

## Решение задачи плоского поперечного изгиба слоистого консольного бруса под действием нормальной равномерной нагрузки

А. В. Горик, С. Б. Ковальчук

Полтавская государственная аграрная академия, Полтава, Украина

*Представлено точное прямое решение задачи плоского поперечного изгиба слоистого консольного бруса малой ширины под действием равномерно распределенной нагрузки при абсолютно жестком контакте слоев. Решение построено с помощью уравнений линейной теории упругости, при этом для учета неоднородного строения слоистого бруса в соотношения закона Гука введены кусочно-постоянные функции упругих характеристик, которые описаны аналитически посредством смещенных функций Хевисайда. В процессе решения задачи нормальные напряжения выражены из статических уравнений через неизвестную функцию распределения касательных напряжений по высоте сечения. Использование полученных выражений в соотношениях закона Гука и уравнениях Коши для линейных деформаций позволило установить зависимости между перемещениями и касательными напряжениями. Оставшееся уравнение Коши для угловых деформаций дало определяющее интегро-дифференциальное соотношение, из которого получены дифференциальные уравнения для искомой функции касательных напряжений, а также для всех неизвестных функций интегрирования. Решение полученных уравнений возможно для всего пакета слоев без рассмотрения отдельного слоя. При этом окончательные соотношения для напряжений, деформаций и перемещений описывают напряженно-деформированное состояние всего пакета слоев композитного бруса. Построенное решение удовлетворяет граничным условиям и условиям абсолютно жесткого контакта слоев и является точным в случае если распределение нагрузок соответствует полученному распределению напряжений. С его использованием было проведено теоретическое исследование напряженно-деформированного состояния трехслойного бруса. Полученные соотношения позволяют прогнозировать прочность и жесткость многослойных композитных элементов конструкций, а также строить прикладные решения для других задач упругого изгиба слоистых брусков.*

**Ключевые слова:** брус, композит, слой, изгиб, напряжения, деформации, перемещения, депланация.

**Введение.** Современный уровень развития техники и технологий выдвигает все более высокие требования к прочности, надежности и, главное, энергоэффективности инженерных конструкций, удовлетворить которые с применением традиционных конструкционных материалов не всегда возможно. Достаточно часто решением данной проблемы может быть использование композитных элементов, полученных объединением нескольких разнородных по физико-механическим характеристикам материалов в составе единой конструкционной системы. Однако подобный подход существенно ограничивается невозможностью применения для расчета композитных элементов традиционных методов расчета, построенных в основном на моделях деформирования однородных изотропных элементов конструкций.

Достоверное прогнозирование прочности и жесткости композитных элементов конструкций в различных условиях работы требует учета многих физико-механических характеристик, которые зачастую имеют сложную зависимость от температуры, способа и длительности действия нагрузки и т.п. Изучение свойств различных видов композитов является отдельной важной научной задачей [1], которой посвящены многочисленные исследования отечественных и зарубежных ученых.

Однако во многих случаях на практике приемлем учет только упругих характеристик композитов. Так, ориентированные волокнистые композиты при нагруже-

нии вдоль армирующих волокон проявляют практически линейную зависимость между напряжениями и деформациями вплоть до разрушения [2]. Это позволяет для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) композитных элементов использовать методы теории упругости неоднородного тела. Поэтому наряду с развитием науки в направлении создания композитов не менее важным является развитие аналитических теорий их поведения в условиях различных видов упругой деформации.

Плоский поперечный изгиб – один из самых распространенных видов деформации элементов инженерных конструкций. В то же время аналитическая теория изгиба композитных элементов наименее разработана.

Можно выделить два основных направления в развитии аналитического метода исследования упругого изгиба композитных элементов.

К первому направлению относятся так называемые “неклассические” или “уточненные” модели изгиба, например [2–5], которые в основном построены как приближенные решения теории упругости с введением определенных упрощений и гипотез. Наиболее многочисленными являются “итерационные” модели [6]. Для композитных дискретно-неоднородных брусьев широкое применение получила многошаговая модель [7].

Второе направление связано с получением точных решений теории упругости. Задачам изгиба составных и анизотропных брусьев посвящены работы [8–12], в которых получены отдельные точные решения. Однако они либо носят общий характер, либо не позволяют учитывать дискретную неоднородность, что ограничивает их прикладное применение. В то же время точные решения интересны не только тем, что более достоверно описывают НДС композитного элемента, но и тем, что раскрывают новые подходы к построению прикладных решений различных задач механики слоистых систем.

