{1pi})$. Соответственно, для ребра, направленного вдоль оси y , имеем $\bar{U}_{pj} = (u_{1pj}, u_{3pj}, \varphi_{1pj})$.

Исходя с условий контакта жесткого соединения оболочка – ребро [20], с использованием вариационного принципа стационарности Гамильтона – Остроградского [6, 33] (после стандартных преобразований в вариационном функционале) получены уравнения колебаний конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки [20]

$$\rho_{об} h \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} + \frac{F_2}{l_2 h} \right) \ddot{u}_3 = - \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} + \frac{EF_2}{l_2} \right) \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (4.17)$$

Рассмотрим процесс деформирования бесконечно длинной подкрепленной цилиндрической оболочки в грунтовой среде при внутреннем импульсном нагружении. Движение грунтовой среды описываем системой уравнений в эйлеровых переменных (4.10). Уравнение состояния грунтовой среды принимаем согласно модели нелинейной жидкой многокомпонентной среды (4.11). Скорость звука при давлении P_1 опре-

деляется из условия $c = (dp/d\rho)^{1/2}$ и имеет вид (4.12). Как частный случай, получаем уравнение колебаний конструктивно ортотропной оболочки с регулярным продольным подкреплением в таком виде:

$$\rho_{об}h \left(1 + \frac{F_1}{l_1 h} \right) \ddot{u}_3 = - \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{u_3}{R^2} + P_3(t) - P_r(t). \quad (4.18)$$

В уравнениях (4.17), (4.18) $P_3(t)$ – нагрузка на внутреннюю часть оболочки; $P_r(t)$ – давление грунта на оболочку; u_3 – радиальное перемещение оболочки; $\rho_{об}$, E , ν – физико-механические параметры материала оболочки и ребер (для случая изотропного материала для обшивки и ребер).

Связанность задачи взаимодействия обеспечивает условие непротекания на поверхности контакта «оболочка – грунтовая среда», которая деформируется (4.14). В качестве граничных условий для задачи динамики грунтовой среды принимаем уравнения (4.17), (4.18) (4.14) и условия невозмущенного движения на бесконечности.

Алгоритм решения задачи о взаимодействии цилиндрической оболочки с грунтовой средой базируется на использовании конечно-разностной схемы Мак-Кормака [70].

Рассмотрена бесконечно длинная продольно подкрепленная цилиндрическая оболочка в грунтовой среде при внутренней импульсной нагрузке (4.10). Расчеты проведены для стальной оболочки радиуса $R = 0,1$ м; толщиной $h = 0,01$ м. Модуль упругости материала оболочки $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона – $\nu = 0,3$; плотность $\rho_{об} = 7880$ кг/м.

Для грунтовой среды приняты следующие характеристиками компонент: 1) воздух – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$; 2) вода – $\rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_2 = 1500$ м/с; $\gamma_2 = 7$; 3) твердая компонента – $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $c_3 = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$.

Согласно уравнений колебаний продольно подкрепленной оболочки в рамках конструктивно-ортотропной модели видно, что влияние продольных подкреплений проявляется только в инерционном слагаемом. Поэтому в дальнейшем проведен анализ волновых процессов, исходя из приведенной массы подкрепленной оболочки $m = \rho_{об}h [1 + F_1/(l_1 h)]$. Характеризовать процесс будем, используя соотношение m/m_0 , где $m_0 = \rho_{об}h$.

На рис. 4.19 представлены закономерности распространения волны давления P по пространственной координате r в разные моменты времени для случая варианта – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$ (в зависимости от величины m/m_0). Кривые 1 – 3 соответствуют зависимостям $m/m_0 = 1; 1,2; 1,4$, соответственно, во времена прохождения расстояния по координатам $r = 2r_0$, $r = 3r_0$, $r = 4r_0$. На рис. 4.20 приведены аналогичные зависимости для величин $m/m_0 = 1,6; 1,8; 2$; (кривые 4 – 6).

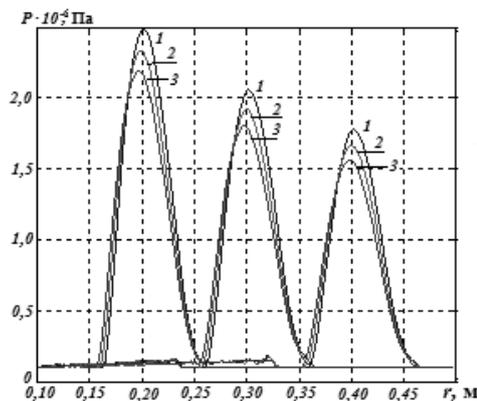


Рис. 4.19

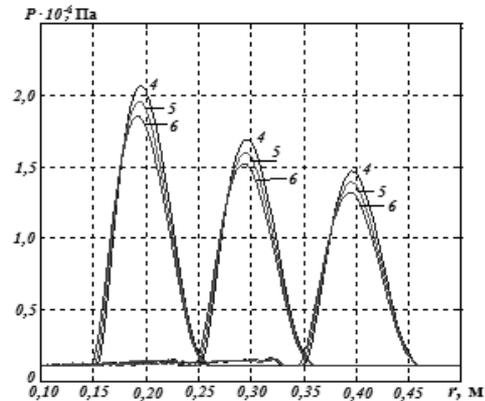


Рис. 4.20

Как видно, согласно кривым (см. рис. 4.19) значения величины давления для варианта $m/m_0 = 1$ отличаются больше, чем на 10% от соответствующего значения давления при $m/m_0 = 1,4$. Аналогичная картина имеет место согласно зависимостям, приведенным на рис. 4.20.

4.3. Динамика сферической оболочки в грунтовой среде. Рассмотрим замкнутую сферическую оболочку, которая находится в бесконечной грунтовой среде [6, 21, 23]. Процесс распространения сферических волн в среде описывается следующей системой уравнений в эйлеровых переменных [70]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\rho U^2 + P)] - \frac{2}{r} P = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 (\rho U)] = 0. \quad (4.19)$$

В уравнениях (4.19) r – пространственная координата; t – временная координата; U – скорость; ρ – плотность; P – давление.

Уравнения состояния грунтовой среды принимаем согласно модели нелинейной жидкой многокомпонентной среды [38, 39, формулы (4.11)].

Уравнения колебаний тонкой сферической оболочки радиуса R и толщины h имеют такой вид:

$$\rho_{o\sigma} h \ddot{u}_3 = -\frac{T_{11}}{R} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(t) - P_r(t); \quad T_{11} = \frac{E h \nu}{1 - \nu^2} \frac{u_3}{R^2}; \quad T_{22} = \frac{E h}{1 - \nu^2} \frac{u_3}{R^2}, \quad (4.20)$$

где $P_3(t)$ – нагрузка на внутреннюю поверхность цилиндрической оболочки; $P_r(t)$ – давление грунта на оболочку; u_3 – радиальное перемещение оболочки; $\rho_{o\sigma}$, E , ν – физико-механические параметры материала оболочки.

Связанность задачи взаимодействия системы «оболочка – грунтовая среда» обеспечивается заданием условий непроникновения на деформированную поверхность оболочки в области контакта оболочка – грунтовая среда, т.е.

$$\dot{u}_3 = U_r, \quad (4.21)$$

где U_r – скорость границы грунтовой среды на контакте.

В качестве граничных условий для задачи динамики грунтовой среды принимаем уравнения (4.20), (4.21) и условия отсутствия возмущения перемещений на бесконечности.

Алгоритм решения задачи о взаимодействии сферической оболочки с грунтовой средой (уравнения (4.19) – (4.21)) основан на применении конечно-разностной схемы Мак-Кормака [70].

На шаге предиктор разностные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_k &= \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \rho^n V^n)_{k+1} - (r^2 \rho^n V^n)_k}{\Delta r} \right]; \\ (\tilde{\rho} \tilde{V})_k &= (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left\{ \frac{[r^2 \rho (V^2 + P)]_{k+1} - [r^2 (\rho V^2 + P)]_k}{\Delta r} - 2 P_k^n r_k \right\} \quad F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

На шаге корректор уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_k^{n+1} &= 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k^2} \left[\frac{(r^2 \tilde{\rho} \tilde{V})_k - (r^2 \tilde{\rho} \tilde{V})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}; \\ (\rho V)_k^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho^n V^n)_k + (\tilde{\rho} \tilde{V})_k - \frac{\tau}{r_k^2} \cdot \left[\frac{[r^2 (\tilde{\rho} \tilde{V}^2 + \tilde{P})]_k - [r^2 (\tilde{\rho} \tilde{V}^2 + \tilde{P})]_{k-1}}{\Delta r} - 2 \tilde{P}_k r_k \right] \right\}; \\ F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Для определения искомых величин на поверхности контакта «сферическая оболочка – грунтовая среда» используем следующую процедуру. Уравнения колебаний оболочки (4.20) представим в виде

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} = H; \quad H = \frac{1}{\rho_{об}} \left[-\frac{\sigma_{11}}{R} - \frac{\sigma_{22}}{R} + \frac{P_3(t) - P_0}{h} \right]. \quad (4.24)$$

На шаге предиктор уравнения (4.21) аппроксимируем следующими соотношениями:

$$\tilde{V}_0 = V_0^n + \tau H_0(t^n), \quad \text{где} \quad H_0(t^n) = \frac{1}{\rho_{об}} \left[-\frac{\sigma_{11}^n}{R} - \frac{\sigma_{22}^n}{R} + \frac{P_3(t^n) - P_0^n}{h} \right].$$

