УДК 534

К. В. АВРАМОВ

АВТОКОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ НАНОКОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, ул. Пожарского 2/10, Харьков, 61046, Украина; e-mail: avramov@nas.gov.ua

Отримано модель геометрично нелінійного динамічного деформування циліндричної оболонки з функціонально-градієнтного композитного матеріалу з наноармуванням. Розглядається випадок шарнірного закріплення оболонки. При отриманні цієї моделі використовується зсувна теорія Редді високого порядку. Основними невідомими цієї моделі є три проєкції переміщень точок серединної поверхні і два кути повороту нормалі до серединної поверхні. Отримано потенційну енергію геометрично нелінійного деформування циліндричної оболонки з урахуванням зсуву. Три проєкції переміщень і два кути повороту нормалі до серединної поверхні розкладаються за власними формами коливань циліндричної оболонки. У цих розкладаннях враховуються осьосиметричні форми коливань. Застосовуючи метод заданих форм, отримано нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь великої розмірності, що описує нелінійні коливання конструкції. Для опису надзвукового газового потоку використовується поршнева теорія. Для отримання механічних характеристик нанокомпозита застосовується узагальнене правило сумішей. Для дослідження динамічної стійкості тривіального стану рівноваги розраховуються характеристичні показники, застосовується пряме числове інтегрування лінеаризованих рівнянь руху. В результаті числового аналізу встановлено, що тривіальний стан рівноваги втрачає стійкість внаслідок біфуркації Хопфа. У точці біфуркації Хопфа народжується граничний цикл, який описує біжні хвилі в окружному напрямку циліндричної оболонки. Для дослідження поведінки граничного циклу при зміні тиску незбуреного потоку застосовується метод гармонійного балансу, в якому використовується моногармонічне наближення для автоколивань. Результати, отримані методом гармонійного балансу, порівнюються з даними прямого числового інтегрування рівнянь руху. Результати, отримані двома методами, близькі, що свідчить про адекватність методу гармонійного балансу при дослідженні автоколивань.

Получена модель геометрически нелинейного динамического деформирования цилиндрической оболочки из функционально-градиентного композитного материала с наноармированием. Рассматривается случай шарнирного закрепления оболочки. При получении этой модели используется сдвиговая теория Редди высокого порядка. Основными неизвестными этой модели являются три проекции перемещений точек срединной поверхности и два угла поворота нормали к срединной поверхности. Получена потенциальная энергия геометрически нелинейного деформирования цилиндрической оболочки с учетом сдвига. Три проекции перемещений и два угла поворота нормали к срединной поверхности раскладываются по собственным формам колебаний цилиндрической оболочки. В этих разложениях учитываются осесимметричные формы колебаний. Применяя метод заданных форм, получена нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, описывающая нелинейные колебания конструкции. Для описания сверхзвукового газового потока используется поршневая теория. Для получения механических характеристик нанокомпозита применяется обобщенное правило смесей. Для исследования динамической устойчивости тривиального состояния равновесия рассчитываются характеристические показатели и применяется прямое численное интегрирование линеаризованных уравнений движения. В результате численного анализа установлено, что тривиальное состояние равновесия теряет устойчивость вследствие бифуркации Хопфа. В точке бифуркации Хопфа рождается предельный цикл, который описывает бегущие волны в окружном направлении цилиндрической оболочки. Для исследования поведения предельного цикла при изменении давления невозмущенного потока применяется метод гармонического баланса, в котором используется моногармоническое приближение для автоколебаний. Результаты, полученные методом гармонического баланса, сравниваются с данными прямого численного интегрирования уравнений движения. Результаты, полученные двумя методами, близки, что свидетельствует об адекватности метода гармонического баланса при исследовании автоколебаний.

The model of geometrically nonlinear behavior of functionally graded composite cylindrical shell with nanotubes reinforcements is derived. The simply supported cylindrical shell is treated. The Reddy high-order shear deformation theory is used. Three projections of the displacements and two rotations angles of middle surface normal are the main unknowns of this problem. The potential energy of the cylindrical shell geometrically nonlinear deformation is derived with account of shear. Three displacements projections and two rotation angles of the middle surface normal is expanded using the eigenmodes of the cylindrical shell vibrations. The axisymmetric eigenmodes are accounted in these expansions too. High dimension nonlinear system of ordinary differential equation is obtained to describe the structure nonlinear vibrations using the assumed-mode method. The piston theory is used to describe the supersonic gas theory. The extended rule of mixture is used to obtain the mechanical features of nano composites. The calculation of the characteristic exponents and the direct numerical integrations of the motions equations are used to analyze the dynamic stability of the trivial equilibrium. As a result of the numerical analysis, it is obtained, that the trivial equilibrium loses stability due to the Hopf bifurcation. The limit cycle is originated due to the Hopf bifurcation. This cycle describes the travelling waves of the cylindrical shell. The harmonic balanced method is used to analyze the limit cycle behavior, when the flow pressure is varied. The mono harmonic approximation of the self-sustained vibrations is used. The data, which are obtained by the harmonic balanced method, are compared with the results of the direct numerical integrations. The results, which are obtained by two methods, are close. Therefore, the harmonic balanced method are true for self- sustained vibrations analysis.

