УДК 539.372,539.38

Конкретизація параметрів експоненціального ядра спадковості ендохронної теорії при опису ратчетингу за двовісного навантаження

М. В. Бородій, М. П. Адамчук, В. О. Стрижало

Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна

Для опису ефекту ратчетингу, або циклічної повзучості металічних матеріалів за складного непропорційного навантаження з контролем за напруженнями пропонується метод конкретизації параметрів експоненціальних ядер спадкової функції ендохронної теорії пластичності. Суть методу полягає у використанні залежності різниці модулів пластичності від швидкості ратчетингу на усталеній ділянці кривої циклічного деформування. Модулі пластичності визначаються в точках дії максимальних напружень у різних півциклах асиметричного навантаження. Вважається, чим більшою є різниця між модулями пластичності в напрямку дії середнього напруження циклу, тим більшим є приріст деформацій на кожному циклі навантаження. Для визначення швидкості накопичення пластичних деформацій на усталеній стадії деформування за двовісного навантаження використано положення запропонованого раніше авторами підходу, який базується на даних одновісних експериментів при циклічному асиметричному навантаженні розтягненням–стисненням і знакозмінним крученням та відомому значенні параметра непропорційності циклу. Підхід розроблено для аналізу циклічних траєкторій навантаження з однаковими за Мізесом значеннями середніх і амплітудних напружень. На основі певних спрощень запропоновано вираз для визначення параметрів експоненціальних ядер спадкової функції в залежності від геометрії циклічної траєкторії та відомої швидкості ратчетингу для базової траєкторії. За допомогою більш простої білінійної моделі пружно-пластичного деформування отримано аналогічні значення параметрів експоненціальних ядер спадкової функції на основі величин різниці між модулями пластичності, які використано для моделювання ефекту ратчетингу за одно- і двовісного циклічного навантаження. Програми навантаження і дані експериментів запозичено з літературних джерел. Результати моделювання свідчать, що отримані за запропонованим методом параметри визначальних рівнянь циклічної пластичності дозволяють задовільно описувати кінетику напружено-деформованого стану металічних матеріалів під час циклічної повзучості за двовісного непропорційного навантаження.

Ключові слова: ратчетинг, усталена швидкість ратчетингу, експоненціальне ядро, спадкова функція, ендохронна теорія, параметр непропорційності циклу, одно- і двовісне циклічне навантаження.

Вступ. При моделюванні деформування в'язко-пружних або пружно-пластичних матеріалів із використанням теорій пластичності функціонального типу важливо при розрахунковому аналізі конкретизувати параметри ядер спадковості інтегральних рівнянь [1]. Розглянемо лише пружно-пластичні матеріали, до яких відносяться метали і сплави, та моделі циклічної пластичності [2, 3] на основі ендохронної теорії пластичності [4]. У цих моделях зазвичай використовують ядра спадковості у вигляді експоненціальної функції або експоненціальних рядів (далі-спадкова функція). Як показано в роботі [5], для моделювання ефекту ратчетингу (незалежної від часу короткочасної циклічної повзучості матеріалу) класичного визначення експоненціальної спадкової функції [2, 4], яка характеризує кінематичне зміцнення матеріалу, недостатньо. Тому раніше [5] було запропоновано удосконалення визначальних рівнянь [4], яке полягає в урахуванні залежності спадкової функції від додаткового параметра [6], що характеризує різницю між поточним найбільшим напруженням у кожному півциклі навантаження і максимально досягнутим за весь час навантаження. Це дозволяє врахувати відмінність між параметрами ядра спадкової функції ендо-

© М. В. БОРОДІЙ, М. П. АДАМЧУК, В. О. СТРИЖАЛО, 2018

хронної теорії в різних півциклах одновісного навантаження та описати ефект ратчетингу. Як розвиток цього підходу в роботі [5] здійснено конкретизацію параметрів спадкової функції ендохронної теорії за даними двох базових експериментів при ратчетингу за одновісного навантаження і промодельовано цей ефект для широкого спектра експериментальних одновісних програм циклічного навантаження [6]. У роботі [7] із використанням цієї ж методології вперше отримано розв'язувану систему рівнянь ендохронної теорії пластичності, розроблено чисельну процедуру та продемонстровано її застосування на прикладі модельної задачі для опису ратчетингу за двовісного непропорційного навантаження. Проте, параметри ядер спадкової функції, що запропоновані за підходом [5], потребують додаткового визначення. Вони можуть використовуватися лише для одновісних програм навантаження, що не дозволяє врахувати вплив непропорційності на кінетику накопичення деформації ратчетингу за двовісного циклічного навантаження.

Метою даної роботи є розвиток моделі [7] в частині конкретизації параметрів спадкової функції на основі простих базових експериментів та опис на їх основі експериментальних кривих ратчетингу за двовісного навантаження.