Цель данной работы заключается в получении решения задачи плоского поперечного изгиба узкого слоистого консольного бруса под действием равномерно распределенной нагрузки с использованием континуального подхода к описанию неоднородного структурного строения его поперечного сечения. Решение подобной задачи для однородного ортотропного бруса с сечением в виде узкого прямоугольника получено в [10] с учетом функции напряжений в виде полинома пятой степени. Однако такое решение и подход к его получению неприменимы в случае слоистого бруса, для которого напряжения и их производные будут иметь разрывы на границах слоев.

Следует отметить также приближенное решение задачи изгиба слоистой балки под действием распределенной нагрузки на продольных гранях [2]. Данное решение построено итерационным путем с использованием в первом приближении допущений о неподатливости ее материала деформациям поперечного сдвига и обжатия, что снижает его точность.

**Модель бруса.** Рассмотрим прямоугольный слоистый консольный брус с прямолинейной осью и неизменной по длине структурой поперечного сечения (рис. 1). Брус состоит из  $m$  продольных слоев заданной толщины, изготовленных из разных материалов.

Для бруса принята прямоугольная декартова система координат  $x, y, z$  с правой системой осей. Ось  $Ox$  совпадает с продольной осью жесткости бруса, координатная плоскость  $zOx$  – с продольной плоскостью симметрии. Поперечные сечения бруса параллельны координатной плоскости  $zOy$ .

Каждый слой  $k$  рассматриваемого бруса изготовлен из непрерывного однородного ортотропного материала, причем плоскости упругой симметрии параллельны координатным плоскостям. На границах разделения слоев жестко соединены, так что в процессе деформирования бруса взаимное смещение и отрыв на них отсутствуют.

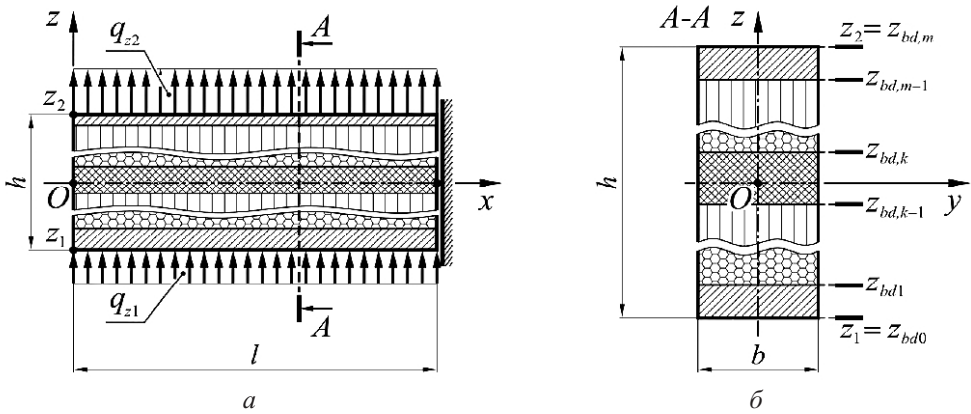


Рис. 1. Схема слоистого композитного бруса под действием распределенной нагрузки (а) и структура его поперечного сечения (б).

Механические характеристики такого бруса будут кусочно-постоянными функциями координаты  $z$ , которые можно математически представить как сумму финитных функций:

$$\mu_a^S = \sum_{k=1}^m (S_a^{[k]} p_k), \quad (1)$$

где  $\|S_a^{[k]}\| = \|E_x^{[k]}, E_y^{[k]}, E_z^{[k]}, G_{xy}^{[k]}, G_{yz}^{[k]}, G_{xz}^{[k]}, \nu_{xy}^{[k]}, \nu_{yx}^{[k]}, \nu_{zy}^{[k]}, \nu_{yz}^{[k]}, \nu_{xz}^{[k]}, \nu_{zx}^{[k]}\|$  – упругие постоянные  $k$ -го ортотропного слоя композитного бруса;  $p_k = p_k(z)$  – индикаторная функция  $k$ -го слоя бруса.