Величины $\tilde{\rho}_0, \tilde{P}_0$ определяем согласно таких формул:

$$\tilde{\rho}_0 = \rho_0^n - \frac{\tau}{r_0^2} \left[\frac{-3r_0^2(\rho_0^n V_0^n) + 4r_1^2(\rho_1^n V_1^n) - r_2^2(\rho_2^n V_2^n)}{2\Delta r} \right]; \quad (4.25)$$

$$F(\tilde{P}_0, \tilde{\rho}_0) = 0.$$

На шаге корректор для аппроксимации уравнений (4.20) используем конечно-разностные соотношения вида

$$V_0^{n+1} = 0,5 \left[V_0^n + \tilde{V}_0 + \tau H_1(t^{n+1}) \right]; \quad H_1(t^{n+1}) = \frac{1}{\rho_{об}} \left[-\frac{\sigma_{11}^{n+1}}{R} - \frac{\sigma_{22}^{n+1}}{R} + \frac{P_3(t^{n+1}) - \tilde{P}_0}{h} \right]. \quad (4.26)$$

Величины ρ_0^{n+1} и P_0^{n+1} определим по следующим формулам:

$$\rho_0^{n+1} = 0,5 \left\{ \rho_0^n + \tilde{\rho}_0 - \frac{\tau}{r_0^2} \left[\frac{-3r_0^2(\tilde{\rho}_0 \tilde{V}_0) + 4r_1^2(\tilde{\rho}_1 \tilde{V}_1) - r_2^2(\tilde{\rho}_2 \tilde{V}_2)}{2\Delta r} \right] \right\};$$

$$F(P_0^{n+1}, \rho_0^{n+1}) = 0.$$

В соотношениях (4.22) – (4.26) функция $F(P, \rho)$ имеет вид

$$F(P, \rho) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left[\frac{\gamma_i(P - P_0)}{\rho_{i0} c_{i0}^2} + 1 \right]^{-1/\gamma_i} - \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (4.27)$$

Для определения величины давления P по заданным значениям плотности ρ используем итерационную процедуру Ньютона – Рафсона. Учитывая, что разностная схема Мак-Кормака (4.22), (4.23) является явной, то при расчетах используем условие устойчивости $(|V| + c)\tau / \Delta r < 1$, где величина c соответствует локальной скорости звука в грунтовой среде.

Числовые результаты. Рассмотрим замкнутую сферическую оболочку в грунтовой среде при внутренней импульсной нагрузке $P_3(t)$ (2.13). Уравнениям (4.19) – (4.21) соответствуют разностные уравнения – (4.22) – (4.26). Расчеты проведены для стальной оболочки радиусом $R = 0,1$ м, толщиной $h = 0,01$ м. Модуль упругости материала оболочки $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho_{об} = 7880$ кг/м³.

Задача решена для трех типов водонасыщенных грунтов. Характеристики компонент грунтов следующие: 1) воздух – $\rho_1 = 1,2$ кг/м³; $c_1 = 330$ м/с; $\gamma_1 = 1,4$; 2) вода – $\rho_2 = 10^3$ кг/м³; $c_2 = 1500$ м/с; $\gamma_2 = 7$; 3) твердая компонента – $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $c_3 = 4500$ м/с; $\gamma_3 = 4$.

На рис. 4.21 представлены закономерности распространения волны давления P по пространственной координате r в разные моменты времени (вариант 1 – компоненты грунта $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,4$; $\alpha_3 = 0,6$). Кривые 1 – 5 соответствуют временам: $t_1 = T$; $t_2 = 3T$; $t_3 = 5T$; $t_4 = 7T$; $t_5 = 9T$.

На рис. 4.22 представлены аналогичные зависимости для варианта 2 – компоненты грунта $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,6$; $\alpha_3 = 0,4$. Как видно из приведенных графиков, при большем содержании твердой компоненты в грунте (вариант 1 – $\alpha_3 = 0,6$), скорость распространения волны давления P больше по сравнению с вариантом 2 ($\alpha_3 = 0,4$). В первом варианте грунта волна давления P достигает расстояния $r = 8R$ при $t = 9T$, а во втором варианте в то же время волна достигает расстояния $r \approx 7,4R$. Также отличаются амплитуды волн давления P . В случае 1 – амплитуда волны давления P в момент времени $t = T$ – $P \approx 2,4$ МПа. В случае 2 ($\alpha_3 = 0,4$ – менее твердая среда в целом по сравнению с вариантом 1) – волна давления P в момент времени $t = T$ имеет значение $P \approx 2,0$ МПа. Соответственно, отличаются значения волн давления и в другие моменты времени.

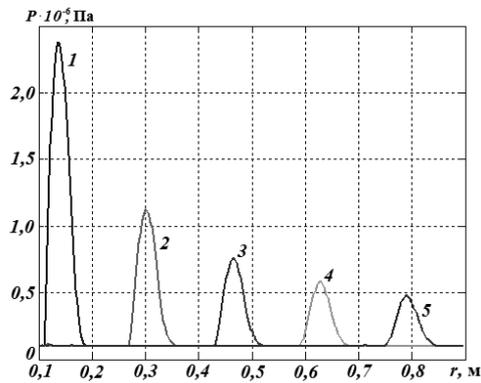


Рис. 4.21

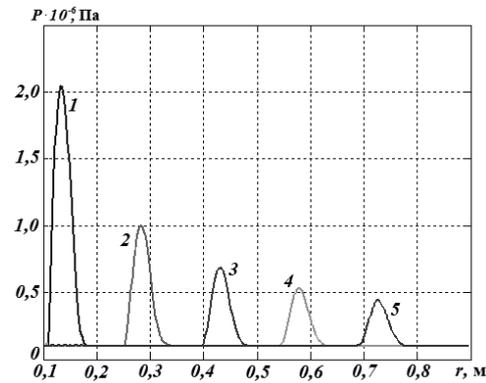


Рис. 4.22

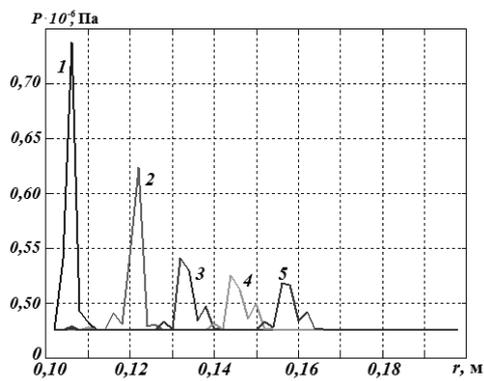


Рис. 4.23

На рис. 4.23 приведены зависимости волны давления P вдоль координаты r для третьего варианта грунта ($\alpha_1 = 0,01$; $\alpha_2 = 0,39$; $\alpha_3 = 0,6$) в моменты времени, рассматриваемые выше. Как видим, содержание газообразной компоненты α_1 значительно влияет на распределение давления по пространственной и временной координатам. Максимум $P_0(t)$ при $r = R$ (на границе сферической оболочки – грунтовой среде) более чем в три раза меньше по сравнению с аналогичными расчетами согласно вариантам 1 и 2. Наличие воздуха значительно влияет на форму и величину волны давления P – происходит размывание формы импульса давления. Значительно изменяется и скорость распространения волны давления P по сравнению с вариантами 1 и 2 (при значении компоненты $\alpha_1 = 0$). За время $t = 9T$ волна давления проходит расстояние $r \approx 1,55R$ (для сравнения – согласно варианта 1 за это же время волна сместилась на расстояние $r = 8R$).

Значительно изменяется и скорость распространения волны давления P по сравнению с вариантами 1 и 2 (при значении компоненты $\alpha_1 = 0$). За время $t = 9T$ волна давления проходит расстояние $r \approx 1,55R$ (для сравнения – согласно варианта 1 за это же время волна сместилась на расстояние $r = 8R$).

4.4. Цилиндрическая оболочка в двухслойной грунтовой среде. Рассмотрим бесконечную подкрепленную цилиндрическую полость в двухслойной грунтовой среде [54]. Предполагаем, что к внутренней поверхности подкрепляющей цилиндрической оболочки при $r = r_0$ приложена распределенная импульсная нагрузка $P_3(t)$ (рис. 4.24).

Уравнения движения подкрепляющей тонкой цилиндрической оболочки радиусом R и толщиной h имеет вид (4.13). Для описания поведения слоев грунтовой среды используется модель нелинейной жидкой многокомпонентной среды согласно (4.11) [38, 39].

Движение двухслойной грунтовой среды для случая распространения цилиндрических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах [70] (4.10). Уравнения движения грунтовой среды (4.10) дополняются уравнением состояния вида (4.11). Связанность задачи взаимодействия обеспечивается заданием условия непротекания на деформируемой поверхности контакта оболочка – грунтовая среда (4.14).

В качестве граничных условий для задачи динамики грунтовой среды принимаем уравнения (4.13), (4.14) при $r = r_0$ и условия невозмущенного движения на бесконечности. На границе контакта грунтов с разными плотностями задаем условия непрерывности скорости.

Алгоритм решения задачи о распространении цилиндрических волн в двуслойной грунтовой среде основан на применении конечно-разностной схемы Мак-Кормака [70].

На шаге предиктор разностные уравнения имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_k &= \rho_k^n - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\rho^n V^n)_{k+1} - (r\rho^n V^n)_k}{\Delta r} \right]; \\ (\tilde{\rho}\tilde{V})_k &= (\rho^n V^n)_k - \frac{\tau}{r_k} \left\{ \frac{[r(\rho V^2 + P)^n]_{k+1} - [r(\rho V^2 + P)^n]_k}{\Delta r} - P_k^n \right\}; \\ F(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

На шаге корректор уравнения записываем следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_k^{n+1} &= 0,5 \left\{ \rho_k^n + \tilde{\rho}_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{(r\tilde{\rho}\tilde{V})_k - (r\tilde{\rho}\tilde{V})_{k-1}}{\Delta r} \right] \right\}; \\ (\rho V)^k_{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho^n V^n)_k + (\tilde{\rho}\tilde{V})_k - \frac{\tau}{r_k} \left[\frac{[r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})]_k - [r(\tilde{\rho}\tilde{V}^2 + \tilde{P})]_{k-1}}{\Delta r} - \tilde{P}_k \right] \right\}; \\ F(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Для определения величины давления P (по заданным значениям плотности ρ в уравнении состояния грунтовой среды) используем итерационную процедуру Ньютона – Рафсона. Учитывая, что разностная схема Мак-Кормака (4.28), (4.29) является явной, то при расчетах использовано условие устойчивости $(|V| + c)\tau / \Delta r < 1$, где величина c соответствует локальной скорости звука (4.12).