Ключевые слова*: функционально-градиентный композитный материал, цилиндрическая оболочка в сверхзвуковом газовом потоке, сдвиговая теория высокого порядка, динамическая неустойчивость, автоколебания.*

Введение. Углеродистые нанотрубки обладают механическими характеристиками на несколько порядков выше, чем у стали. Поэтому их использование для армирования композита привело к созданию высокопрочностного и достаточно легкого композитного материала, который получил название нанокомпозит [1]. Так как плотность нанотрубок переменна по толщине нанокомпозита, то композит обладает функционально-градиентными свойствами. Свойства этих композитов сразу привлекли внимание ученых. Механические характеристики нанокомпозита рассчитываются с помощью метода Мори–Тамака [2]. Правило смесей применяется для расчета упругих постоянных нанокомпозита в [3]. В этой статье полученные результаты сравниваются с данными численного решения упругой задачи. В серии статей экспериментально исследовались механические характеристики нанокомпозитов. Образцы из нанокомпозита экспериментально исследовались на растяжение. Результаты анализа обсуждаются в статье [4], где представлены данные анализа модуля Юнга и предела текучести. В статье [5] экспериментально исследуется влияние армирования нанотрубками на жесткость матрицы композита. В работе констатируется существенное увеличение жесткости конструкции после ее армирования нанокомпозитами. Статика и динамика цилиндрических оболочек из наноармированного материала изучается в работах [6 – 10]. Линейные колебания пластин из наноармированных композитных материалов изучаются в работах [11 – 13].

В настоящей статье строится сдвиговая теория высокого порядка для анализа деформирования функционально-градиентной композитной цилиндрической оболочки с наноармированием. В полученной модели учитывается геометрически нелинейное деформирование. Благодаря его учету исследуются автоколебания оболочки при ее взаимодействии со сверхзвуковым газовым потоком. Для описания сверхзукового потока применяется поршневая теория. Для описания нелинейных колебаний оболочки из функционально-градиентного композитного материала с наноармированием применяется метод заданных форм. В результате получается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности, которая описывает автоколебания оболочки. Для исследования автоколебаний применяется метод гармонического баланса. Используется моногармоническая аппроксимация колебаний. Получена система нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд автоколебаний, описывающая автоколебания оболочки.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается цилиндрическая оболочка постоянной толщины h в сверхзвуковом газовом потоке. Динамическое напряженно-деформируемое состояние оболочки исследуется в криволинейной системе координат (x,θ,z) (рис. 1). В качестве основных неизвестных задачи выбираются три проекции перемещений срединной поверхности оболочки и два угла поворота нормали к срединной поверхности. При взаимодействии оболочки с газовым потоком может наблюдаться динамическая неустойчивость, которая приводит к росту амплитуд колебаний цилиндрической оболочки и, как следствие, к геометрически нелинейному деформированию конструкции. Тогда деформации точек оболочки являются малыми, а проекции трех перемещений u, v, w – умеренными. Поэтому связь между напряжениями и деформациями является линейной. Она описывается законом Гука. Материал оболочки композитный функционально-градиентный с наноармированием. Углеродистые нанотрубки располагаются вдоль оси x оболочки (рис. 1). Рассмотрим пять видов наноармирования, которые представлены на рис. 2. UD обозначает равномерное наноармирование в поперечном направлении цилиндрической оболочки. Остальные виды армирования FGV, FG**Λ**, FGX и FGO представлены на рис. 2. Все они имеют переменное армирование в поперечном направлении. Поэтому материал оболочки является функционально-градиентным. При равномерном распределении углеродистых нанотрубок (НТ) часть объема, занимаемого ими, обозначим через V^{*}_{CNT}. Для каждого из видов армирования часть объема занимаемого нанотрубками, описывается формулами, представленными в таблице 1.