Постановка задачі. Експериментальне дослідження ефекту ратчетингу за двовісного навантаження здебільшого проводиться на циліндричних зразках під час асиметричного циклічного навантаження осьовою силою та крутним моментом із контролем по напруженнях [6, 8, 9]. Для теоретичного моделювання таких непропорційних навантажень розтягненням–стисненням та знакозмінним крученням обмежимося аналізом ізотропних циклічно нестисливих матеріалів у межах склерономних (незалежних явно від часу) процесів. Приймемо, що під час деформування відмінними від нуля є дві компоненти тензора напружень – σ, τ і дві компоненти тензора пластичних деформації – ε^p, γ^p, інші не розглядаються через їхню малість. Тоді у відповідності з ендохронною теорією пластичності [2, 4] зв'язок між компонентами тензора еквівалентних за Мізесом напружень і відповідними компонентами пластичних деформацій задається наступними виразами:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 \frac{d\varepsilon^p}{dz} + \int_0^z E^\sigma (z - z') \frac{d\varepsilon^p}{dz} dz';\\ \sqrt{3}\tau &= \sigma_0 \frac{d\gamma^p}{dz} + \int_0^z E^\tau (z - z') \frac{d\varepsilon^p}{\sqrt{3}dz'} dz';\end{aligned} \tag{1}$$

$$dz = \frac{d\xi}{F(z)}, \tag{2}$$

де σ_0 – початковий радіус поверхні текучості; z – внутрішній час, що є аналогом параметра часу у просторі пластичних деформацій; ξ – міра внутрішнього часу (параметр Одквіста), яка для двовісного випадку навантаження визначається як $d\xi^2 = (d\varepsilon^p)^2 + \frac{1}{3}(d\gamma^p)^2$; F – функція ізотропного зміцнення матеріалу; E^σ, E^τ – спадкові функції для різних видів навантаження розтягненням–стисненням і знакозмінним крученням відповідно, за припущення про ізотропність матеріалу маємо $E^\sigma = E^\tau = E$.

Для більшості конструкційних сталей найбільш універсальною функцією ізотропного зміцнення є функція [10], за допомогою якої можна описати властивості циклічно зміцнюваних, знеміцнюваних і циклічно стабільних матеріалів:

$$F(z) = C - (C - 1)e^{-\beta z}, \tag{3}$$

де C – безрозмірний параметр, що характеризує радіус поверхні текучості в стані стабілізації циклічних властивостей матеріалу.

Оскільки процес ратчетингу зазвичай описується моделями пластичності на основі законів кінематичного зміцнення, складову ізотропного зміцнення на етапі деформування з усталеною швидкістю ратчетингу можна не враховувати:

$$F(z) = C = 1. \tag{4}$$

Тоді згідно з (2) приріст внутрішнього часу буде дорівнювати приросту пластичної деформації – параметру Одквіста $dz = d\xi$.

У рівняннях (1) другий доданок характеризує кінематичне зміцнення матеріалу, в якому основною матеріальною функцією є спадкова функція E експоненціального типу [5]:

$$E(z) = E_1 e^{-\alpha_1 z} + E_2, \tag{5}$$

де параметр E_2 має розмірність напружень (рис. 1) і приймає при асиметричному навантаженні ($\delta^+ \neq \delta^-$) різні значення $E_2^+ \neq E_2^-$ для півциклів із різним знаком навантаження (наприклад, "+" – розтягнення, "–" – стиснення).

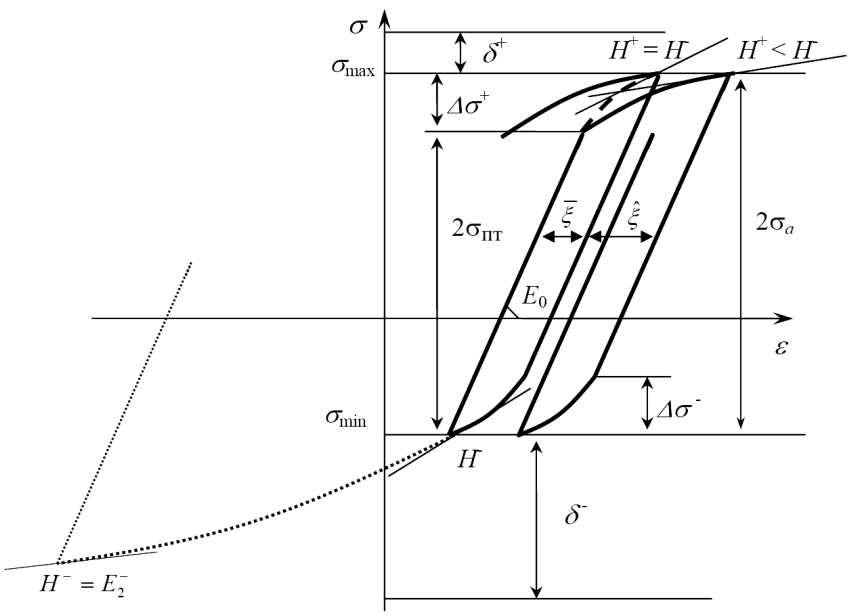


Рис. 1. Схема для визначення параметрів моделі.