Индикаторная функция  $k$ -го слоя формально может быть записана в виде системы соотношений

$$p_k = \begin{cases} 1, & z \in (z_{bd,k-1}, z_{bd,k}); \\ 0, & z \notin (z_{bd,k-1}, z_{bd,k}), \end{cases} \quad (2)$$

где  $z_{bd,k-1}, z_{bd,k}$  – координаты границ  $k$ -го слоя (рис. 1,б).

Соответственно функции  $\mu_a^S$  (1) определены во всех точках числовой оси, однако не равны нулю только на промежутке  $z \in (z_1, z_2)$ , причем здесь они будут иметь  $m-1$  точек разрыва первого рода.

Использование функций (1) в теоретических соотношениях для компонент НДС требует аналитического представления индикаторных функций (2), например, в виде разности смещенных функций Хевисайда:

$$p_k = H(z - z_{bd,k-1}) - H(z - z_{bd,k}), \quad (3)$$

где  $H = H(z)$  – единичная функция Хевисайда.

На продольные нижнюю и верхнюю грани бруса (рис. 1,а) действуют нормальные равномерно распределенные нагрузки  $q_{z\zeta}$  ( $\zeta = 1, 2$ ). Торцы бруса с координатой  $x = 0$  и боковые грани свободны от закреплений и нагрузок. На торце с координатой  $x = l$  полагаем заданными некоторые кинематические условия, которые отвечают определенному способу его закрепления (не обязательно абсолютно жесткому).

Такая система нагрузок и закреплений, а также форма и строение бруса приведут к его изгибу в плоскости  $zOx$ .

Полагаем, что под действием приложенной нагрузки деформации бруса остаются сравнительно небольшими, и материалы всех слоев работают только в упругой области, а также, что ширина  $b$  его поперечного сечения значительно меньше высоты  $h$ .

**Построение решения.** Учитывая отсутствие на продольных боковых гранях бруса внешних нагрузок, а также приведенные выше допущения относительно ширины его поперечного сечения, можно считать, что в процессе деформирования он будет находиться в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

Согласно принятой системе внешних нагрузок на продольных гранях и торцах бруса имеют место следующие статические граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x=0} &= 0; & \tau_{xz}|_{x=0} &= 0; \\ \sigma_z|_{z=z_\zeta} &= (-1)^\zeta q_{z\zeta}; & \tau_{zx}|_{z=z_\zeta} &= 0, \quad \zeta = 1, 2 \end{aligned} \quad (4)$$

При решении системы уравнений равновесия плоской задачи относительно нормальных напряжений получим

$$\sigma_x = -\int_0^x \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dx + \sigma_x|_{x=0}; \quad \sigma_z = -\int_{z_1}^z \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dz + \sigma_z|_{z=z_1}. \quad (5)$$

Возможную форму решения для касательных напряжений  $\tau_{zx}$  примем с учетом распределения поперечной силы  $Q_z$  в сечениях бруса. В соответствии с такой схемой нагрузки бруса запишем

$$Q_z = -b \int_{z_1}^{z_2} \tau_{xz} dz = b(q_{z1} + q_{z2})x. \quad (6)$$

Равенство (6) будет выполняться, в частности, если решение для касательных напряжений будет иметь следующую форму:

$$\tau_{xz} = xZ_{xz}^\tau, \quad (7)$$

где  $Z_{xz}^\tau = Z_{xz}^\tau(z)$  – неизвестная функция переменной  $z$ .

Согласно (6) и граничным условиям (4) функция  $Z_{xz}^\tau$  в соотношении (7) должна удовлетворять условиям

$$\int_{z_1}^{z_2} Z_{xz}^\tau dz = -(q_{z1} + q_{z2}); \quad Z_{xz}^\tau \Big|_{\substack{z=z_1, \\ z=z_2}} = 0. \quad (8)$$

С учетом (7) и третьего граничного условия (4) система решений (5) примет вид

$$\sigma_x = -\frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \frac{x^2}{2} + \sigma_x|_{x=0}; \quad \sigma_z = -\int_{z_1}^z Z_{xz}^\tau dz - q_{z1}. \quad (9)$$

В (9) преднамеренно не было использовано первое граничное условие (4), поскольку его применение приводит определяющее уравнение задачи к неразрешимому виду.