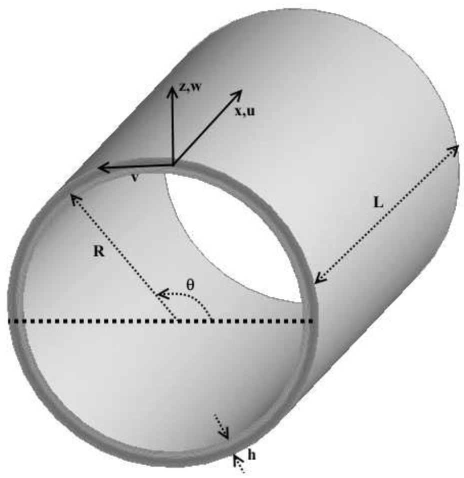

Рис. 1

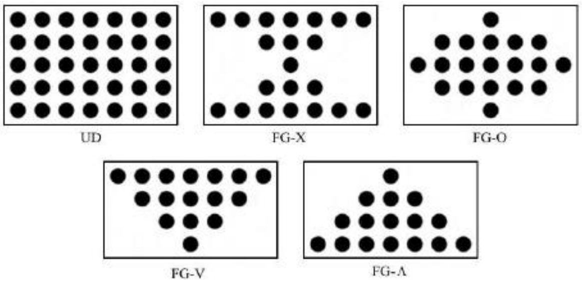

Рис. 2

Таблица 1. Зависимость объема, занимаемого НТ, от поперечной координаты z

Тип армирования	Часть объема, занимаемого НТ
UD-CNT	$V_{CNT}(z) \equiv V^{*}_{CNT};$
FGV-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 + \frac{2z}{h}\right)V^{*}_{CNT};$
FG**Λ**-CNT	$V_{CNT}(z) = \left(1 - \frac{2z}{h}\right)V^{*}_{CNT};$
FGX-CNT	$V_{CNT}(z) = \frac{4\lvert z\rvert}{h}V^{*}_{CNT};$
FGO-CNT	$V_{CNT}(z) = 2\left(1 - \frac{2\lvert z\rvert}{h}\right)V^{*}_{CNT}.$

Механические характеристики функционально-градиентного композитного материала цилиндрической оболочки зависят от поперечной координаты z. Они определяются из расширенного правила смесей так:

$$E_{11}(z) = \eta_1 V_{CNT}(z)E_{11}^{CNT} + V_m(z)E^m;\ E_{22}(z) = \frac{\eta_2 E_{22}^{CNT}E^m}{V_{CNT}(z)E^m + V_m(z)E_{22}^{CNT}}\ G_{12}(z) = \frac{\eta_3 G_{12}^{CNT}G^m}{V_{CNT}(z)G^m + V_m(z)G_{12}^{CNT}}$$

где $E_{11}^{CNT}, E_{22}^{CNT}, G_{12}^{CNT}$ – модули Юнга и модуль сдвига нанотрубок; μ_{12}^{CNT} – коэффициент Пуассона НТ; η_1, η_2, η_3 – параметры, описывающие связь между НТ и матрицей композита; E^m, G^m – модуль Юнга и модуль сдвига матрицы композита; ρ^{CNT}, ρ^m – плотность НТ и матрицы композита. Так как материал оболочки композитный и градиентный, то в модели конструкции будет учитываться сдвиг. Закон Гука для композитного материала оболочки имеет вид:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{XX}\\ \sigma_{\theta\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{11}(z) & Q_{12}(z)\\ Q_{12}(z) & Q_{22}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{XX}\\ \varepsilon_{\theta\theta}\end{bmatrix}; \qquad (2)$$

$$\sigma_{\theta Z} = G_{23}(z)\gamma_{\theta Z}; \sigma_{XZ} = G_{13}(z)\gamma_{XZ}; \sigma_{X\theta} = G_{12}(z)\gamma_{X\theta},$$

где

$$Q_{11}(z)\frac{E_{11}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)};\ Q_{22}(z)\frac{E_{22}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)};\ Q_{12}(z)\frac{\mu_{21}(z)E_{11}(z)}{1-\mu_{12}(z)\mu_{21}(z)}.$$

$\gamma_{xz}, \gamma_{\theta z}$ – деформации сдвига; $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{xz}, \gamma_{x\theta}$ – элементы тензора деформаций Грина; $\sigma_{xz}, \sigma_{\theta z}$ – напряжения сдвига; $\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}$ – элементы тензора напряжений.

Проекции перемещений произвольной точки оболочки, находящейся на расстоянии z от срединной поверхности, на оси x, θ и z обозначим через $u_x(x,\theta,t,z), u_\theta(x,\theta,t,z)$ и $u_z(x,\theta,t,z)$, соответственно. Для описания деформирования оболочки воспользуемся сдвиговой теорией Редди высокого порядка:

$$u_x(x,\theta,t,z) = u(x,\theta,t) + z\phi_1(x,\theta,t) + z^2\psi_1(x,\theta,t) + z^3\gamma_1(x,\theta,t); \quad (3)$$
$$u_\theta(x,\theta,t,z) = \left(1+\frac{z}{R}\right)v(x,\theta,t) + z\phi_2(x,\theta,t) + z^2\psi_2(x,\theta,t) + z^3\gamma_2(x,\theta,t);$$
$$u_z(x,\theta,t,z) = w(x,\theta,t),$$

где R – радиус цилиндрической оболочки; ϕ_1, ϕ_1 – углы вращения нормалей к срединной поверхности относительно осей θ, x , соответственно. Нелинейные колебания оболочки описываются пятью функциями: $u(x,\theta,t), v(x,\theta,t), w(x,\theta,t)$, $\phi_1(x,\theta,t)$, $\phi_2(x,\theta,t)$. Тогда четыре функции $\psi_1(x,\theta,t), \gamma_1(x,\theta,t), \psi_2(x,\theta,t), \gamma_2(x,\theta,t)$ разложения (3) определяются из следующих граничных условий:

$$\gamma_{xz}\big|_{z=\pm 0.5h} = 0; \ \gamma_{\theta z}\big|_{z=\pm 0.5h} = 0. \quad (4)$$

Из граничных условий (4), функции разложения (3) принимают следующий вид:

Кинетическую энергию цилиндрической оболочки представим в следующем виде:

$$T = 0.5\int_0^{2\pi}\int_0^L\int_{-0.5h}^{0.5h}\rho(z)\left(\dot{u}_x^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2\right)\left(1+\frac{z}{R}\right)dz\,dx\,R\,d\theta, \quad (6)$$

где L – длина оболочки вдоль образующей. Соотношения (3) подставим в (6). Тогда кинетическая энергия примет следующий вид:

$$T = 0.5\int_0^{2\pi}\int_0^L\Big\{r_0(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2r_1\left(\frac{\dot{v}^2}{R} + \dot{u}\dot{\phi}_1 + \dot{v}\dot{\phi}_2\right) +$$
$$+ r_2\left(\frac{\dot{v}^2}{R^2} + \dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \frac{2}{R}\dot{v}\dot{\phi}_2 + 2\dot{v}\dot{\psi}_2\right) + 2r_3\left(\dot{u}\dot{\gamma}_1 + \frac{\dot{v}\dot{\psi}_2}{R} + \dot{\gamma}_2\dot{v} + \dot{\phi}_2\dot{\psi}_2\right) +$$

где $r_i = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i\rho(z)dz; \ i = 0,\ldots,6.$ Итак, кинетическая энергия (7) представлена двойным интегралом. Потенциальную энергию оболочки представим в следующем виде:

$$2\prod = \int_0^L\int_0^{2\pi}\int_{-0.5h}^{0.5h}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{\theta z}\gamma_{\theta z} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} + \sigma_{x\theta}\gamma_{x\theta}\right)\left(1+\frac{z}{R}\right)dz$$

Соотношения (2) подставим в потенциальную энергию (8). В результате получим:

$$\prod = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-0.5h}^{0.5h} \left(Q_{11}\varepsilon_{XX}^2 + 2Q_{12}\varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{XX} + Q_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^2 + G_{23}\gamma_{\theta Z}^2 + G_{13}\gamma_{XZ}^2 + G_{12}\gamma_{X\theta}^2\right)\left(1+\frac{z}{R}\right)dzRd\theta dx.$$

Так как оболочка совершает геометрически нелинейное деформирование, то элементы тензора деформаций $\varepsilon_{XX}, \varepsilon_{\theta\theta}, \gamma_{X\theta}$ связаны с проекциями перемещений u_X, u_θ, u_Z так:

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial u_X}{\partial x} + 0.5\left[\left(\frac{\partial u_X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_Z}{\partial x}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{R(1+zR^{-1})}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_Z\right) +$$

$$\gamma_{X\theta} = \frac{1}{R(1+zR^{-1})}\frac{\partial u_X}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R(1+zR^{-1})}\left\{\frac{\partial u_X}{\partial \theta}\frac{\partial u_X}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_Z\right)\frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \frac{\partial u_Z}{\partial x}\left(-\frac{\partial u_Z}{\partial \theta} + u_\theta\right)\right\}. \qquad (10)$$

Элементы тензора деформаций удовлетворяют следующим разложениям в ряд по координате z :

$$\varepsilon_{XX} = \varepsilon_{XX,0} + zk_{XX}^{(0)} + z^2k_{XX}^{(1)} + z^3k_{XX}^{(2)};$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta,0} + zk_{\theta\theta}^{(0)} + z^2k_{\theta\theta}^{(1)} + +z^3k_{\theta\theta}^{(2)};$$

$$\gamma_{X\theta} = \gamma_{X\theta,0} + zk_{X\theta}^{(0)} + z^2k_{X\theta}^{(1)} + z^3k_{X\theta}^{(2)};\ \gamma_{XZ} = \gamma_{XZ,0} + zk_{XZ}^{(0)} + z^2k_{XZ}^{(1)} + z^3k_{XZ}^{(2)};$$

$$\gamma_{\theta Z} = \gamma_{\theta Z,0} + zk_{\theta Z}^{(0)} + z^2k_{\theta Z}^{(1)} + z^3k_{\theta Z}^{(2)}, \qquad (11)$$

где коэффициенты этого разложения находятся так:

$$\varepsilon_{XX,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + 0.5\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right];\ k_{XX}^{(0)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x};\ k_{XX}^{(1)} = 0;$$

$$k_{XX}^{(2)} = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right);\ \varepsilon_{\theta\theta,0} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2R^2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)^2 + \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right\};$$

$$k_{\theta\theta}^{(0)} = -\frac{w}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta};\ k_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{2R^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2R^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{R^3}\frac{\partial v}{\partial \theta};$$

$$k_{\theta\theta}^{(2)} = -\frac{4R^2 + h^2}{3R^4h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{4R^2 + 2h^2}{3R^3h^2}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} - \frac{1}{3R^4}\frac{\partial v}{\partial \theta};$$

$$\gamma_{X\theta,0} = \frac{\partial u}{R\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\left\{\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right\};$$

$$k_{X\theta}^{(0)} = \frac{\partial \phi_1}{R\partial \theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{R\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x};\ k_{X\theta}^{(1)} = -\frac{\partial \phi_1}{R^2\partial \theta} + \frac{1}{2R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{2R\partial x}.$$