Таке визначення параметра E_2 спадкової функції дозволяє отримати незамкнуту діаграму деформування при моделюванні знакозмінного асиметричного навантаження з приростом деформацій на кожному циклі. Зазначимо, що перший член виразу (5) значущий при малих z і зі збільшенням z прямує до нуля.

Швидкість накопичення пластичних деформацій $\hat{\xi}$ на усталеній ділянці кривих ратчетингу пов'язана з різницею модулів пластичності в точках максимальних напружень у різних півциклах навантаження:

$$\Delta H = H^- - H^+. \tag{6}$$

За однакових модулів пластичності в різних півциклах навантаження $H^+ = H^-$ діаграма деформування змикається (на рис. 1 штрихова лінія). Якщо модулі різні, має місце приріст деформації на кожному циклі і тим більший, чим більша різниця між модулями пластичності. У свою чергу, модулі пластичності H визначаються через параметри спадкової функції E.

Раніше [11] запропоновано наближений метод визначення швидкості накопичення пластичних деформацій $\hat{\xi}$ на усталеній ділянці кривої циклічної повзучості за двовісного навантаження за даними простих базових експериментів і коефіцієнтом непропорційності циклу Ф:

$$\hat{\xi}(\Phi) = (\hat{\xi}^s - \hat{\xi}^t)(1-\Phi)\beta^I \beta^{II} + \hat{\xi}^t, \tag{7}$$

де β^I – безрозмірний коефіцієнт, який враховує розмах напружень у напрямку дії середніх напружень циклу; β^{II} – безрозмірний коефіцієнт, який враховує довжину траєкторії навантаження; $\hat{\xi}^s$, $\hat{\xi}^t$ – усталені швидкості ратчетингу з базових експериментів на розтягнення–стиснення та знакозмінне кручення відповідно.

Всі ці положення дозволяють визначити параметри спадкової функції E_2^+ і E_2^- для моделювання двовісних програм навантаження за даними одновісних базових експериментів.

Основні рівняння. Визначимо залежність між різницею модулів пластичності ΔH і швидкістю накопичення пластичних деформацій на усталеній ділянці кривих ратчетингу $\hat{\xi}$ за допомогою нелінійної моделі деформування матеріалу (1). Оскільки як базові використовуються одновісні експерименти, будемо аналізувати тільки одне визначальне рівняння системи (1), згідно з яким залежність між напруженням та внутрішнім часом для довільного k-го півциклу знакозмінного навантаження описується рівнянням

$$\sigma = (-1)^k \left[\sigma_0 F(z) + \int_{z_k}^{z} E(z-z')F(z')dz' \right] + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \int_{z_{i-1}}^{z_i} E(z-z')F(z')dz'. \tag{8}$$

Поточний модуль пластичності визначається як

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{dz}\frac{dz}{d\varepsilon^p} = \left| \frac{d\sigma}{dz}\frac{1}{F(z)} \right|, \tag{9}$$

тоді з урахуванням (1) і (5) на основі (7) отримаємо

$$H = \frac{1}{F(z)} \left[\sigma_0 \dot{F}(z) + \int_0^z \dot{E}(z-z')F(z')dz' \right] + E(0), \tag{10}$$

де крапкою над функціями позначено диференціювання за змінною z.

Підставимо вирази відповідних функцій (4) і (5) у (10) та проведемо диференціювання й інтегрування. У результаті отримаємо модулі пластичності у півциклах навантаження в точках із мінімальним і максимальним напруженням:

$$\begin{aligned} H^- &= E_1(1-U^-) + E_2^-; \\ H^+ &= E_1(1-U^+) + E_2^+. \end{aligned} \tag{11}$$

Їх різниця визначається як

$$\Delta H = E_1(U^- - U^+) + E_2^+ - E_2^-, \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned} U^+ &= 1 - 2e^{-\alpha(\bar{\xi}+\hat{\xi})}\left(1 - \frac{e^{-\alpha(2\bar{\xi}+\hat{\xi})} - e^{-\alpha(\bar{\xi}+\hat{\xi})}}{e^{-\alpha(2\bar{\xi}+\hat{\xi})} - 1}\right); \\ U^- &= 1 - 2e^{-\alpha\bar{\xi}}\left(1 - \frac{e^{-\alpha(2\bar{\xi}+\hat{\xi})} - e^{-\alpha\bar{\xi}}}{e^{-\alpha(2\bar{\xi}+\hat{\xi})} - 1}\right); \end{aligned} \tag{13}$$

$\hat{\xi}$, $\bar{\xi}$ – деформації (рис. 1).

На початку пластичного деформування в кожному півциклі навантаження модуль пластичності (11) дорівнює максимальному значенню $H = E_1 + E_2$. Зі збільшенням шляху деформування $\bar{\xi}$ перший доданок (11) прямує до нуля, і модуль пластичності H наближається до свого асимптотичного значення E_2. Залежність ΔH від $\hat{\xi}$ (12) є визначеною, якщо відомо параметри спадкової функції E_2^+, E_2^- та шлях деформування $\bar{\xi}$.