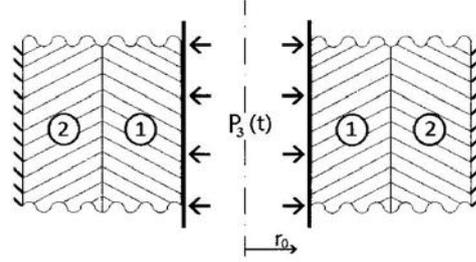


Рис. 4.24

При расчетах принято, что подкрепляющая цилиндрическая оболочка имеет следующие исходные данные: радиус $R = 0,1$ м; модуль упругости материала оболочки $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность $\rho = 7,88 \cdot 10^3$ кг/м³. Толщина оболочки h варьировалась. Рассмотрено три случая: $h/R = 0,05$; $h/R = 0,1$; $h/R = 0,15$. Нагрузка $P_3(t)$ (2.13), прикладываемая к внутренней поверхности оболочки, задана при $r = r_0$.

Первый слой грунтовой среды при $r_0 \leq r \leq 5r_0$ характеризуется параметрами: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,7$; $\alpha_3 = 0,3$. Для второго слоя при $5r_0 \leq r \leq \infty$ принято: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$. Для обоих случаев в формуле уравнения состояния грунтовой среды принято $\rho_2 = 10^3$ кг/м³, $\rho_3 = 2650$ кг/м³; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$.

На рис. 4.25 приведены зависимости волны давления P по пространственной координате r в определенные моменты времени. Кривая 1 соответствует случаю $h/R = 0,05$ при $t = 0,625T$. Кривые 2 и 3 соответствуют случаям $h/R = 0,1$ и $h/R = 0,15$ при $t = 0,75T$. На рис. 4.26 приведены зависимости волны давления P в момент достижения ими границы раздела грунтовой среды $r = 5r_0$ при $t = 6,25T$. При прохождении границы раздела волны давления в данном случае (прохождение волны из менее плотной среды в более плотную среду) наблюдается отраженная волна.

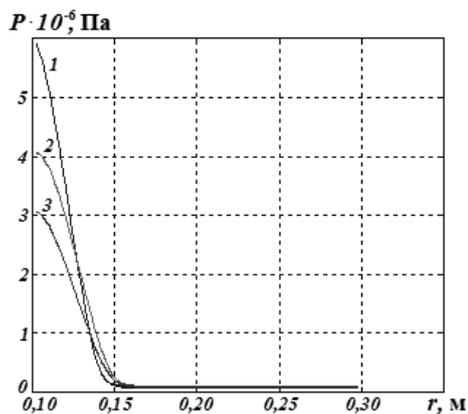


Рис. 4.25

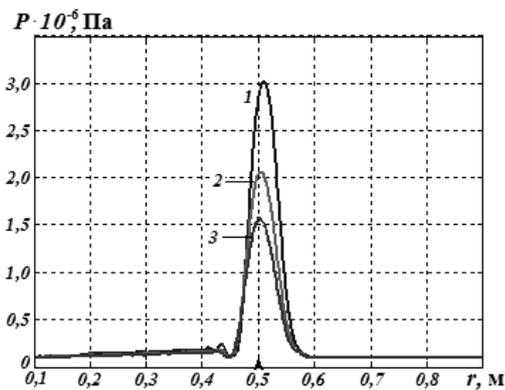


Рис. 4.26

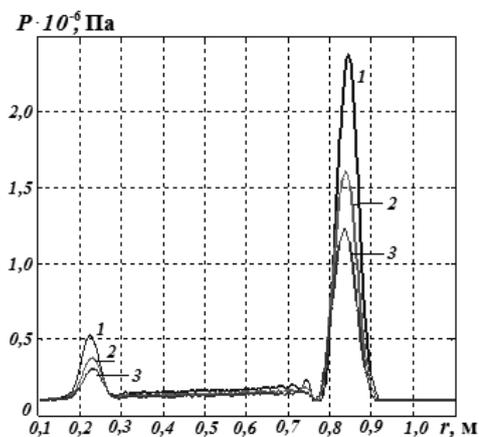


Рис. 4.27

В правой части рис. 4.27 представлена основная волна давления для рассматриваемых трех случаев отношения h/R . В левой части рис. 4.27 изображена отраженная волна давления, движущаяся по направлению к полости. Представленные зависимости (рис. 4.27) соответствуют времени $t = 10T$. В дальнейшем отраженная волна при достижении подкрепленного края полости затухает. Эффекта отражения от оболочки не наблюдается. Это объясняется спецификой расчетной математической модели. Обозначения на рис. 4.26, 4.27 – аналогичны обозначениям на рис. 4.25.

4.5. Волновые процессы в грунтовой среде периодической структуры. Рассмотрим бесконечную цилиндрическую полость в грунтовой среде периодической структуры [42]. Предполагаем, что к внутренней поверхности полости при $r = r_0$ приложена распределенная импульсная нагрузка $P_3(r_0, t)$ (рис. 4.28).

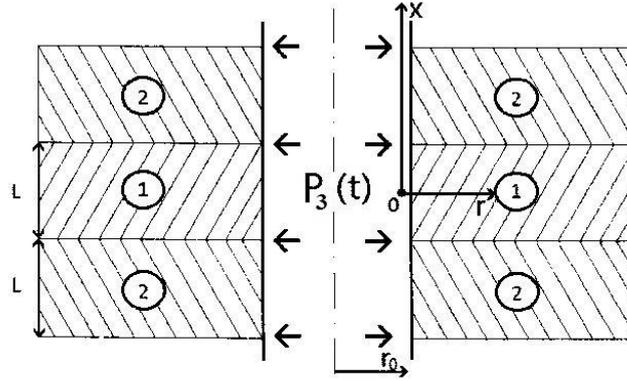


Рис. 4.28

Для описания поведения слоев грунтовой среды используем модель нелинейной жидкой многокомпонентной среды согласно формуле (4.11). Движение грунтовой среды периодической структуры для случая распространения цилиндрических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах [70]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u v) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho v^2 + P)] - \frac{P}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) = 0. \quad (4.30)$$

В векторном виде система уравнений (4.30) имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{B}) + \frac{\bar{C}_0}{r} = 0; \quad (4.31)$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \rho u^2 + P \\ \rho u v \\ \rho u \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho v^2 + P \\ \rho v \end{pmatrix}; \quad \bar{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

где u – скорость перемещения частиц среды вдоль оси x ; v – скорость перемещения частиц вдоль оси r ; ρ – плотность соответствующего слоя грунта; P – давление соответствующей точки грунтовой среды (x, r) .

Уравнения движения грунтовой среды (4.30) – (4.32) дополняются уравнением состояния вида (4.11). В качестве граничных условий для задачи динамики грунтовой среды периодической структуры принимаем уравнения (4.30) при $r = r_0$ и условия невозмущенного движения на бесконечности. На границе контакта грунтов с разными плотностями задаем условия непрерывности скоростей.

Алгоритм решения задачи о распространении цилиндрических волн в грунтовой среде периодической структуры (уравнения (4.31) – (4.33)) основан на применении конечно-разностной схемы Мак-Кормака [70].

На шаге предиктор разностные уравнения имеют такой вид:

$$\tilde{F}_1 = \bar{F}_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{\bar{A}_{k,l} - \bar{A}_{k,l-1}}{\Delta x} + \frac{\bar{B}_{k,l} - \bar{B}_{k,l-1}}{\Delta r} + \bar{C}_{k,l} \right]^n. \quad (4.33)$$

На шаге корректор разностные уравнения имеют вид:

$$\bar{F}_{k,l}^{n+1} = 0,5 \left\{ \bar{F}_{k,l}^n - \tilde{F}_{k,l} - \Delta t \left[\frac{\tilde{A}_{k,l+1} - \tilde{A}_{k,l}}{\Delta x} + \frac{\tilde{B}_{k+1,l} - \tilde{B}_{k,l}}{\Delta r} + \tilde{C}_{k,l} \right] \right\}. \quad (4.34)$$

В скалярном виде уравнения (4.33), (4.34) записываются следующим образом:

– на шаге предиктор

$$\begin{aligned} (\tilde{\rho} \tilde{u})_{k,l} &= (\rho u)_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{(\rho u^2 + P)_{k,l}^n - (\rho u^2 + P)_{k,l-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{(r \rho u v)_{k,l}^n - (r \rho u v)_{k-1,l}^n}{\Delta r} \right]; \\ (\tilde{\rho} \tilde{v})_{k,l} &= \\ &= (\rho v)_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{(\rho u v)_{k,l}^n - (\rho u v)_{k,l-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{[r(\rho v^2 + P)]_{k,l}^n - [r(\rho v^2 + P)]_{k,l-1}^n}{\Delta r} - \frac{P_{k,l}^n}{r_k} \right]; \\ \tilde{\rho}_{k,l} &= \rho_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{(\rho u)_{k,l}^n - (\rho u)_{k,l-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{(r \rho v)_{k,l}^n - (r \rho v)_{k-1,l}^n}{\Delta r} \right], \\ \tilde{P}_{k,l} &= F(P_{k,l}^n, \tilde{\rho}_{k,l}); \end{aligned} \quad (4.35)$$