Соотношения (11) подставим в потенциальную энергию (9) и произведем интегрирование по z . В результате получим следующее выражение для потенциальной энергии:

$$\prod = 0.5\int_0^L\int_0^{2\pi}\left(\sum_{\nu=0}^{6}\Pi_\nu\right)dxRd\theta, \qquad (12)$$

где

$$\Pi_0 = Q_{11}^{(0)}\varepsilon_{XX,0}^2 + 2Q_{12}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta,0}\varepsilon_{XX,0} + Q_{22}^{(0)}\varepsilon_{\theta\theta,0}^2 + G_{23}^{(0)}\gamma_{\theta Z,0}^2 + G_{12}^{(0)}\gamma_{X\theta,0}^2 + G_{13}^{(0)}\gamma_{XZ,0}^2;$$

$$\Pi_1 = 2Q_{11}^{(1)}\varepsilon_{XX,0}k_{XX}^{(0)} + 2Q_{22}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{\theta\theta}^{(0)} + 2Q_{12}^{(1)}\varepsilon_{\theta\theta,0}k_{XX}^{(0)} +$$

$$\Pi_2 = 2Q_{12}^{(2)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{XX}^{(0)} + 2G_{12}^{(2)}\gamma_{X\theta,0}k_{X\theta}^{(1)} + Q_{22}^{(2)}k_{\theta\theta}^{(0)2} + 2G_{13}^{(2)}\gamma_{XZ,0}k_{XZ}^{(1)} +$$

$$\Pi_3 = 2G_{12}^{(3)}\gamma_{X\theta,0}k_{X\theta}^{(2)} + 2G_{12}^{(3)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(1)} + 2G_{23}^{(3)}\gamma_{\theta Z,0}k_{\theta Z}^{(2)} + 2Q_{12}^{(3)}k_{\theta\theta}^{(2)}\varepsilon_{XX,0} +$$

$$\Pi_4 = Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(1)2} + G_{23}^{(4)}k_{\theta Z}^{(1)2} + 2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(2)}k_{XX}^{(0)} + 2G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(0)}k_{X\theta}^{(2)} + 2Q_{22}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{\theta\theta}^{(2)} +$$
$$+G_{13}^{(4)}k_{XZ}^{(1)2} + G_{12}^{(4)}k_{X\theta}^{(1)2} + 2Q_{12}^{(4)}k_{\theta\theta}^{(0)}k_{XX}^{(2)} + 2Q_{11}^{(4)}k_{XX}^{(0)}k_{XX}^{(2)}.$$

Механические характеристики нанокомпозита, входящие в потенциальную энергию (12), определяются так:

$$\left(Q_{11}^{(i)}, Q_{12}^{(i)}, Q_{22}^{(i)}, G_{23}^{(i)}, G_{13}^{(i)}, G_{12}^{(i)}\right) = \int_{-0.5h}^{0.5h} z^i\left(Q_{11}, Q_{12}, Q_{22}, G_{23}, G_{13}, G_{12}\right)dz. \qquad (13)$$

Цилиндрическая оболочка обтекается снаружи сверхзвуковым газовым потоком, который движется параллельно образующей оболочки. Нормальное давление, действующее на оболочку со стороны сверхзвукового газового потока, описывается поршневой теорией так [17]:

$$p = -\frac{\gamma p_\infty M^2}{\sqrt{M^2-1}}\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M^2-2}{Ma_\infty(M^2-1)}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{2R\sqrt{M^2-1}}\right], \qquad (14)$$

где γ – показатель адиабаты; p_∞ – невозмущенное давление газового потока; M – число Маха; a_∞ – скорость звука.

В следующем разделе будут численно исследоваться нелинейные автоколебания цилиндрической оболочки из нанокомпозита, возникшие вследствие динамической неустойчивости, вызванной взаимодействием конструкции со сверхзвуковым газовым потоком. В этом разделе выводится нелинейная динамическая система с конечным числом степеней свободы, описывающая такие автоколебания. Автоколебания оболочки разложим так:

$$w(x,\theta,t)\sum_{m=1}^{N_1}\left[A_m\cos(n\theta) + B_m(t)\sin(n\theta)\right]\sin(\lambda_m x) +$$

$$+\sum_{m=1}^{N_2} C_m(t)\sin(\lambda_{2m-1}x);$$

$$u = \sum_{m=1}^{N_1}\left[A_{N_1+m}\cos(n\theta) + B_{N_1+m}\sin(n\theta)\right]\cos(\lambda_m x) + \sum_{m=1}^{N_2} C_{N_2+m}\cos(\lambda_{2m-1}x);$$

$$v(x,\theta,t) = \sum_{m=1}^{N_1}\left[A_{2N_1+m}(t)\cos(n\theta) + B_{2N_1+m}(t)\sin(n\theta)\right]\sin(\lambda_m x);$$

$$\phi_1 = \sum_{m=1}^{N_1} \begin{bmatrix} A_{3N_1+m}\cos(n\theta) \\ +B_{3N_1+m}\sin(n\theta) \end{bmatrix} \cos(\lambda_m x) \sum_{m=1}^{N_2} C_{2N_2+m}\cos(\lambda_{2m-1}x), \quad (15)$$