Для визначення приростів напружень $\Delta\sigma^-$ і $\Delta\sigma^+$ під час пластичного деформування на півциклах розтягнення та стиснення використаємо рівняння (8). Аналіз таких приростів виконано раніше [5], тому скористаємось його результатами:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^- &= 2E_1\frac{C}{\alpha}\left(-1 + \frac{2e^{-\alpha(2\bar{z}+\hat{z})} - e^{-\alpha\bar{z}} - e^{-\alpha(\bar{z}+\hat{z})}}{e^{-\alpha(2\bar{z}+\hat{z})} - 1}\right) - E_2^-\bar{\xi}; \\ \Delta\sigma^+ &= 2E_1\frac{C}{\alpha}\left(1 - \frac{2e^{-\alpha(2\bar{z}+\hat{z})} - e^{-\alpha\bar{z}} - e^{-\alpha(\bar{z}+\hat{z})}}{e^{-\alpha(2\bar{z}+\hat{z})} - 1}\right) + E_2^+(\bar{\xi}+\hat{\xi}). \end{aligned} \tag{14}$$

На усталеній ділянці кривої ратчетингу $\Delta\sigma^-$ і $\Delta\sigma^+$ рівні і дорівнюють $2\sigma_a - 2\sigma_{\text{пт}}$, де σ_a – амплітудне значення напружень; $\sigma_{\text{пт}}$ – поточний радіус поверхні текучості матеріалу, який на усталеній ділянці деформування визначається як $\sigma_{\text{пт}} = C\sigma_0$ – рис. 1. Із цієї умови рівності на основі (14) отримаємо наступну залежність між параметрами спадкової функції на різних півциклах:

$$E_2^+ = E_2^-\frac{\bar{\xi}}{\bar{\xi}+\hat{\xi}}. \tag{15}$$

Значення E_2^- можна отримати на основі апроксимації базової кривої деформування на першому і другому півциклах навантаження. З іншого базового експерименту на одновісний ратчетинг, наприклад за розтягнення–стиснення, визначаються деформації $\bar{\xi}^s$ та $\hat{\xi}^s$, і за формулою (15) отримаємо шукане значення параметра спадкової функції E_2^+.

При аналізі складного двовісного навантаження для траєкторій з однаковими середніми та амплітудними (за Мізесом) напруженнями скористаємось певним спрощенням. Приймемо, що параметр спадкової функції на півциклах із від'ємним знаком E_2^- та деформація $\bar{\xi}^s$ відомі на основі даних аналізу базового експерименту й

однакові для різних траєкторій. Тоді інший шуканий параметр спадкової функції E_2^+ (15) для відповідної траєкторії буде залежати лише від швидкості ратчетингу $\hat{\xi}$ на усталеній ділянці кривої циклічної повзучості.

Якщо врахувати модель (7), то з певним наближенням формулу (15) можна узагальнити на випадок визначення параметра спадкової функції E_2^+ для непропорційних циклічних траєкторій:

$$E_2^+(\Phi) = E_2^- \frac{\bar{\xi}^s}{\bar{\xi}^s + \hat{\xi}(\Phi)}, \tag{16}$$

де $\hat{\xi}(\Phi)$ – прогнозована швидкість ратчетингу на усталеній ділянці деформування при навантаженні за непропорційною траєкторією.

Для порівняння розглянемо більш просту білінійну модель циклічного деформування, яка часто використовується в рівняннях теорії пластичної течії (рис. 2). Як і в попередньому випадку, будемо постулювати залежність швидкості ратчетингу від різниці модулів пластичності в півциклах розтягнення і стиснення.

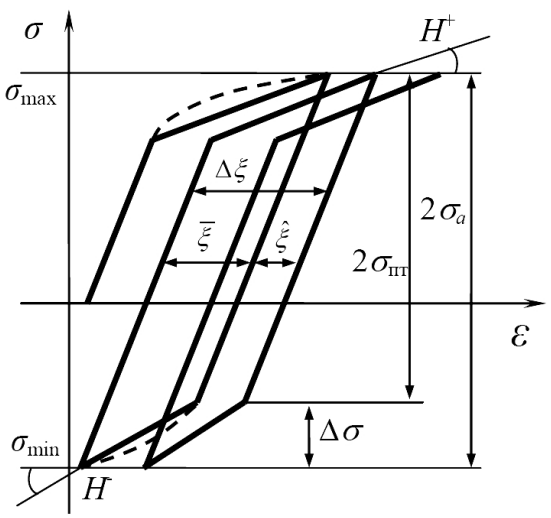


Рис. 2. Схема для визначення параметрів за білінійною моделлю деформування.