Подставив (7) и (9) в физические уравнения теории упругости для линейных и угловых деформаций, с учетом (1) получим такие соотношения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\frac{1}{\mu_x^E} \left( \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \frac{x^2}{2} - \sigma_x \Big|_{x=0} \right) + \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \left( \int_{z_1}^z Z_{xz}^\tau dz + q_{z1} \right); \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{\mu_z^E} \left( \int_{z_1}^z Z_{xz}^\tau dz + q_{z1} \right) + \frac{\mu_{xz}^v}{\mu_x^E} \left( \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \frac{x^2}{2} - \sigma_x \Big|_{x=0} \right); \\ \gamma_{xz} &= \frac{Z_{xz}^\tau}{\mu_{xz}^G} x.\end{aligned}\quad (10)$$

Интегрируя соотношения Коши для линейных деформаций с учетом (10), получаем зависимости для перемещений:

$$\begin{aligned}u &= -\frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \frac{x^3}{6} + \left( \frac{\sigma_x \Big|_{x=0}}{\mu_x^E} + \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z Z_{xz}^\tau dz + \frac{\mu_{zx}^v q_{z1}}{\mu_z^E} \right) x + u \Big|_{x=0}; \\ w &= -\int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z Z_{xz}^\tau dz \right) dz - \int_{z_1}^z \frac{q_{z1}}{\mu_z^E} dz + \int_{z_1}^z \left( \frac{\mu_{xz}^v}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \right) dz \frac{x^2}{2} - \\ &\quad - \int_{z_1}^z \frac{\mu_{xz}^v \sigma_x \Big|_{x=0}}{\mu_x^E} dz + w \Big|_{z=z_1}.\end{aligned}\quad (11)$$

Подставив (10) и (11) в соотношение Коши для угловых деформаций  $\gamma_{xz}$  и выполнив некоторые преобразования, получим определяющее уравнение задачи:

$$\begin{aligned}\frac{dw \Big|_{z=z_1}}{dx} - \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \right) \right] \frac{x^3}{6} + \left[ \int_{z_1}^z \left( \frac{\mu_{xz}^v}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \right) dz - \frac{Z_{xz}^\tau}{\mu_{xz}^G} + \right. \\ \left. + \frac{d}{dz} \left( \frac{\sigma_x \Big|_{x=0}}{\mu_x^E} + \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z Z_{xz}^\tau dz + \frac{\mu_{zx}^v q_{z1}}{\mu_z^E} \right) \right] x + \left[ \frac{du \Big|_{x=0}}{dz} \right] = 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Равенство (12) будет выполняться в случае если выражения в квадратных скобках равны некоторым неизвестным постоянным  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \right) &= C_0; \\ \int_{z_1}^z \left( \frac{\mu_{xz}^v}{\mu_x^E} \frac{dZ_{xz}^\tau}{dz} \right) dz - \frac{Z_{xz}^\tau}{\mu_{xz}^G} + \frac{d}{dz} \left( \frac{\sigma_x \Big|_{x=0}}{\mu_x^E} + \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z Z_{xz}^\tau dz + \frac{\mu_{zx}^v q_{z1}}{\mu_z^E} \right) &= C_1; \\ \frac{du \Big|_{x=0}}{dz} &= C_2.\end{aligned}\quad (13)$$

С учетом (13) равенство (12) преобразуется в линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dw|_{z=z_1}}{dx} - C_0 \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 = 0. \quad (14)$$

Общее решение первого дифференциального уравнения (13) с учетом краевых условий (8) получим в таком виде:

$$Z_{xz}^{\tau} = C_0 \left( \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \frac{B_1}{B_0} \int_{z_1}^z (\mu_x^E) dz \right), \quad (15)$$

где введены обозначения для определенных интегралов:

$$\int_{z_1}^{z_2} (\mu_x^E) dz = B_0; \quad \int_{z_1}^{z_2} (z \mu_x^E) dz = B_1. \quad (16)$$

В (16) и далее нижние индексы обозначают порядок подынтегрального выражения.

Следует отметить, что постоянная  $B_1$  в (16) в зависимости от положения поперечного сечения относительно оси  $Oy$  (рис. 1,б) может быть как положительной, так и отрицательной, а значит, в некоторой системе координат она может равняться нулю:

$$B_1 = \int_{z_1}^{z_2} (z \mu_x^E) dz = 0. \quad (17)$$

Систему координат, в которой выполняется условие (17), полагаем главной, а ее оси – главными осями жесткости (аналог главных приведенных осей инерции в [8]). Далее для рассматриваемого бруса принимаем именно главную систему.