– на шаге корректор

$$\begin{aligned} (\rho u)_{k,l}^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho u)_{k,l}^{n+1} + (\tilde{\rho} \tilde{u})_{k,l} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta t \left[\frac{(\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{P})_{k,l+1} - (\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{P})_{k,l}}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{(r \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v})_{k+1,l} - (r \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v})_{k,l}}{\Delta r} \right] \right\}; \\ (\rho v)_{k,l}^{n+1} &= 0,5 \left\{ (\rho v)_{k,l}^n + (\tilde{\rho} \tilde{v})_{k,l} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta t \left[\frac{(\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v})_{k,l+1} - (\tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{v})_{k,l}}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{[r(\tilde{\rho} \tilde{v}^2 + \tilde{P})]_{k+1,l} - [r(\tilde{\rho} \tilde{v}^2 + \tilde{P})]_{k,l}}{\Delta r} - \frac{\tilde{P}_{k,l}}{r_k} \right] \right\}; \\ \rho_{k,l}^{n+1} &= 0,5 \left\{ \rho_{k,l}^n + \tilde{\rho}_{k,l} - \Delta t \left[\frac{(\tilde{\rho} \tilde{u})_{k,l+1} - (\tilde{\rho} \tilde{u})_{k,l}}{\Delta x} + \frac{1}{r_k} \frac{(r \tilde{\rho} \tilde{v})_{k+1,l} - (r \tilde{\rho} \tilde{v})_{k,l}}{\Delta r} \right] \right\}; \\ \tilde{P}_{k,l}^{n+1} &= F(P_{k,l}^n, \tilde{\rho}_{k,l}^{n+1}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Для определения величины давления P по заданным значениям плотности ρ в уравнении (4.11) используем итерационную процедуру Ньютона – Рафсона. Учитывая, что разностная схема Мак-Кормака (4.33), (4.35) является явной, при расчетах использовано условие устойчивости: $\max(|u|+c)\tau/\Delta x, (|v|+c)\tau/\Delta r < 1$, где величина c соответствует локальной скорости распространения звука в грунтовой среде (4.12).

Числовые результаты. Рассмотрим задачу о распространении цилиндрических волн в грунтовой среде периодической структуры (рис. 4.28). Предполагаем, что к поверхности цилиндрической полости при $r = r_0$ приложена нагрузка $P_3(r_0, t)$ (2.13). При расчетах принято: $r_0 = 0,1$ м; $L/r_0 = 4$. На рис. 4.29, 4.30 приведены результаты

численных расчетов – зависимости величин волн давлений P от расстояний r от края цилиндрической полости при $r = r_0$. На графиках представлены четыре группы зависимостей волн давления для разных времен: $A - T$; $B - 3,5T$; $C - 6,5T$; $D - 9,5T$.

На рис. 4.29 представлены зависимости величин давления P от координаты r для варианта слоя грунта 1 при $x = L/2$ согласно рис. 4.28 ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$). Кривые 1 соответствуют указанному грунту, а кривые 2 – величинам давления P в слое грунта 2 при $x = L/2$ согласно рис. 4.28 ($\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,7$; $\alpha_3 = 0,3$). Кривые 3 соответствуют величине давления на границе раздела сред (рис. 4.28).

На рис. 4.30 представлены аналогичные расчеты для варианта грунта со следующими параметрами: первый слой – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,8$ (кривые 1); второй слой – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,8$; $\alpha_3 = 0,2$ (кривые 2); кривые 3 соответствуют величине давления на границе раздела сред. Для обоих случаев в формуле (4.11) было задано: $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_3 = 2650 \text{ кг/м}^3$; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$.

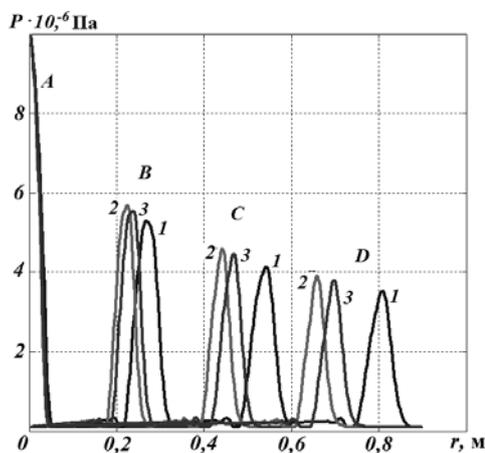


Рис. 4.29

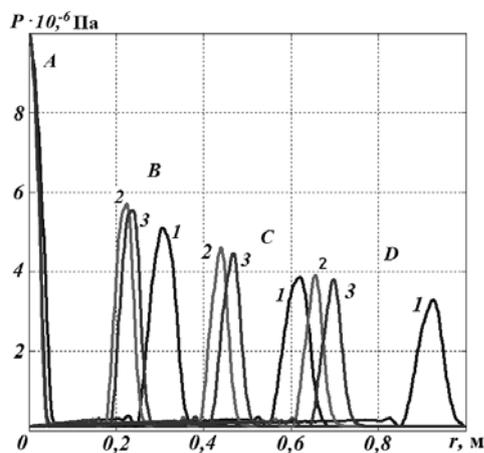


Рис. 4.30

Как следует из приведенных числовых данных, скорость волны давления согласно рис. 4.29, 4.30 при указанных параметрах грунтовых сред для случаев $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$ и $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,8$ значительно превышает скорости волны давления с другими параметрами грунтовой среды. Скорость волны давления P на границе раздела сред 1 и 2 (рис. 4.28) ближе к скорости волны давления в грунте с меньшей плотностью (кривые 3 на рис. 4.29, 4.30). Наблюдается значительное затухание волн давления в слоях среды и на границе раздела сред по координате r во времени t .

4.6. Волновые процессы в системе «цилиндрическая оболочка – грунтовая среда периодической структуры». Рассмотрим бесконечную подкрепленную цилиндрическую полость в грунтовой среде периодической структуры [29, 41]. Предположим, что к внутренней поверхности подкрепляющей оболочки при $r = r_0$ приложена распределенная импульсная нагрузка $P_3(r_0, t)$ (рис. 4.31).

Исследуем задачу динамического взаимодействия цилиндрической оболочки с грунтовой средой периодической структуры при действии внутренней распределенной нестационар-

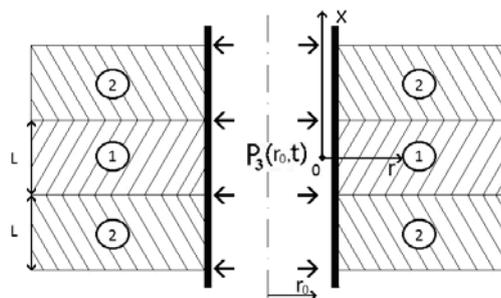


Рис. 4.31

ной нагрузки. Уравнения колебаний цилиндрической оболочки (с учетом влияния действия на нее грунтовой среды) представим согласно модели оболочек с учетом гипотез Тимошенко [41]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3(x, t) - P_r(x, r_0, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

В уравнениях (4.37) величины u_1, u_3, φ_1 соответствуют компонентам обобщенного вектора перемещений срединной поверхности цилиндрической оболочки; $T_{11}, T_{22}, T_{13}, M_{11}$ – величины интегральных по толщине усилий-моментов цилиндрической оболочки; $P_3(x, t)$ – нагрузка на внутреннюю поверхность цилиндрической оболочки; $P_r(x, r_0, t)$ – давление грунта на оболочку.

Движения среды периодической структуры в случае цилиндрической симметрии описывается системой уравнений в эйлеровых координатах [70]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho u v) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho v^2 + P)] - \frac{P}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

В векторном виде система уравнений (4.38) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \bar{B}) + \frac{\bar{C}_0}{r} &= 0; \\ \bar{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho \end{pmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \rho u^2 + P \\ \rho u v \\ \rho u \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \rho u v \\ \rho v^2 + P \\ \rho v \end{pmatrix}; \quad \bar{C}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где u – скорость перемещения частиц вдоль оси x ; v – скорость перемещения частиц вдоль оси r ; ρ – плотность соответствующего слоя грунта; P – давление соответствующей точки грунтовой среды (x, r) .

Уравнения состояния грунтовой среды каждого слоя представим согласно модели нелинейной многокомпонентной среды (4.11) [38, 39].

Связанность задачи взаимодействия «оболочка – грунтовая среда периодической структуры» обеспечивается заданием условий непротекания на деформированную поверхность оболочки контакта оболочка – грунтовая среда, т.е.

$$\dot{u}_1 = u, \quad \dot{u}_3 = v, \quad (4.40)$$

где u, v – скорости границы перемещения грунтовой среды на контакте.

На границе контакта неоднородных грунтовых слоев заданы условия симметрии кинематических и силовых величин. В качестве граничных условий для задачи динамики грунтового слоя принимаем уравнения (4.38), (4.40) и условия отсутствия возмущения перемещения на бесконечности.

Для решения исходных уравнений теории колебаний оболочек с учетом гипотез Тимошенко [137] используем интегро-интерполяционный метод построения разност-

ных схем для уравнений гиперболического типа [69]. Для численного решения задач динамического поведения грунтовой среды используем двухшаговую схему Мак-Кормака [70]:

на шаге предиктор –

$$\tilde{F}_1 = \bar{F}_{k,l}^n - \Delta t \left[\frac{\bar{A}_{k,l} - \bar{A}_{k,l-1}}{\Delta x} + \frac{\bar{B}_{k,l} - \bar{B}_{k,l-1}}{\Delta r} + \bar{C}_{k,l} \right]^n, \quad \Phi(\tilde{P}_k, \tilde{\rho}_k) = 0; \quad (4.41)$$

на шаге корректор –

$$\bar{F}_{k,l}^{n+1} = 0,5 \left\{ \bar{F}_{k,l}^n - \tilde{F}_{k,l} - \Delta t \left[\frac{\tilde{A}_{k,l+1} - \tilde{A}_{k,l}}{\Delta x} + \frac{\tilde{B}_{k+1,l} - \tilde{B}_{k,l}}{\Delta r} + \tilde{C}_{k,l} \right] \right\},$$

$$\Phi(P_k^{n+1}, \rho_k^{n+1}) = 0.$$

Для определения величины давления P по заданным значениям плотности ρ в уравнении (4.41) использована итерационная процедура Ньютона – Рафсона. Учитывая, что разностная схема Мак-Кормака (4.41) является явной, при расчетах принято условие устойчивости $\max((|u|+c)\tau/\Delta x, (|v|+c)\tau/\Delta r) < 1$, где величина c соответствует локальной скорости распространения звука в грунтовой среде (4.12).