Із геометричної схеми на рис. 2 швидкість ратчетингу на усталеній ділянці визначається як

$$\hat{\xi} = \frac{\Delta\sigma}{H^+} - \frac{\Delta\sigma}{H^-} = \frac{2(\sigma_a - \sigma_{\text{пт}})}{H^+} - \frac{2(\sigma_a - \sigma_{\text{пт}})}{H^-}. \tag{17}$$

Виразимо один із модулів пластичності H^+ через H^- за допомогою (6) і підставимо отриманий вираз у рівняння (17):

$$\hat{\xi} = \frac{2(\sigma_a - \sigma_{\text{пт}})\Delta H}{H^-(H^- - \Delta H)}, \tag{18}$$

на основі якого отримаємо функціональну залежність між різницею модулів пластичності та швидкістю ратчетингу, якщо задатись значенням H^-:

$$\Delta H = \frac{\hat{\xi}(H^-)^2}{\hat{\xi}H^- + 2(\sigma_a - \sigma_{\text{пт}})}. \tag{19}$$

Для конкретизації параметрів спадкової функції E_2^+ і E_2^- скористаємось залежністю (19). Як і в попередньому випадку, на основі апроксимації виразом (8) базової кривої деформування на першому і другому півциклах навантаження визначаються параметри спадкової функції (5) α, E_1, E_2^-. Також із базового експерименту на одновісний ратчетинг на ділянці з усталеною швидкістю накопичення деформацій визначаються деформації $\bar{\xi}^s$, $\hat{\xi}^s$ та модулі E_2^- і E_2^+ (14) і їх різниця ΔH.

Тоді за відомих значень $\hat{\xi}^s$ і ΔH модуль пластичності H^- (19) визначається з розв'язку квадратного рівняння:

$$\hat{\xi}H^{-2} - \Delta H\hat{\xi}H^- - 2\Delta H(\sigma_a - \sigma_{\text{пт}}) = 0. \tag{20}$$

Скористаємось аналогічним спрощенням для параметра E_2^- у попередньому методі і приймемо, що модуль $H^- = \text{const}$ для різних траєкторій. Це дозволяє зменшити кількість змінних у рівнянні (19) до однієї. Тоді можна узагальнити вираз (19) щодо визначення різниці між модулями пластичності для непропорційних циклічних траєкторій, вважаючи, що швидкості ратчетингу $\hat{\xi}(\Phi)$ на усталених ділянках деформування відомі (7):

$$\Delta H(\Phi) = \frac{\hat{\xi}(\Phi)(H^-)^2}{\hat{\xi}(\Phi)H^- + 2(\sigma_a - \sigma_{\text{пт}})}. \tag{21}$$

Шуканий параметр спадкової функції E_2^+ для конкретної непропорційної траєкторії визначимо як

$$E_2^+ = E_2^- - \Delta H(\Phi). \tag{22}$$

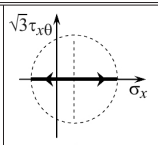
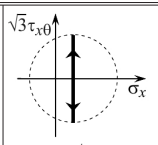
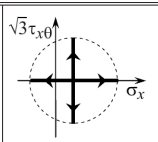
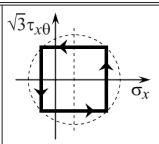
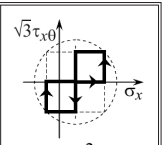
Результати застосування методів та їх обговорення. Як приклад використання вищевказаних методів конкретизації параметрів спадкової функції для опису кривих ратчетингу за непропорційного циклічного навантаження скористаємось експериментальними даними, наведеними в роботі [8]. У ній досліджувалось деформування нержавіючої сталі 304L для п'яти різних циклічних траєкторій за одно- і двовісних програм асиметричного контрольованого за напруженнями навантаження з однаковим середнім та амплітудним напруженням.

Нижче представлено механічні характеристики та параметри матеріальних функцій стали 304L, отримані на основі аналізу базового експерименту: $E_0 = 1{,}8 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_0 = 140$ МПа; $\alpha = 1000$; $E_1 = 1{,}72 \cdot 10^5$ МПа; $E_2^- = 5380$ МПа; $C = 1$; $\beta = 10$.

Траєкторії циклічного навантаження, які включали розтягнення–стиснення (s), знакозмінне кручення (t) та непропорційні траєкторії у вигляді хреста (cr), одного (sq1) і двох (sq2) квадратів, приведено в таблиці. Експеримент виконано на базі 100 цикл навантаження.

Послідовність визначення параметрів спадкової функції для різних траєкторій була наступною. На основі апроксимації виразом (8) першого і другого півциклу навантаження кривої ратчетингу за розтягнення–стиснення вище отримано базові параметри моделі, зокрема параметр $E_2^- = 5380$ МПа. Для більш точного опису кривої деформування на першому півциклі навантаження використано параметр $\alpha = 2800$. На рис. 3 наведено результат цієї апроксимації, де суцільною лінією нане-

Параметри спадкової функції для різних траєкторій навантаження

Траєкторія	 s	 t	 cr	 sq1	 sq2
Ф [11]	0	0	0,6366	0,87	0,7
$\hat{\xi}$(Ф), %/цикл (7)	0,00548*	0,00024*	0,00404	0,00092	0,0026
E_2^-, МПа	5380*	5380*	5380*	5380*	5380*
E_2^+, МПа (15)	5050*	5365	5132	5322	5267
ΔH, МПа (21)	330*	15	244	55	110
E_2^+, МПа (22)	5050* (15)	5365	5136	5324	5270

Примітка. Зірочкою позначено значення, отримані на основі базових експериментів; у дужках – номер формули.