Отметим, что в некоторой вспомогательной системе координат  $x'y'z'$  ( $B'_1 \neq 0$ ) начало  $O$  главной системы координат смещено относительно начала  $O'$  вспомогательной системы на величину

$$z_{B_1} = \int_{z'_1}^{z'_2} (\mu_x'^E z') dz / \int_{z'_1}^{z'_2} \mu_x'^E dz = B'_1 / B'_0, \quad (18)$$

где  $z'_1, z'_2, B'_1, B'_0$  – координаты продольных граней и значения интегралов (16) во вспомогательной системе  $x'y'z'$ .

Подставив (15) с учетом (17) в первое условие (8) и решив полученное уравнение, запишем

$$C_0 = -\frac{q_z^{\Sigma}}{B_2}, \quad (19)$$

где  $q_z^{\Sigma} = q_{z_1} + q_{z_2}$  – суммарная нагрузка в поперечном сечении бруса;  $B_2$  – обозначение определенного интеграла,

$$B_2 = \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz dz. \quad (20)$$

Подставив (17) и (19) в (15), получим окончательное решение для  $Z_{xz}^r$ :

$$Z_{xz}^r = -\frac{q_z^\Sigma}{B_2} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz. \quad (21)$$

С учетом (21) искомое решение для касательных напряжений (7) примет следующий вид:

$$\tau_{xz} = -\frac{q_z^\Sigma}{B_2} x \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz. \quad (22)$$

Следует отметить, что согласно (22) в пределах однородных слоев напряжения  $\tau_{xz}$  распределены по закону квадратичной параболы и непрерывны на их границах, как того требует условие абсолютно жесткого контакта.

Решив второе уравнение (13) относительно  $\sigma_x|_{x=0}$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x=0} = & \frac{q_z^\Sigma \mu_x^E}{B_2} \left( \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz dz - \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz \right) dz + \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z\mu_{xz}^v) dz dz \right) - \\ & - q_{z1} \frac{\mu_x^E \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} + C_1 \mu_x^E (z - z_1) + C_4 \mu_x^E, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $C_4$  – неизвестная постоянная интегрирования.

Согласно (23) нормальные напряжения  $\sigma_x$  на торце с координатой  $x=0$  не могут быть равны нулю, как этого требует первое граничное условие (4). Поэтому полученное решение будет точным только в случае если на данном торце будет действовать нормальная нагрузка

$$q_{x1} = -\sigma_x|_{x=0}, \quad (24)$$

что противоречит исходным данным поставленной задачи.

Однако, если потребовать, чтобы равнодействующие условной нагрузки (24) были равны нулю

$$\int_{z_1}^{z_2} q_{x1} dz = 0, \quad \int_{z_1}^{z_2} (zq_{x1}) dz = 0, \quad (25)$$

то, в соответствии с принципом Сен-Венана, полученное решение на некотором удалении от торца не будет сильно отличаться от точного решения.

Подставив (24) и (23) в условия (25) и решив полученную систему относительно неизвестных постоянных, получим

$$C_1 = \frac{1}{B_2^*} \left( \frac{q_z^\Sigma}{B_2} D_4 + q_{z1} D_1 \right); \quad C_4 = \frac{q_z^\Sigma}{B_2} \left( \frac{D_3}{B_0} + \frac{z_1 D_4}{B_2^*} \right) + q_{z1} \left( \frac{D_0}{B_0} + \frac{z_1 D_1}{B_2^*} \right), \quad (26)$$

где введены обозначения для определенных интегралов:

$$\left\{ \begin{aligned} D_0 &= \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{\mu_x^E \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \right) dz; & D_1 &= \int_{z_1}^{z_2} \left( z \frac{\mu_x^E \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \right) dz; & B_2^* &= \int_{z_1}^{z_2} (z^2 \mu_x^E) dz; \\ D_3 &= \int_{z_1}^{z_2} \left( \mu_x^E \left( \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz \right) dz - \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz dz \right) \right) dz; & (27) \\ D_4 &= \int_{z_1}^{z_2} \left( z \mu_x^E \left( \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz \right) dz - \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz dz \right) \right) dz. \end{aligned} \right.$$