Числовые результаты. Рассмотрим задачу о распространении цилиндрических волн в подкрепленной грунтовой среде периодической структуры (рис. 4.31). Предполагаем, что к внутренней поверхности подкрепленной цилиндрической полости при $r = r_0$ приложена нагрузка (2.13). При расчетах принято $r_0 = 0,1$ м; $L/r_0 = 4$; $r_0/h = 10$. На рис. 4.32, 4.33 приведены результаты численных расчетов – зависимости величин волн давлений P от расстояний r от края подкрепленной цилиндрической полости при $r = r_0$, где представлены три группы зависимостей волн давления для разных времен: $A - 0,75T$; $B - 4T$; $C - 8T$ (для расчетов согласно варианта 1), $C - 7T$ (для расчетов согласно варианта 2).

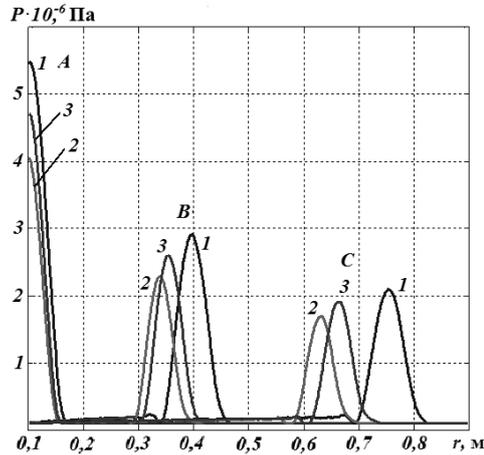


Рис. 4.32

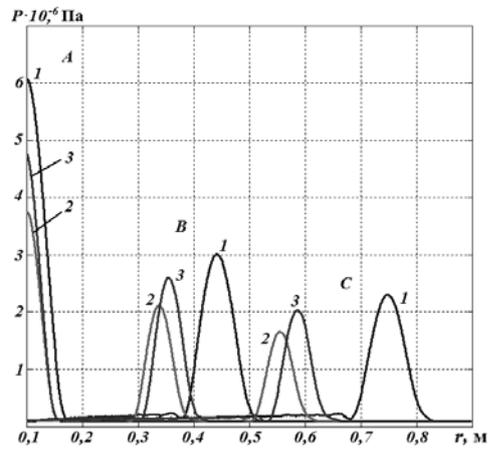


Рис. 4.33

На рис. 4.32 приведены зависимости величин давления P от координаты r для расчетов согласно варианта 1. Кривые 1 соответствуют грунту с параметрами $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,3$; $\alpha_3 = 0,7$ в сечении $x = 0$ согласно рис. 4.31. Кривые 2 соответствуют величинам P в слое грунта с параметрами $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,7$; $\alpha_3 = 0,3$ в сечении $x = L$. Кривые 3 – величины давления P на границе раздела слоев при $x = L/2$.

На рис. 4.33 приведены аналогичные данные расчетов согласно варианту 2: первый слой грунта со следующими параметрами: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,2$; $\alpha_3 = 0,8$ (кривые 1 – в сечении $x = 0$); второй слой – $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0,8$; $\alpha_3 = 0,2$ (кривые 2 – в сечении $x = L$); кривые 3 соответствуют величинам давления P на границе раздела слоев ($x = L/2$). Для обоих случаев в формуле (4.11) принято $\rho_2 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_3 = 2650 \text{ кг/м}^3$; $\gamma_2 = 7$; $\gamma_3 = 4$.

Качественно результаты расчетов по приведенным вариантам данной задачи совпадают с результатами расчетов для варианта не подкрепленной грунтовой среды периодической структуры (см. 4.5). Наличие подкрепляющей оболочки в цилиндрической полости вносит коррективы: падение амплитуд волн давления в соответствующих сечениях слоев по сравнению с результатами [29]. При этом значения амплитуд волн давления явно зависят от параметров слоя грунта. Также наблюдается различие результатов по временной координате. Согласно расчетов (вариант 1) амплитуда волны P (кривая 1) в сечении $r/r_0 = 7,5$ имеет место при $t = 8T$, а согласно расчетам по варианту 2 – при $t = 7T$. Аналогичная картина наблюдается для других вариантов расчетов.

Следует отметить, что подобные задачи рассмотрены в работах [78, 81, 91, 93, 103, 108, 134 – 136, 139].

Заключение.

В статье выполнен обзор экспериментальных работ по исследованию динамики неоднородных цилиндрических оболочек при различных нестационарных нагрузках. Проведенный анализ экспериментальных исследований позволяет утверждать, что для дальнейшего развития и уточнения теоретических методов расчета НДС и колебаний неоднородных оболочек при динамических нагрузках необходимо продолжение и развитие экспериментальных исследований динамики оболочек.

Актуальным является построение уравнений, основанных на использовании нелинейных уточненных уравнений трехслойных оболочек вращения. Значительное развитие получили нелинейные динамические задачи теории трехслойных оболочек вращения со сплошным и кусочно-неоднородным заполнителем при независимых кинематических и статических гипотезах для каждого слоя оболочки, с учетом поперечных и нормальных деформаций в заполнителе. Этот подход используется при значительном отличии физико-механических характеристик слоев. При этом порядок разрешающей системы уравнений зависит от количества слоев. Удовлетворительное совпадение результатов теоретических и экспериментальных исследований для трехслойных объектов со сплошным и кусочно-неоднородным заполнителем позволяет утверждать, что теория расчетов, для данного случая, в значительной мере разработана.

Рассмотрены трехслойные оболочки вращения с учетом дискретности ребристого заполнителя при импульсных нагрузках. Вывод уравнений динамического деформирования трехслойной упругой оболочечной структуры с дискретным заполнителем выполнен согласно соответствующих гипотез С.П. Тимошенко в геометрически нелинейном приближении. С помощью численных методов решены задачи динамического поведения трехслойных оболочек вращения с дискретным заполнителем при импульсных нагрузках и выявлены новые механические эффекты.

В частности, представляет интерес получение аналитических решений, согласно классической теории оболочек и стержней, по определению динамических характеристик для незамкнутых цилиндрических и сферических оболочек на упругом основании Винклера и Пастернака, подкрепленных регулярной системой дискретных ребер.

Следует отметить, что большинство дискретно подкрепленных оболочечных конструкций, контактирующих с упругой средой, в процессе эксплуатации получают прогибы, сравнимые с толщиной. Поэтому задачи динамического поведения тонких ребристых оболочек следует проводить на основе геометрически нелинейной теории стержней и оболочек с учетом гипотез С.П. Тимошенко. Разработанная и апробированная методика исследования динамики оболочек вращения на упругом основании в

геометрически линейной и нелинейной постановках позволяет исследовать динамику дискретно подкрепленных оболочек вращения на упругом основании Винклера и Пастернака. Такие оболочечные конструкции широко используются при создании летательных аппаратов, где они выполняют как новые функциональные назначения, так и подвергаются новым видам нестационарных нагрузок.

Дана постановка и разработаны численные алгоритмы решения связанных динамических задач неоднородных оболочечных структур на упругом основании двустороннего действия, которое моделируется трехкомпонентным водонасыщенным грунтом. Алгоритм решения задач о взаимодействии цилиндрической и сферической оболочек с грунтовой средой основан на применении конечно-разностной схемы Мак-Кормака. Как частный случай, рассмотрены цилиндрическая и сферическая оболочки на упругом основании Винклера при действии импульсной внутренней нагрузки. Уравнения колебаний в этом случае подобны уравнениям колебаний системы «оболочка – среда». На основании этого, можно получить формулу для коэффициентов Винклера в случае каждого конкретного варианта колебаний системы «оболочка – среда».

Исследована двухслойная грунтовая среда с бесконечной подкрепленной цилиндрической полостью. К внутренней поверхности подкрепляющей цилиндрической оболочки приложена распределенная импульсная нагрузка. Движение двухслойной грунтовой среды для случая распространения цилиндрических волн описывается системой уравнений в эйлеровых координатах. Приведены зависимости волн давления в моменты достижения ими границ раздела грунтовой среды и их взаимодействия.

Решена задача о замкнутой сферической оболочке в грунтовой среде при внутренней импульсной нагрузке и изучен характер распространения волн в зависимости от состава среды. Рассмотрена бесконечная цилиндрическая полость в грунтовой среде периодической структуры, где к внутренней поверхности полости приложена распределенная импульсная нагрузка. Представлены зависимости величин давления от пространственной координаты для различных времен и вариантов слоев грунта.

Исследована бесконечная цилиндрическая полость в грунтовой среде периодической структуры, которая подкреплена цилиндрической оболочкой, к внутренней поверхности которой приложена распределенная импульсная нагрузка давления. Наличие подкрепляющей оболочки в цилиндрической полости влияет на характер падения амплитуд волн давления в соответствующих сечениях слоев. При этом значения амплитуд волн давления явно зависят от параметров слоев грунтов. Также наблюдается различие результатов по временной координате. Следует отметить, что развитие современных скважинных технологий, где используются оболочечные конструкции обсадных колонн, которые подвергаются различным видам динамических нагрузок, требует как развития методов расчетов, так и решения новых инженерных задач.