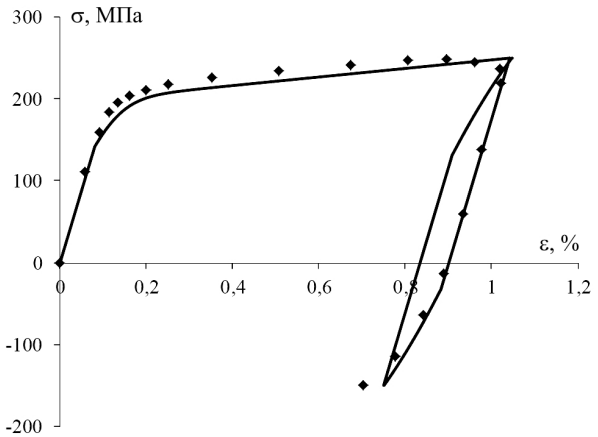


Рис. 3. Апроксимація базової експериментальної кривої при визначенні основних параметрів моделі.

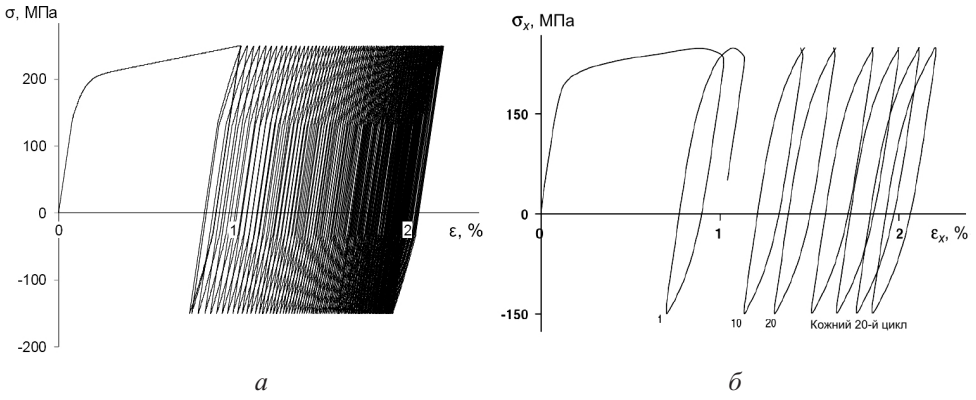
сено розрахункову криву деформування, а точками – експериментальні дані. Із цього ж базового експерименту, але при аналізі кривої на усталеній ділянці (60 цикл) було отримано деформації, які накопичені за один цикл на висхідній $\bar{\xi}+\hat{\xi}=0{,}0893\%$ та низхідній $\bar{\xi}=0{,}0838\%$ ділянках навантажень. За відомих значень E_2^- і цих деформацій з використанням (15) отримано шукану величину $E_2^+ = 5050$ МПа, яка відповідає базовій траєкторії. На основі відомих значень E_2^+ і E_2^- різниця між модулями пластичності $\Delta H = 330$ МПа.

Підставимо отримані значення ΔH, $\hat{\xi}$, $\sigma_{\text{пт}} = C\sigma_0$ і $\sigma_a = 200$ МПа у формулу (20), у результаті чого маємо $H^- = 27050$ МПа.

За формулами (15) та (22) згідно з першим і другим методами конкретизації спадкової функції для різних непропорційних траєкторій визначено шукані параметри E_2^+ (таблиця). Як видно з даних таблиці, отримані за цими методами значення параметра спадкової функції майже однакові, що свідчить про можливість їх викорис-

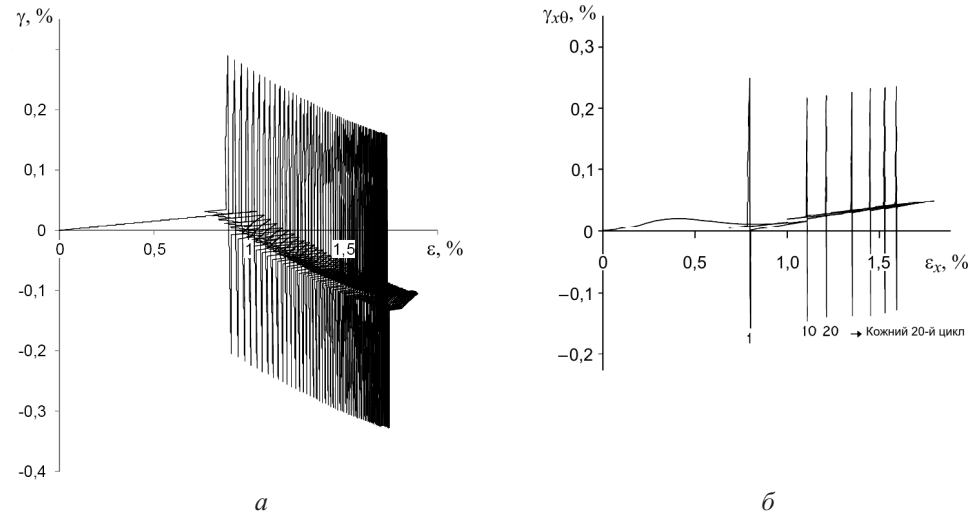
тання для конкретизації параметрів спадкової функції. Такий збіг результатів зумовлений використанням однакової системи базових експериментів та постулюванням залежності швидкості ратчетингу лише від різниці модулів пластичності, яка для нелінійної і лінійної моделі деформування виявилась однаковою.