Отметим, что постоянные  $B_2$  (20) и  $B_2^*$  (27) связаны в главной системе координат зависимостью

$$B_2 = \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz dz = z \int_{z_1}^z (\mu_x^E) dz \Big|_{z=z_1}^{z=z_2} - \int_{z_1}^{z_2} (z^2 \mu_x^E) dz = -B_2^*. \quad (28)$$

Подставив (21) и (23) в соотношения для нормальных напряжений (9), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q_z \mu_x^E}{B_2} \left( \frac{zx^2}{2} - \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz \right) dz + \frac{\mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz dz \right) - \\ &\quad - q_{z1} \frac{\mu_x^E \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} + C_1 \mu_x^E (z - z_1) + C_4 \mu_x^E; & (29) \\ \sigma_z &= \frac{q_z}{B_2} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz dz - q_{z1}. \end{aligned}$$

Согласно решениям (29) нормальные напряжения  $\sigma_x$  в произвольном сечении состоят из линейной и кубической составляющих и скачкообразно изменяют величину на границе слоев пропорционально распределению продольного модуля упругости  $\mu_x^E$ . При этом кубическая составляющая зависит от всех упругих характеристик материалов слоев бруса.

В то же время напряжение  $\sigma_z$  зависит только от распределения продольного модуля упругости  $\mu_x^E$  и подчиняется кубическому закону в пределах однородных слоев. При этом данные напряжения являются непрерывными, что соответствует условию абсолютно жесткого контакта слоев.

В случае если брус состоит из одного однородного слоя, соотношения для нормальных напряжений (29) можно преобразовать в известные решения подобной задачи для изотропного [13, 14] и ортотропного бруса [10], что косвенно подтверждает правильность полученных зависимостей. В то же время приближенное решение в [2] не учитывает кубическую составляющую напряжений  $\sigma_x$ , однако распределение напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\sigma_z$  в целом близко к полученному нами решению.



Решения третьего уравнения (13) и (14) с учетом (19) получены в виде

$$u|_{x=0} = C_2(z - z_1) + u|_{x=0, z=z_1}; \quad w|_{z=z_1} = -\frac{q_z^\Sigma}{B_2} \frac{x^4}{24} - C_1 \frac{x^2}{2} - C_2 x + w|_{z=z_1, x=0}. \quad (30)$$

Согласно первому выражению (30) свободный торец рассматриваемого слоистого бруса при деформировании остается плоским.

Подставив (21), (23) и (30) в соотношения для перемещений (11) и выполнив преобразования, получим общие решения для перемещений:

$$u = \frac{q_z^\Sigma}{B_2} \left( \frac{x^3 z}{6} - x \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz \right) dz \right) + (C_1(z - z_1) + C_4)x + C_2(z - z_1) + u|_{x=0, z=z_1}; \quad (31)$$

$$w = -\frac{q_z^\Sigma}{24B_2} x^4 - \frac{q_z^\Sigma}{2B_2} x^2 \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz + \frac{q_z^\Sigma}{B_2} \int_{z_1}^z \left( \mu_{xz}^v \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz \right) dz + \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz dz \right) dz - q_{z1} \int_{z_1}^z \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} dz - C_1 \left( \frac{x^2}{2} + \int_{z_1}^z (\mu_{xz}^v (z - z_1)) dz \right) - C_4 \int_{z_1}^z \mu_{xz}^v dz - C_2 x + w|_{z=z_1, x=0}. \quad (32)$$

В выражения для перемещений (31) и (32) входят три неизвестные постоянные:  $C_2$ ,  $u|_{x=0, z=z_1}$ ,  $w|_{z=z_1, x=0}$ , которые должны определяться с помощью кинематических условий, соответствующих способу закрепления бруса.

Дифференцируя (31) и (32), получаем соотношения для линейных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{q_z^\Sigma}{B_2} \left( \frac{x^2 z}{2} - \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz \right) dz \right) + C_1(z - z_1) + C_4; \\ \varepsilon_z = -\frac{q_z^\Sigma}{2B_2} x^2 z \mu_{xz}^v - q_{z1} \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} - C_1 \mu_{xz}^v (z - z_1) - C_4 \mu_{xz}^v + \frac{q_z^\Sigma}{B_2} \left( \mu_{xz}^v \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z \mu_{xz}^v) dz \right) dz + \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz dz \right). \quad (33)$$

Подставив (21) в третье выражение (10), определим деформации:

$$\gamma_{xz} = -\frac{q_z^\Sigma}{B_2} x \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z \mu_x^E) dz. \quad (34)$$

Необходимо отметить, что полученные функции распределения перемещений  $u$ ,  $w$  и деформаций  $\varepsilon_x$  являются непрерывными, а  $\varepsilon_z$  и  $\gamma_{xz}$  – скачкообразно изменяют величину на границах слоев, что соответствует принятому условию абсолютно жесткого контакта слоев.