РЕЗЮМЕ. Проведено огляд експериментальних робіт з визначення динаміки гладких і підкріплених циліндричних оболонок, які контактують з ґрунтовим середовищем, при різних нестационарних навантаженнях. Наведено результати досліджень тришарових оболонок обертання, рівняння руху яких отримано в рамках гіпотез геометрично нелінійної теорії Тимошенка. Чисельні результати для оболонок з кусково-неоднорідним і дискретним заповнювачем уможливили аналіз оцінки впливу геометричних і фізико-механічних параметрів конструкцій на їх динаміку і виявлення нових механічних ефектів. На основі класичної теорії оболонок і стержнів досліджено вплив дискретного розміщення ребер і коефіцієнтів пружної основи Винклера і Пастернака на власні частоти і форми коливань прямокутних в плані пологих циліндричних і сферичних оболонок. Для підкріпленої циліндричної оболонки знайдено число і форму дисперсійних кривих для поздовжніх гармонічних хвиль. Отримано рівняння коливань ребристих оболонок обертання на пружній основі Винклера і Пастернака з допомогою геометрично нелінійної теорії з використанням гіпотез Тимошенка. Розроблено чисельні алгоритми при застосуванні інтегро-інтерполяційного методу і розв'язано відповідні нестационарні задачі. Особливу увагу приділено постановці і розв'язанню зв'язаних задач про характер динамічної взаємодії циліндричних і сферичних оболонок з ґрунтовим водонасиченим середовищем різної структури.

1. Александров А.Я., Брюкер Л.Э., Куришин А.М., Прусаков А.П. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 272 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит-ры, 1961. – 384 с.
3. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1980. – 386 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.2).
4. Аникъев И.И., Гуляев В.И., Иванченко Г.М., П.З. Луговой и др. Об эффекте квазиполного внутреннего отражения упругих волн на границах раздела упругих сред // ПМТФ – 2000. – 41, № 1. – С. 21 – 27.
5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
6. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейши В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя – К.: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
7. Головки К.Г., Луговой П.З., Подільчук І.Ю. Про вплив пружної основи на поширення гармонічних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – 50, № 1. – С. 98 – 106.
8. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейши В.Ф. Волновые процессы в подкрепленных цилиндрических оболочках на упругом основании при импульсных нагрузках // Вісник НТУУ (КП), Серія «Гірництво». – 2007. – Вип. 14. – С. 17 – 21.
9. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейши В.Ф. К решению динамических задач теории подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании типа Винклера при импульсных нагрузках // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки / Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2006. – 4 (45). – С. 3 – 7.
10. Заруцкий В.А., Сивак В.Ф. Экспериментальные исследования динамики оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 3. – С. 3 – 11.
11. Кононенко В.О., Носаченко А.М., Телалов А.И. Исследование колебаний стеклопластиковых оболочек. – К.: Наук. думка, 1974. – 84 с.
12. Кравец В.Г., Луговой П.З., Прокопенко Н.Я. Влияние подкрепления и упругого основания на колебания прямоугольных в плане пологих ребристых цилиндрических оболочек // Вісник НТУУ (КП), Серія «Гірництво». – 2011. – Вип. 20. – С. 20 – 26.
13. Кубенко В.Д., Луговой П.З., Прокопенко Н.Я. Влияние подкрепления на собственные частоты прямоугольных в плане пологих цилиндрических оболочек на упругом основании // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій (Дніпропетровськ: Ліра). – 2011. – Вип. 16. – С. 151 – 156.
14. Латанская Л.А., Мейши В.Ф., Каиров В.А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойных сферических оболочек с кусочно-однородным наполнителем при импульсном нагружении // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій (Дніпропетровський нац. ун-т). – 2010. – Вип. 14. – С. 216 – 223.
15. Латанська Л.О., Мейши В.Ф. Чисельний розв'язок динамічних осесиметричних задач теорії еліпсоїдальних оболонок з кусково однорідним заповнювачем // Вісник Дніпропетров. нац. ун – ту. Серія Механіка. – 2007. – 2, вип. 11. – С. 110 – 116.
16. Логинов В.Н. Электрические измерения механических величин. – М.: Энергия, 1976. – 104 с.
17. Ломтадзе В.Д. Инженерная геология. Инженерная геодинамика. – Л.: Недра, 1977. – 479 с.
18. Луговой П.З., Лисюк М.О., Михайлова М.І., Анік'єв І.І., Суцєнко С.О. Про ефекти типу повного внутрішнього відбиття вибухових хвиль в циліндричній оболонці з рідиною // Вісник НТУУ (КП), Серія «Гірництво». – 2005. – Вип. 12. – С. 7 – 13.
19. Луговой П.З., Лисюк М.О., Михайлова М.І., Анік'єв І.І. Теоретичне та експериментальне дослідження розповсюдження хвиль в ортотропних циліндричних оболонках // Вісник Кременчуцьк. держ. політехн. ун-ту. – 2005. – Вип. 5 (34). – С. 105 – 106.
20. Луговой П.З., Мейши В.Ф., Мейши Ю.А. Динамічна взаємодія конструктивно ортотропних циліндричних оболонок з пружною основою // Збірник наукових праць «Математичні проблеми технічної механіки» / Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2014. – Вип. 1(24) (Доп. вип.). – С. 8 – 13.
21. Луговой П.З., Мейши В.Ф., Мейши Ю.А. Динамічна поведінка циліндричних та сферичних оболонок в ґрунтового середовищі // Вісник Національного транспортного ун-ту. Ч. 2. – К.: НТУ. – 2009. – № 19. – С. 249 – 254.
22. Луговой П.З., Мейши В.Ф., Мейши Ю.А. Чисельний розв'язок нелінійних задач теорії підкріплених циліндричних оболонок при нестационарних навантаженнях // Математика в сучасному технічному університеті / Матеріали 2^{ої} міжнар. наук.-практ. конференції. – К.: НТУУ «КП». – 2013, 20 – 21 грудня. – С. 52 – 55.
23. Луговой П.З., Мейши Ю.А. Хвильові процеси в системі «сферична оболонка – ґрунтове середовище» при імпульсному навантаженні // Вісник Національного транспортного ун-ту. Ч. 1. – К.: НТУ. – 2007. – Вип. 15. – С. 93 – 98.

24. *Луговой П.З.* Динамика оболочечных конструкций при импульсных нагрузках (обзор) // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 8. – С. 3 – 20.
25. *Луговой П.З.* Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках (обзор) // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 5. – С. 44 – 74.
26. *Луговой П.З., Прокопенко Н.Я.* О дисперсионных кривых для гармонических волн, распространяющихся вдоль продольно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании // Збірник наук. праць Дніпродзержинського держ. техн. ун-ту (техн. науки). – Дніпродзержинськ. – 2014. – Вип. 1(24). – С.140 – 143.
27. *Луговой П.З., Головки К.Г., Мейш В.Ф.* Динамическое поведение сферических оболочек на упругом основании при импульсных нагрузках // Системні технології. – Дніпропетровськ. – 2007. – Вип. 4 (51). – С. 9 –13.
28. *Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Численное моделирование динамического поведения и расчет на прочность многослойных оболочек при импульсном нагружении // Проблемы прочности. – 2000. – № 4. – С. 86 – 96.
29. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А.* Динамическое поведение цилиндрической оболочки при взаимодействии с трехкомпонентной грунтовой средой периодической структуры // Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи. – Львів: Інст. прикл. проблем мех. і матем. НАНУ. – 2012. – С. 99 – 102.
30. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А.* О решении осесимметричных задач динамики подкрепленных конических оболочек на упругом основании // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетров. нац. ун – т. – 2009. – Вип. 13. – С. 142 – 148.
31. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А.* Численное решение задач о динамическом взаимодействии неоднородных цилиндрических оболочек с упругой грунтовой средой // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2014. – Вип. 23. – С. 124 – 134.
32. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Заболотный Г.М.* Вынужденные колебания пятислойных цилиндрических оболочек с продольно-поперечным дискретным подкреплением при распределенном нагружении // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла / Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ. – 2011. – № 12. – С. 203 – 209.
33. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А.* Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд-во: Полигр. центр «Киевский ун-т», 2005. – 536 с.
34. *Луговой П.З., Мукоид В.П., Мейш В.Ф.* Динамика оболочечных конструкций при взрывных нагрузках – К.: Наук. думка, 1991. – 280 с.
35. *Луговой П.З., Прокопенко Н.Я.* Влияние упругого основания на собственные частоты ребристой цилиндрической оболочки // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра. – 2014. – Вип. 23. – С. 135– 146.
36. *Луговой П.З., Прокопенко Н.Я., Головки К.Г.* Дисперсионные кривые для гармонических волн, распространяющихся вдоль продольно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании // Математичні проблеми технічної механіки / Збірник наукових праць Дніпродзержин. держ. техн. ун-ту (технічні науки). – 2013. – Вип. 2 (22). – С. 99 – 104.
37. *Луговой П.З., Сивак В.Ф., Головки К.Г., Крицкая Н.И.* Экспериментальное исследование влияния сплошной среды на динамические характеристики подкрепленной цилиндрической оболочки при импульсном нагружении // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ. – 2012. – Вип. 18. – С. 120 – 125.
38. *Ляхов В.М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. – М.: Недра, 1982. – 288 с.
39. *Ляхов В.М.* Основы динамики взрыва в грунтах и жидких средах. – М.: Недра, 1974. – 192 с.
40. *Мейш В., Кравченко Н.В.* Застосування різницевої апроксимації типу Річардсона для розв'язування динамічних задач теорії багатопарових дискретно підкріплених циліндричних оболонок // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія: фіз. – матем. науки. – 2004. – № 3. – С. 115 – 121.
41. *Мейш В.Ф.* Волновые процессы в системе цилиндрическая оболочка – грунтовая среда периодической структуры при импульсных нагрузках // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво»: зб. наукових праць. – К.: НТУУ «КПІ». – 2015. – Вип. 27. – С. 15 – 21.
42. *Мейш В.Ф.* Численное решение задач о распространении цилиндрических волн в грунтовых средах периодической структуры // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво»: зб. наукових праць. – К.: НТУУ «КПІ». – 2014. – Вип. 25. – С. 9 – 16.
43. *Мейш В.Ф., Арнаута Н.В.* Вимушені коливання п'ятишарових конічних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестационарних навантаженнях // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки / Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2008. – № 4 (57). – С. 120 – 124.
44. *Мейш В.Ф., Арнаута Н.В.* До розрахунку осесиметричних коливань п'ятишарових підкріплених циліндричних оболонок при повздовжньому крайовому навантаженні // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетровський нац. ун-т. – 2010. – Вип. 15. – С. 89 – 96.

45. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. До розрахунку осесиметричних коливань тришарових циліндричних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестационарних навантаженнях // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки / Регіональний міжвузівський збірник наук. праць. – Дніпропетровськ. – 2009. – № 3 (62) – С. 40 – 44.
46. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. Чисельний алгоритм розрахунку осесиметричних коливань тришарових підкріплених циліндричних оболонок з застосуванням скінченно-різницевої апроксимації Річардсона // Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій / Дніпропетровський нац. ун-т. – 2010. – Вип. 14. – С. 246 – 253.
47. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В., Заболотный Г.М. Вынужденные колебания многослойных продольно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла / Зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ. – 2009. – Вип. 10. – С. 199 – 205.
48. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. Вимушені коливання багатошарових сферичних оболонок з підкріпленням отвором при нестационарному навантаженні // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 146 – 150.
49. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку наружено – деформованого стану багатошарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестационарних навантаженнях // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. – 2002. – Вип. № 3. – С. 210 – 216.
50. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. Неосесиметричные колебания неоднородных многослойных дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 9. – С. 88 – 95.
51. Мейш В., Кравченко Н.В. Застосування різницевої апроксимації типу Річардсона для розв'язування динамічних задач теорії багатошарових дискретно підкріплених циліндричних оболонок // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. – 2004. – № 3.–С. 115 – 121.
52. Мейш В.Ф., Латанская Л.А. Осесиметричные колебания трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным заполнителем при нестационарном нагружении // Вісник Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 161 – 164.
53. Мейш В.Ф., Луговой П.З., Мельник В.М. О динамическом поведении конической оболочки переменной толщины на упругом основании // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ: «Ліра». – 2012. – Вип. 19. – С. 219 – 225.
54. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Математическое моделирование волновых процессов в системе цилиндрической оболочки – двухслойная грунтовая среда // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Гірництво» / Збірник наукових праць. – К.:НТУУ «КПІ». – 2012. – Вип. 22. – С. 3 – 8.
55. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Постановка и численный алгоритм решения задач о вынужденных колебаниях теории трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным заполнителем // Системні технології / Регіональний міжвуз. збірник наук. праць. Матем. проблеми техн. механіки / Дніпропетровськ, 2003. – № 2 (25). – С. 21 – 26.
56. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Чисельний розв'язок задач вимушених коливань тришарових циліндричних оболонок з кусково-однорідним заповнювачем // Вісник нац. транспорт. ун-ту. – 2003. – № 8. – С. 432 – 437.
57. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Штанцель Э.А. Динамическое поведение трехслойных балок в рамках прикладных теорий при нестационарных нагружениях // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки / Регіональний міжвузів. збірник наук. праць. – Дніпропетровськ. – 2007. – № 4 (51). – С. 27 – 34.
58. Мейш В.Ф., Мукоїд А.П., Штанцель Е.А. Порівняльний аналіз динамічної поведінки тришарових циліндричних оболонок з неоднорідним заповнювачем в рамках прикладних теорій // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія фіз.-матем. науки. – 2000. – Вип. 3. – С. 163 – 168.
59. Мейш В.Ф., Стрюк В.К., Кот Л.В. Нестационарна поведінка тришарових дискретно підкріплених оболонок обертання при повздовжньому імпульсному навантаженні // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія фіз.-матем. науки. – 1999. – Вип. 3. – С. 171 – 175.
60. Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А., Мукоїд А.П. Динамічна поведінка тришарової еліпсоїдальної оболонки обертання при осесиметричному нестационарному навантаженні // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія фіз.-матем. науки. – 1998. – Вип. 3. – С. 71 – 76.
61. Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А., Шульга Н.А. Нестационарные колебания цилиндрических оболочек при осесиметричном нагружении // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 8. – С. 3 – 9.
62. Мейш В.Ф., Штанцель С.Е. Неосесиметричні коливання тришарових циліндричних оболонок з неоднорідним заповнювачем при динамічних навантаженнях // Вісник Київ. нац. ун-ту ім.Т.Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. – 2001. – Вип. 5. – С. 342 – 347.
63. Мейш В.Ф., Штанцель С.Э. К построению численного алгоритма решения динамических задач теории трехслойных оболочек с неоднородным заполнителем // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. – 2001. – № 2 (13). – С. 97 – 102.

64. Мейш В.Ф., Шульга М.О., Хамренко Ю.А. До теорії нестационарних осесиметричних коливань тришарових оболонок обертання // Доп. НАН України. – 1999. – № 9. – С. 69 – 73.
65. Механический эффект взрыва в грунтах / Лучко И.А., Плаксий В.А., Ремез Н.С. и др. – К.: Наук. думка, 1989. – 232 с.
66. Остерник Э.С. Экспериментальное исследование деформации нормали и способа осуществления краевых условий у слоистых пластин // Труды VIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – М.: Наука, 1973. – 596 – 602.
67. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – К.: Сталь, 2000. – 600 с.
68. Румянцев С.А. Динамика переходных процессов и самосинхронизация движений вибрационных машин. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003.–135 с.
69. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
70. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2. – М.: Мир, 1991. – 552 с.
71. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций / А.Н. Гузь, В.А. Заруцкий, И.Я. Амиро и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.
72. Altenbach H. An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates // Int. J. Solids Struct. – 2000. – 37. – P. 3503 – 3520.
73. Altenbach H. Theories for laminated and sandwich plates: A review // Mechanics of Composite Materials. – 1998. – 34, N 3. – P. 243 – 252.
74. Carrera E. Historical Review of Zig – Zag Theories for Multilayered Plates and Shells // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – 56, N 3. – P. 287 – 309.
75. Carrera E. Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells // J. of Archives of Computational Methods in Engineering. – 2002. – 9, N 2. – P. 87 – 140.
76. Carrera E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner’s Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells // Applied Mechanics Reviews. – 2001. – 54. – P. 301 – 329.
77. Carrera E. On the use of the Murakami’s zig - zag function in the modeling of layered plates and shells // Computers & Structures. – 2004. – 82. – P. 541 – 554.
78. Cichocki K. Effects of underwater blast loading on structures with protective elements // Int. J. of Impact Engineering. – 1999. – 22, N 6. – P. 609 – 617.
79. Civaiec Ö. Geometrically nonlinear dynamic and static analysis of shallow spherical shell resting on two-parameters elastic foundations // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. – 2014. – 113. – P. 1 – 9.
80. Collet B., Pouget J. Nonlinear modulation of wave packets in a shallow shell on an elastic foundation // Wave Motion. – 2001. – 34 (1). – P. 112 – 118.
81. Golovko K. G., Lugovoi P. Z., and Meish V. F. Solution of Axisymmetric Dynamic Problems for Cylindrical Shells on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 12. – P. 1390 – 1395.
82. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Vlaiikov G.G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models. – Kiev: S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, Technical center of the National Academy of Science of Ukraine, 2009. – 550 p.
83. Guler K., Celep Z. Static and dynamic responses of a rigid circular plate on a tensionless Winkler foundation // J. of Sound and Vibration. – 2004. – 276, № 1 – 2. – P. 449 – 458.
84. Gulyaev V.L., Lugovoi P.Z., Lysyuk N.A. Propagation of Harmonic Waves in a Cylindrical Shell (Timoshenko Model) // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 4 – P. 472 – 478.
85. Gupta A.P., Bfardwaj N. Vibration of rectangular orthotropic elliptic plates on quadratically varying thickness on elastic foundation // J. Vibr. and Acoust. – 2004. – 126, N 1. – P. 132 – 140.
86. Hiroyuki Matsunaga. Vibration and Stability of Thick Plates on Elastic Foundation // J. Engrg. Mech. – 2000. – 126, N 1. – P. 27 – 34.
87. Huang Yi., He Fang-she Free vibrations of shallow spherical shells on elastic foundation // Chin. J. Geotechn. Eng. – 1994. – 16, N 5. – P. 36 – 46.
88. Hui-Shen Shen. Large Deflection of Reissner – Mindlin Plates on Elastic Foundations // J. Engng. Mech. 1998. – 124, N 10. – P. 1080 – 1089.
89. Hui-Shen Shen. Postbuckling of Orthotropic Plates on Two-Parameter Elastic Foundation // J. Engng. Mech. – 1995. – 121, N 1. – P. 50 – 56.
90. Kadir Guller. Circular Elastic Plate Resting on Tensionless Pasternak Foundation // J. of Engng. Mech. – 2004. – 130, N 10. – P. 1251 – 1254.
91. Kambouchev N., Noels L., Rodovitzky R. Numerical simulation of the fluid – structure interaction between air blast waves and free – standing plates // Computers and Structures. – 2007. – 85. – P. 923 – 931.
92. Khathan A.A. Large-Deformation Analysis of Plates on Unilateral Elastic Foundation // J.Engng. Mech. – 1994. – 120, N 8. – P. 1820 – 1827.
93. Kubenko V.D., Kovalchuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Shells of Cylindrical Shape Interacting with Flowing Fluid // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 19 – 79.