где

$\mathbf{q} = [A_1, \dots, B_1, \dots, C_1, \dots, A_{3N_1+1}, \dots, B_{3N_1+1}, \dots, C_{2N_2+1}, \dots, C_{3N_2}] \equiv [q_1, \dots, q_{N_*}]$ – вектор обобщенных координат размерности $N_* = 10N_1 + 3N_2$. Так как конструкция совершает геометрически нелинейные колебания, в разложениях (15) присутствуют пары сопряженных мод колебаний. Более того, в разложениях нелинейных колебаний обязательно присутствуют осесимметричные формы колебаний.

Для получения уравнений движения воспользуемся методом заданных форм [43], который основывается на уравнениях Лагранжа. Соотношения (15) подставим в кинетическую энергию системы (7) и произведем необходимое интегрирование. Тогда кинетическая энергия будет иметь вид квадратичной формы обобщенных скоростей: $T = T(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{N_*})$. Теперь разложение (15) подставим в соотношения (12). Тогда потенциальную энергию представим в виде функции от обобщенных координат конструкции: $\prod = \prod(q_1, \dots, q_{N_*})$. Эта функция содержит квадратные, кубические и слагаемые четвертой степени относительно обобщенных координат. Тогда уравнение Лагранжа относительно обобщенных координат конструкции примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{N_*} (m_{ij}\ddot{q}_j + K_{ij}q_j) = \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{j\le\nu} \alpha_{\nu j}^{(i)} q_\nu q_j + \sum_{\nu=1}^{N_*} \sum_{j=1}^{j\le\nu} \sum_{j_1=1}^{j_1\le j} \beta_{\nu j j_1}^{(i)} q_\nu q_j q_{j_1} + Q_i; \quad (16)$$

где $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}_{i=1,\dots,N_*}^{j=1,\dots,N_*}$; $\mathbf{K} = \{K_{ij}\}_{i=1,\dots,N_*}^{j=1,\dots,N_*}$ – матрицы масс и жесткости конструкции; $\alpha_{\nu j}^{(i)}, \beta_{\nu j j_1}^{(i)}$ – числовые коэффициенты, описывающие геометрически нелинейное деформирование оболочки; $\mathbf{Q} = [Q_1, \dots, Q_{N_*}]$ – обобщенные силы, описывающие взаимодействие оболочки со сверхзвуковым газовым потоком. Эти обобщенные силы линейно зависят от обобщенных координат и обобщенных скоростей конструкции так:

$$Q_\nu = \sum_{m=1}^{N_1} (\lambda_{\nu m} q_m + \eta_{\nu m}\dot{q}_m); \; Q_{3N_1+\nu} \sum_{m=1}^{N_1} (\lambda_{\nu m} q_{3N_1+m} + \eta_{\nu m}\dot{q}_{3N_1+m}). \quad (17)$$

Перед исследованием автоколебаний определяются значения параметров системы, при которых тривиальное состояние равновесия теряет устойчивость и в системе возникают автоколебания. Это происходит вследствие бифуркации Хопфа. Для исследования устойчивости тривиального состояния равновесия рассчитываются характеристические показатели линеаризованной динамической системы (16). Подход к расчету этих показателей обсуждается в [14].

Для анализа автоколебаний к динамической системе (16) применим метод гармонического баланса, который подробно рассмотрен в монографии [14]. Используется моногармоническое приближение для колебаний. Метод гармонического баланса сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд автоколебаний.

2. Численный анализ динамической неустойчивости. Для расчета механических характеристик функционально-градиентного композитного материала с наноармированием воспользуемся параметрами, описывающими связь между НТ и матрицей композита η_1, η_2, η_3. Величины этих параметров получены в работах [15]. Механические характеристики углеродистых нанотрубок и матриц композита принимались следующими:

Для исследования потери устойчивости тривиального состояния равновесия рассчитывались характеристические показатели. Численно исследовалась эта потеря устойчивости при различном числе волн в окружном направлении n (15). Характеристические показатели исследовались для различных значений невозмущенного давления газового потока p_∞. В результате расчета определялась граница области устойчивости тривиального состояния равновесия, которая соответствует бифуркации Хопфа. В бифуркации Хопфа рождаются автоколебания цилиндрической оболочки. Такие колебания исследуются в следующем разделе. Значение давления, соответствующее точке бифуркации Хопфа, назовем критическим $p_\infty^{(CR)}$. Численно исследуем оболочку с параметрами

$$R = 0.25 \text{ м}; h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \frac{h}{R} = 0.02;\ L = 1 \text{ м}, \qquad (18)$$

FGV армированием (рис. 2) и $V_{CNT}^{*} = 0{,}12$. Расчеты проводились для трех значений чисел Маха $M = 5; M = 3$ и $M = 1{,}5$. При проведении расчетов в разложении (15) принималось $N_1 = 2;\ N_2 = 1$. Тогда число степеней свободы динамической системы (16) $N_* = 23$. Параметры сверхзвукового потока

(14) принимались следующими: . Результаты расчета представлены на рис. 3. Сплошной и пунктирной линией показаны критические давления газового потока в зависимости от числа волн в окружном направлении n для $M = 3$ и $M = 5$ соответственно. При $M = 3$ и $M = 5$ минимальное критическое давление реализуется при $n = 6$. Как следует из этих графиков, число Маха существенно влияет на величины критического давления.