**Решение задачи для модели жесткого закрепления.** Заметим, что полученные решения для перемещений (31) и (32) не позволяют задать идеализированное абсолютно жесткое закрепление данного торца с координатой  $x = l$ , поскольку нельзя удовлетворить условие полного отсутствия перемещений его точек с помощью трех постоянных интегрирования. Однако можно задать кинематические условия, которые приближенно моделируют жесткое закрепление путем полного или частичного ограничения перемещений отдельных точек торца. Может быть приведено много вариантов таких условий, один из которых иллюстрирует рис. 2. Данной системе ограничений отвечают следующие кинематические условия:

$$u|_{x=l, z=z_1} = 0, \quad u|_{x=l, z=z_2} = 0, \quad w|_{x=l, z=z_1} = 0. \quad (35)$$

Отметим, что на схеме рис. 2 показаны связи, накладываемые на крайние точки сечения, однако не приведены реактивные нормальные  $q_{x2}$  и касательные  $q_{xz2}$  усилия, которые действуют на поверхности торца и уравнивают внешние нагрузки  $q_{x1}$  и  $q_{z2}$ .

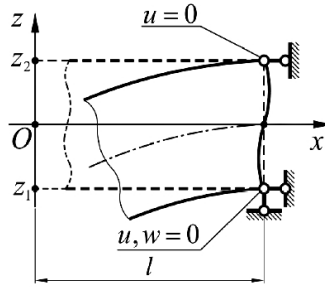


Рис. 2. Моделирование жесткого закрепления.

Подставив решения (32) в условия (35), получим систему уравнений, решение которой позволит определить неизвестные постоянные  $C_2$ ,  $u|_{x=0, z=z_1}$ ,  $w|_{z=z_1, x=0}$ :

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{q_z^\Sigma l^3}{6B_2} \left( 1 - \frac{6D_2}{l^2 h} \right) - C_1 l; \\ u|_{x=0, z=z_1} &= -\frac{q_z^\Sigma l^3 z_1}{6B_2} - C_4 l; \\ w|_{z=z_1, x=0} &= -\frac{q_z^\Sigma l^4}{8B_2} \left( 1 - \frac{8D_2}{hl^2} - \frac{4D_4}{B_2 l^2} \right) + \frac{q_{z1} l^2 D_1}{2B_2}, \end{aligned} \quad (36)$$

где введено обозначение для определенного интеграла:

$$D_2 = \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{1}{G} \int_{z_1}^z (zu^E_x) dz - \int_{z_1}^z (zu^v_{xz}) dz \right) dz. \quad (37)$$

Подставив (36) в соотношения для перемещений (31) и (32), получим

$$u = \frac{q_z^\Sigma}{B_2} \left( \frac{x^3 z}{6} - x \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z\mu_{xz}^v) dz \right) dz \right) - \frac{q_z^\Sigma l^3}{6B_2} \left( z - \frac{6D_2}{l^2 h} (z - z_1) \right) - (C_1(z - z_1) + C_4)(l - x); \quad (38a)$$

$$w = -\frac{q_z^\Sigma x}{2B_2} \left( \frac{x^3}{12} + x \int_{z_1}^z (z\mu_{xz}^v) dz - \frac{l^3}{3} \left( 1 - \frac{6D_2}{l^2 h} \right) \right) - q_{z1} \left( \int_{z_1}^z \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} dz - \frac{D_1 l^2}{2B_2} \right) + \frac{q_z^\Sigma}{B_2} \int_{z_1}^z \left( \mu_{xz}^v \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z\mu_{xz}^v) dz \right) dz + \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz dz \right) dz - \frac{q_z^\Sigma l^4}{8B_2} \left( 1 - \frac{8D_2}{hl^2} - \frac{4D_4}{B_2 l^2} \right) - C_1 \left( \frac{x^2}{2} - lx + \int_{z_1}^z (\mu_{xz}^v (z - z_1)) dz \right) - C_4 \int_{z_1}^z \mu_{xz}^v dz. \quad (38b)$$