Щоб пересвідчитись, що отримані значення параметрів спадкової функції є коректними для прогнозування кривих ратчетингу, за їх допомогою описували експериментальні криві ратчетингу за одно- і двовісного навантаження. Для цього моделювання було використано чисельну процедуру для опису двовісного ратчетингу [7]. На ділянках траєкторії навантаження, де відбувалося збільшення нормальних напружень σ, використовувалось значення параметра E_2^+, в іншому випадку – E_2^-. При розрахунку траєкторії у вигляді хреста та квадрата на півциклах кручення використовувалось спадкове ядро $E^\tau = E^{\sigma-} = E_1 e^{-\alpha z} + E_2^-$. На рис. 4–6 наведено розрахункові й експериментальні [8] криві деформування для асиметричних траєкторій навантаження розтягненням–стисненням, у вигляді хреста та квадрата відповідно. Отримано задовільну збіжність результатів. На рис. 7 приведено криві накопичення деформацій ратчетингу для цих траєкторій в залежності від числа циклів навантаження.



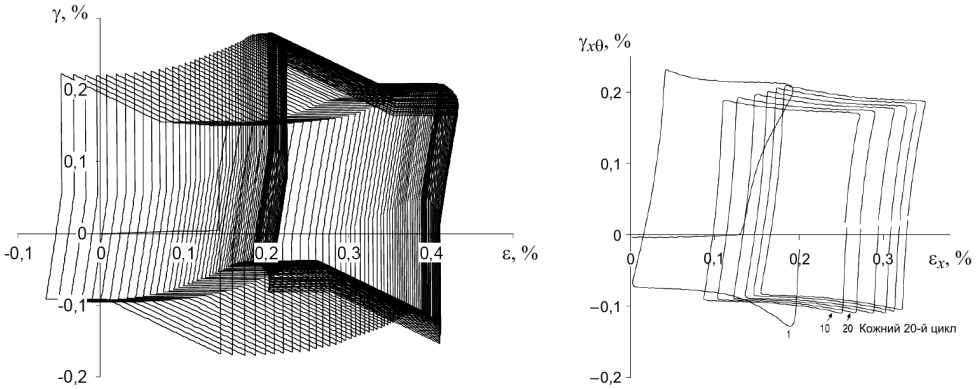
а *б*

Рис. 4. Кінетика напружено-деформованого стану за навантаження розтягненням–стисненням: *а* – розрахункові дані; *б* – експериментальні.



а *б*

Рис. 5. Розрахункові (*а*) й експериментальні (*б*) криві деформування при навантаженні за траєкторією у вигляді хреста.



а *б*

Рис. 6. Розрахункові (*а*) й експериментальні (*б*) криві деформування при навантаженні за траєкторією у вигляді квадрата.

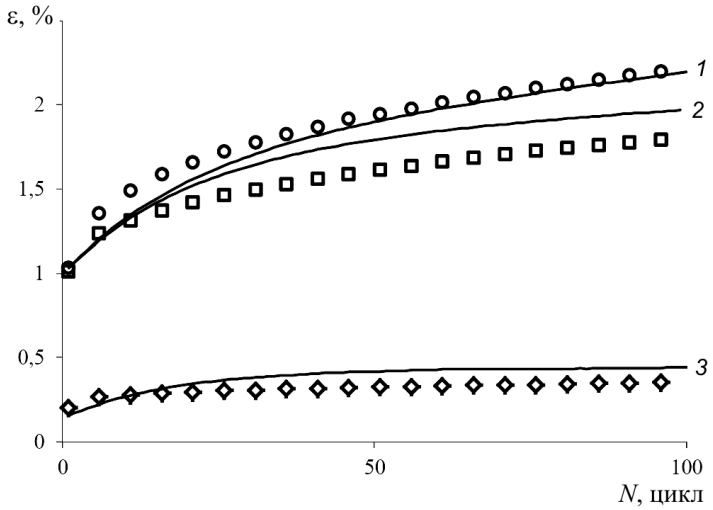


Рис. 7. Експериментальні (точки) й розрахункові (суцільні лінії) криві ратчетингу: *1*, ○ – розтягнення–стиснення; *2*, □ – хрест; *3*, ◇ – квадрат.