Исследовались критические значения давления при $M = 3$ оболочки с параметрами (18) и с разными видами наноармирования, которые показаны на рис. 2. Полученные расчетные значения критического давления представлены в таблице 2. В первом столбце таблицы представлены виды наноармирования; во втором столбце показаны значения части объема, занимаемого углеродистыми НТ. В третьем столбце показано число волн в окружном направлении, при котором наблюдается критическое давление, представленное в четвертом столбце таблицы. Чаще всего критические значения давления наблюдались при $n = 5$ и значительно реже при $n = 6$. Как следует из таблицы 3, вид армирования существенно влияет на величину критического давления. С помощью изменения вида армирования величину критического давление можно увеличить в два раза.

3. Численный анализ автоколебаний. Исследуем численно автоколебания, которые возникают вследствие динамической неустойчивости состояния равновесия оболочки. Для исследования автоколебаний применяется метод гармонического баланса. Результаты расчета таких автоколебаний представляются на бифуркационной диаграмме, которая выражает зависимость амплитуд автоколебаний от давления невозмущенного потока p_∞. Кроме применения метода гармонического баланса, для исследования автоколебаний применяется прямое численное интегрирование уравнений движения (16). Начальные условия для численного интегрирования выбираются из результатов расчета методом гармонического баланса. Исследуются автоколебания оболочки с равномерным наноармированием материала UD и параметром $V_{CNT}^* = 0{,}12$. Численные значения параметров оболочки (18), а параметры

сверхзвукового потока таковы: ; $M = 3$. Величина n в разложении (15) принимались $n = 6$. Диаграмма отклика представлена на рис. 4, где показываются амплитуды автоколебаний обобщенной координаты $q_1 - A_1$ в зависимости от давления потока p_∞. При $p_\infty < 0{,}32$ МПа тривиальное состояние равновесия является устойчивым. При $p_\infty = 0{,}32$ МПа возникает бифуркация Хопфа, в результате которой тривиальное состояние равновесия становится неустойчивым и в системе возбуждаются автоколебания. Сплошной линией (рис. 4) показываются амплитуды автоколебаний, полученные методом гармонического баланса. Результаты прямого численного интегрирования представлены ромбами на рис. 4. Как следует из этого рисунка, результаты прямого численного интегрирования и данные, полученные методом гармонического баланса, близки.

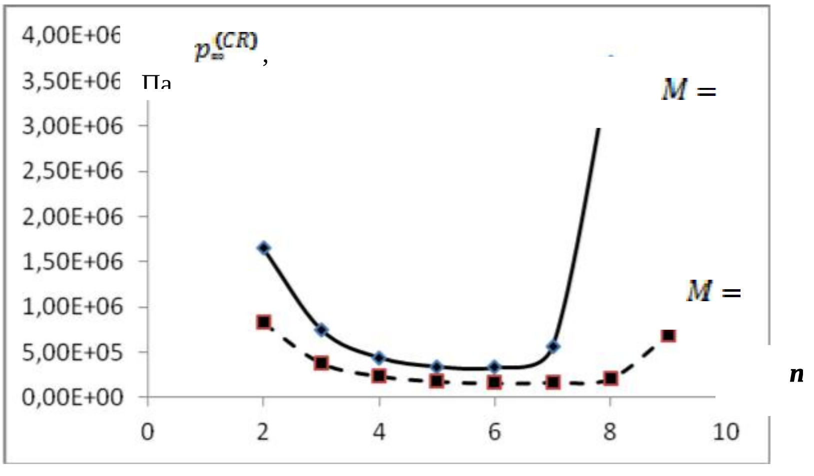

Рис. 3

Таблица 2. Критические значения давления при различном виде армирования углеродистыми нанотрубками и числе Маха $M = 3$

Вид наноармирования	V^{*}_{CNT}	n	$p_{\infty}^{(CR)}$, МПа
FGV-CNT	0,12	6	0,33
	0,17	5	0,68
	0,28	5	0,97
FGX-CNT	0,12	5	0,38
	0,17	5	0,76
	0,28	5	1,21
FGO-CNT	0,12	6	0,27
	0,17	5	0,56
	0,28	5	0,71