94. *Lugovoi P.Z., Podil'chuk I.Yu., Sivak V.F.* Experimental Study of the Behavior of a Cylindrical Shell under Impulsive Loading with Ambient Humidity Taken into Account // *Int. Appl. Mech.* – 2010, – **46**, N 4. – P. 418 – 421.
95. *Lugovoi P. Z., Prokopenko N. Ya.* Vibrations of Ribbed Shallow Rectangular Shells on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 8. – P. 912 – 918.
96. *Lugovoi P.Z., Prokopenko N.Ya.* Influence of Reinforcement and Elastic Foundation on the Vibrations of Shallow Shells with Rectangular Planform // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 6. – P. 714 – 719.
97. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Golovko K.G.* Solving Axisymmetric Dynamic Problems for Reinforced Shells of Revolution on an Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 193 – 199.
98. *Lugovoi P. Z., Sivak V.V., and Sivak V.F.* Experimental Research of the Vibrations of a Cylindrical Shell Filled with Some Medium and Subjected to Impulsive Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 11. – P. 1232 – 1235.
99. *Lugovoi P.Z., Sivak V.V., Sivak V.F.* Stress Distribution in a Glassfiber-Reinforced Plastic Shell Structure under Impulsive Transverse Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 4. – P. 443 – 447.
100. *Lugovoi P.Z., Prokopenko N.Ya.* Influence of an Elastic Foundation on the Dispersion of Harmonic Waves in Longitudinally Reinforced Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 5 – P. 583 – 590.
101. *Lugovoi P.Z., Meish V.F., Shtantsel' S.E.* Forced Nonstationary Vibrations of a Sandwich Cylindrical Shell with Cross-Ribbed Core // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 2 – P. 161 – 167.
102. *Lugovoj P.Z.* Propagation of Harmonic Waves in an Orthotropic Cylindrical Shells on Elastic Foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 3. – P. 297 – 303.
103. *Marconi F.* Investigation of the interaction of a blast wave with an internal structure // *AIAA Journal.* – 1994. – **32**, N 8. – P. 1561 – 1567.
104. *Meish V.F., Khamrenko Yu.A.* Comparative Analysis of the Dynamic Responses of Transiently Loaded Sandwich Shells Predicted by Various Applied Theories // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 7. – P. 856 – 861.
105. *Meish V.F., Kravchenko N.V.* Nonaxisymmetric Vibrations of Discretely Reinforced Inhomogeneous Multilayer Cylindrical Shells under Nonstationary Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 9. – P. 1066 – 1072.
106. *Meish V.F., Mikhlyak A.M.* Forced Vibrations of Three – Layer Elliptic Cylindrical Shells under Distributed Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2010, – **46**, N 2. – P. 195 – 200.
107. *Mirsky I., Herrmann G.* Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1973. – **28**, N 2. – P. 277 – 203.
108. *Moon - Hee Nam, Kwan-Hee Lee* Unsymmetrically Loaded Cylindrical Tank on Elastic Foundation // *J. Engng. Mech.* – 2000. – **126**, N 12. – P. 1257 – 1261.
109. *Nam-H.Kim., Chung C.Fu, Moon-Young Kim* Exact Solutions for Free Vibration Analysis of Non – Symmetric Curved Beam on Two – Types of Elastic Foundation // *J. Engng. Mech.* – 2000. – **126**, N 1. – P. 71 – 77.
110. *Noor A.K., Burton W. S.* Assessment of Computational Models for Multilayered Composite Shells // *Appl. Mech. Rev.* – 1990. – **43**, N 4. – P. 67 – 97.
111. *Noor A.K., Burton W.S. and Bert C.W.* Computational Models for Sandwich Panels and Shells // *Appl. Mech. Rev.* – 1996. – **49**, N 3. – P. 155 – 200.
112. *Noor A.K., Burton W.S. and Peters J.M.* Assessment of Computation Models for Multilayered Composite Cylinders // *Int. J. Solids Struct.* – 1991. – **27**, N 10. – P. 1269 – 1286.
113. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of shear deformation theories for multi – layered composite plates // *Appl. Mech. Rev.* – 1989. – **42** (1). – P. 1 – 13.
114. *Pagano N.J.* Free edge stress fields in composite laminates // *Int. J. Solids Struct.* – 1978. – **14**. – P. 401 – 406.
115. *Pagano N.J.* Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending // *J. Composite Materials.* – 1969. – **3**. – P. 389 – 411.
116. *Pagano N.J.* Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates // *J. Composite Materials.* – 1970. – **4**. – P. 20 – 34.
117. *Paliwal D.N., Singh Satyendra.* Free vibrations of orthotropic cylindrical shell on elastic foundation // *AIAA Journal.* – 1999. – **37**, N 9. – P. 1135 – 1139.
118. *Qatu M. S.* Accurate Theory for Laminated Composite Deep Thick Shells // *Int. J. Solids Struct.* – 1999. – **36**, N. 19. – P. 2917 – 2941.
119. *Qatu M S.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Shells: 1989 –2000, Part 1: Laminated Composite Shells // *Appl. Mech. Rev.* 2002. – **55**, N 4. – P. 325 – 350.
120. *Qatu M.S.* Vibration of Laminated Shells and Plates. – Elsevier, Amsterdam, 2004. – 406 p.
121. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent Research Advances in the Dynamic Behavior of Composite Shells: 2000 – 2009 // *Composite Structures.* – 2010. – **93**, N 1. – P. 14 – 31.
122. *Qatu M.S.* Free Vibration of Laminated Composite Rectangular Plates // *Int. J. Solids Struct.* – 1991. – **28**, N 8. – P. 941 – 954.

123. *Qui Ping, Wang Xin-zhi, Yeh Kai-yuah.* Bifurcation and chaos of the circular plates on the nonlinear elastic foundation // Appl. Math. and Mech. – 2003. – **24**, N 8. – P. 880 – 885.
124. *Reddy J.N., Arciniega R.A.* Shear deformation plate and shell theories: From Stavsky to Present // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2004. – **11**. – P. 535 – 582.
125. *Reddy J.N., Liu C. F.* A higher – order shear deformation theory of laminated elastic shells // Int. J. Engng. Sci. – 1985. – **23**. – P. 669 – 683.
126. *Reddy J.N.* On refined computational models of composite laminates // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1989. – **27**. – P. 361 – 382.
127. *Reddy J.N.* A simple higher order theory for laminated composite plates // J. Appl. Mech. – 1984. – **51**. – P. 745 – 752.
128. *Rose T.A., Smith P.D., Mays G.S.* Effectiveness of walls designed for the protection of structures against air blast from high explosives // Proc. of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. – 1995. – **110**, N 1. – P. 78 – 85.
129. *Saicit Tamero lu S.* Vibrations of Clamped Rectangular Plates on Elastic Foundation Subjected to Uniform Compressive Forces // J. Engng. Mech. – 1996. – **122**, N 8. – P. 714 – 718.
130. *Sheng H. Y., Ye J.Q.* A Three – Dimensional State Space Finite Element Solution for Laminated Composite Cylindrical Shells // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2003. – **192**, N 22 – 24. – P. 2441 – 2459.
131. *Shi X.P.* Rectangular thick plate with free edges on Pasternac foundation // J. Engng. Mech. – 1994. – **120**, N 5. – P. 971 – 988.
132. *Shulga N.A., Meish V.F.* Forced vibration of three – layered spherical and ellipsoidal shells under axially symmetric loads // Mechanics of Composite Materials. – 2003. – **39**, N 5. – P. 625 – 636.
133. *Skosarenko Yu.V.* Natural Vibrations of Ribbed Cylindrical Shell Interaction with Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 111 – 128
134. *Skosarenko Yu.V.* Stress – Strain State of Ribbed Cylindrical Shell Interaction with Elastic Foundation under Shot – Time Loads // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 112 – 122.
135. *Soldatos K. P.* Mechanics of Cylindrical Shells with Non – Circular Cross Section // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **49**, N 8. – P. 237 – 274.
136. *Soldatos K.P.*, A refined laminated plate and shell theory with applications // J. of Sound and Vibration. – 2000. – **144**, N 3. – P. 109 – 129.
137. *Timoshenko S.P., Young D.X., Weaver Jr.* Vibration Problems in Engineering. – New-York: John Wiley and Sons, 1974. – 472 p.
138. *Turkmen H.S.* Structural response of laminated composite shells subjected to blast loading: comparison of experimental and theoretical methods // J. of Sound and Vibration. – 2002. – **249**, N 4. – P. 663 – 678.
139. *Wang X., Zhong Z.* Three-Dimensional Solution of Smart Laminated Anisotropic Circular Cylindrical Shells with Imperfect Bonding // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, N 22. – P. 5901 – 5921.
140. *Wu C.P., Lo J.Y.* Three – Dimensional Elasticity Solutions of Laminated Annular Spherical Shells // J. Engng. Mech. – 2000. – **126**, N 8. – P. 882 – 885.
141. *Zarutskii V.A., Prokopenko N.Ya.* Influence of Discrete Longitudinal Ribs on Harmonic Waves in Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 4. – P. 457 – 469.
142. *Zarutskii V.A., Prokopenko N.Ya.* Vibrations and Stability of Shallow Ribbed Shells with a Rectangular Planform // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 6. – P. 335 – 340.
143. *Zarutskij V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic Problems and Stress Strain State of Inhomogeneous Shell Structures under Stationary and Nonstationary Loads // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 3. – P. 245 – 272.

Поступила 05.06.2015

Утверждена в печать 30.05.2017