Висновки

1. Проведено дослідження, в якому запропоновано два альтернативних методи конкретизації параметрів спадкової функції ендохронної теорії пластичності для опису ефекту ратчетингу матеріалів за непропорційних програм циклічного навантаження з однаковими середніми й амплітудними за Мізесом напруженнями.

2. Методи виявилися абсолютно рівнозначними і можуть використовуватися для визначення параметрів спадкової функції.

3. Прийняті для зменшення кількості невідомих параметрів спрощення при конкретизації параметрів спадкової функції, очевидно, вносять похибку у випадку розгляду непропорційних програм навантаження. Проте, визначення параметрів спадкової функції з урахуванням запропонованих простих залежностей дозволяє отримати задовільні результати при числовому моделюванні, які погоджуються з експериментом.

Р е з ю м е

Для описания эффекта ратчетинга, или циклической ползучести металлических материалов при сложном непропорциональном нагружении с контролем по напряжениям предложен метод конкретизации параметров экспоненциальных ядер наследственной функции эндохронной теории пластичности. Суть метода состоит в использовании зависимости разности модулей пластичности от скорости ратчетинга на устоявшемся участке кривой циклического деформирования. Модули пластичности определяются в точках действия максимальных напряжений в различных полуциклах асимметричного нагружения. Считается, чем больше разница между модулями пластичности в направлении действия среднего напряжения цикла, тем больше прирост деформаций на каждом цикле нагружения. Для определения скорости накопления пластических деформаций на устоявшейся стадии деформирования при двухосном нагружении использованы положения предложенного ранее авторами подхода, который базируется на данных одноосных экспериментов при циклическом асимметричном нагружении растяжением–сжатием и знакопеременным кручением и известном значении параметра непропорциональности цикла. Подход разработан для анализа циклических траекторий нагружения с одинаковыми по Мизесу значениями средних и амплитудных напряжений. На основе определенных упрощений предложено выражение для определения параметров экспоненциальных ядер наследственной функции в зависимости от геометрии циклической траектории и известной скорости ратчетинга для базовой траектории. С помощью более простой билинейной модели упругопластического деформирования получены аналогичные значения параметров экспоненциальных ядер наследственной функции на основе величин разницы между модулями пластичности, которые использованы для моделирования эффекта ратчетинга при одно- и двухосном циклическом нагружении. Программы нагружения и данные экспериментов взяты из литературных источников. Результаты моделирования показали, что полученные с помощью предложенного метода параметры определяющих уравнений циклической пластичности позволяют удовлетворительно описывать кинетику напряженно-деформированного состояния металлических материалов при циклической ползучести в случае двухосного непропорционального нагружения.

1. Голуб В. П., Павлюк Я. В., Фериати П. В. К определению параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов. *Прикл. механика*. 2013. **49**, № 2. С. 100–113.
2. Watanabe O. and Atluri S. N. Constitutive modeling of cyclic plasticity and creep, using an internal time concept. *Int. J. Plasticity*. 1986. **2**, No. 2. P. 107–134.
3. Murakami H. and Read H. E. Endochronic plasticity: some basic properties of plastic flow and failure. *Int. J. Solid. Sruct.* 1987. **23**, No. 1. P. 133–151.
4. Valanis K. C. Fundamental consequences of new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of the endochronic theory. *Arch. Mech.* 1980. **32**. P. 171–191.
5. Borodii M. V. Modeling of the asymmetric low-cycle loading in the space of stresses. *Strength Mater.* 1998. **30**, No. 5. P. 472–480.
6. Hassan T. and Kyriakides S. Ratcheting in cyclic plasticity, part I: Uniaxial behavior. *Int. J. Plasticity.* 1992. **8**, No. 1. P. 91–116.
7. Adamchuk M. P., Borodii M. V., Selin O. M., and Stryzhalo V. O. Development of the model for cyclic plasticity to describe the ratcheting effect under non-proportional asymmetric loading. *Strength Mater.* 2016. **48**, No. 2. P. 251–258.

8. Hassan T., Taleb L., and Krishana S. Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models. *Int. J. Plasticity*. 2008. **24**, No. 10. P. 1863–1889.

9. Halama R., Fusek M., and Poruba Z. Influence of mean stress and stress amplitude on uniaxial and biaxial ratcheting of ST52 steel and its prediction by the AbdelKarim–Ohno model. *Int. J. Fatigue.* 2016. **91**. P. 313–321.

10. Wu H. C. and Yip M. C. Endochronic description of cyclic hardening behavior for metallic materials. *J. Eng. Mater. Technol.* 1981. **103**, No. 3, P. 212–217.

11. Adamchuk M. P. and Borodii M. V. Determination of steady ratcheting strain rate under biaxial loading based on cycle nonproportionality coefficient. *Strength Mater.* 2017. **49**, No. 2. P. 250–255.

Поступила 27. 02. 2018