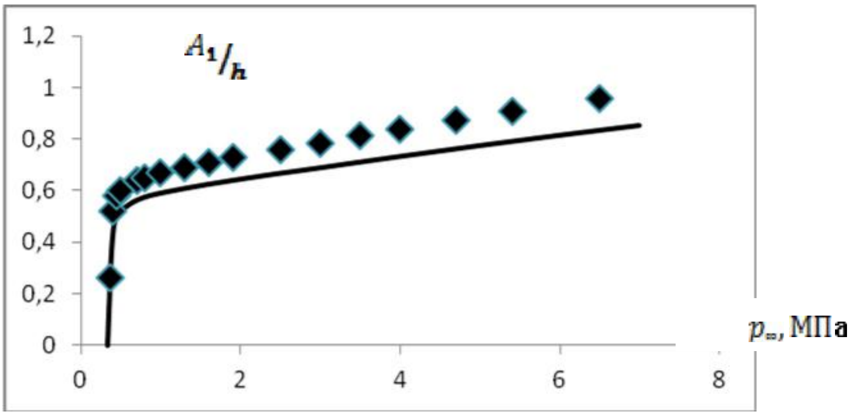

Рис. 4

Заключение. В работе построена новая модель геометрически нелинейного динамического деформирования функционально-градиентной композитной цилиндрической оболочки с наноармированием. В модели применяется сдвиговая теория Редди высокого порядка. С помощью метода заданных форм нелинейная динамика таких оболочек описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Для исследования автоколебаний применяется метод гармонического баланса с моногармонической аппроксимацией колебаний. Показано, что этот подход достаточно точно описывает автоколебания оболочки.

Динамическая неустойчивость цилиндрической оболочки из нанокомпозита в сверхзвуковом газовом потоке наступает вследствие бифуркации Хопфа. Минимальное значение критического давления сверхзвукового обтекания оболочки реализуется при числе волн в окружном направлении $n = 5; 6$. При расчетах изотропных цилиндрических оболочек в сверхзвуковом газовом потоке минимальное значение критического давления наступает при числе волн в окружном направлении $n = 27$. Кроме радиальных перемещений, значительный вклад в нелинейные колебания вносит координата $\phi_2(x, \theta, t)$, что свидетельствует о значительном вращении нормали к срединной поверхности.

1. *Seidel G. D., Lagoudas D. C.* Micromechanical analysis of the effective elastic properties of carbon nanotube reinforced composites. Mechanics of Materials. 2006. Vol. 38. P. 884–907.
2. *Liu Y. J., Chen X. L.* Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element. Mechanics of Materials. 2003. Vol. 35. 69–81.
3. *Odegard G. M., Gates T. S., Wise K. E., Park C., Siochi E. J.* Constitutive modeling of nanotube–reinforced polymer composites. Composites Science and Technology. 2003. Vol. 63. P. 1671–1687.
4. *Allaoui A., Bai S., Cheng H. M., Bai J. B.* Mechanical and electrical properties of a MWNT/epoxy composite/. Composites Science and Technology. 2002.Vol. 62. P.1993–1998.
5. *Ci L., Bai J. B.* The reinforcement role of carbon nanotubes in epoxy composites with different matrix stiffness. Composites Science and Technology. 2006. Vol. 66. P. 599–603.
6. *Mehrabadi S. J., Aragh B. S.* Stress analysis of functionally graded open cylindrical shell reinforced by agglomerated carbon nanotubes. Thin-Walled Structures. 2014. Vol. 80. P.130–141.
7. *Zhang L.W., Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L.* Static and dynamic of carbon nanotube reinforced functionally graded cylindrical panels. Composite Structures. 2014. 111. P. 205–212.
8. *Song Z. G., Zhang L. W., Liew K. M.* Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded composite cylindrical shells in thermal environments. International Journal of Mechanical Sciences. 2016. Vol. 115–116. P. 339–347.
9. *Sobhaniaragh B., Batra R. C., Mansur W. J., Peters F. C.* Thermal response of ceramic matrix nanocomposite cylindrical shells using Eshelby-Mori-Tanaka homogenization scheme. Composites Part B: Engineering. 2017. Vol. 118. P. 41–53.
10. *Yaser K., Rossana D., Francesco T.* Free vibration of FG-CNT reinforced composite skew cylindrical shells using the Chebyshev-Ritz formulation. Composites Part B: Engineering. 2018. Vol. 147. P. 169–177.
11. *Lei Z. X., Liew K. M., Yu J. L.* Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment. Composite Structures. 2013. Vol. 106. P. 128–138.
12. *Lei Z. X. Zhang L .W. , Liew K. M.* Elastodynamic analysis of carbon nanotube-reinforced functionally graded plates. International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 99. P. 208–217.
13. *García-Macías E., Rodríguez-Tembleque L., Sáez A.* Bending and free vibration analysis of functionally graded graphene vs. carbon nanotube reinforced composite plates. Composite Structures. 2018. Vol. 186. P. 123–138.
14. *Аврамов К. В. Михлин Ю. В.* Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Подходы, методы, явления. 2-е издание переработанное и дополненное. Москва: Институт компьютерных исследований, 2015. 716 с.
15. *Mehri M., Asadi H., Wang Q.* On dynamic instability of a pressurized functionally graded carbon nanotube reinforced truncated conical shell subjected to yawed supersonic airflow. Composite Structures. 2016. Vol. 153. 938–951.

Получено 02.04.2019,
в окончательном варианте 10.06.2019