С использованием выражения (38b) можно получить соотношение для стрелы прогиба слоистого консольного бруса:

$$f = w|_{\substack{x=0 \\ z=0}} = -q_{z1} \left( \frac{D_0}{B_0} \int_{z_1}^0 \mu_{xz}^v dz - \frac{D_1 l^2}{2B_2} - \frac{D_1}{B_2} \int_{z_1}^0 (z\mu_{xz}^v) dz + \int_{z_1}^0 \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} dz \right) - \frac{q_z^\Sigma l^4}{8B_2} \left( 1 - \frac{8}{l^2} \left( \frac{D_2}{h} + \frac{H_3^0}{l^2} - \frac{D_3}{B_0 l^2} \int_{z_1}^0 \mu_{xz}^v dz + \frac{D_4}{2B_2} + \frac{D_4}{B_2 l^2} \int_{z_1}^0 (z\mu_{xz}^v) dz \right) \right), \quad (39)$$

где введено обозначение для определенного интеграла:

$$H_3^0 = \int_{z_1}^0 \left( \mu_{xz}^v \int_{z_1}^z \left( \frac{1}{\mu_{xz}^G} \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz - \int_{z_1}^z (z\mu_{xz}^v) dz \right) dz + \frac{1 - \mu_{xz}^v \mu_{zx}^v}{\mu_z^E} \int_{z_1}^z \int_{z_1}^z (z\mu_x^E) dz dz \right) dz. \quad (40)$$

Для однородного ортотропного бруса (39) преобразуется к виду

$$f = \frac{q_z^\Sigma b l^4}{8E_x J_y} \left( 1 + \left[ \left( \Delta_{f1} \frac{h^2}{l^2} + \Delta_{f2} \frac{h^4}{l^4} \right) \frac{E_x}{G_{xz}} \right] \right) - \left[ \frac{q_{z1} h}{2E_z} \right], \quad (41)$$

где  $J_y = bh^3/12$ ;  $\Delta_{f1}$ ,  $\Delta_{f2}$  – постоянные,

$$\Delta_{f1} = \frac{4}{15} \left( 1 - \frac{\nu_{xz} G_{xz}}{E_x} + \frac{3\nu_{zx} G_{xz}}{2E_z} \right); \quad \Delta_{f2} = \frac{1}{16} \left( \frac{G_{xz}}{E_z} - \frac{\nu_{xz}}{15} \left( 1 - \frac{\nu_{xz} G_{xz}}{E_x} - \frac{\nu_{zx} G_{xz}}{E_z} \right) \right). \quad (42)$$

В (41) в квадратные скобки взяты составляющие стрелы прогиба, которые учитывают податливость материала бруса деформациям поперечного сдвига и обжатия. Если их отбросить, приняв  $G_{xz}, E_z \rightarrow \infty$  и  $\nu_{zx}, \nu_{xz} \rightarrow \infty$ , то данное соотношение примет известный из курса сопротивления материалов вид, что косвенно подтверждает корректность полученных соотношений.

С помощью (41) легко оценить влияние этих факторов на стрелу прогиба консоли. Так, для стального бруса ( $E_x = E_z = 210$  ГПа,  $G_{xz} = 80$  ГПа,  $\nu_{xz} = \nu_{zx} = 0,26$ ) с отношением  $l/h = 10$  учет деформаций поперечного сдвига и обжатия приводит к увеличению расчетной величины стрелы прогиба на 0,7%, в то время как для композитного бруса из углепластика (условно  $E_x = 180$  ГПа,  $E_z = 6,2$  ГПа,  $G_{xz} = 5$  ГПа,  $\nu_{xz} = 0,4$ ,  $\nu_{zx} = 0,25$ ) при  $l/h = 10$  – на 12,4% (2,8% за счет поперечного обжатия), при  $l/h = 5$  – на 49,9% (11,5% за счет поперечного обжатия).

**Результаты исследований изгиба трехслойного бруса.** Полученные выше соотношения реализованы для трехслойного консольного композитного бруса длиной  $l = 0,25$  м, который находится под действием равномерно распределенных нагрузок  $q_{z1} = 100$  кПа и  $q_{z2} = -350$  кПа (рис. 3).

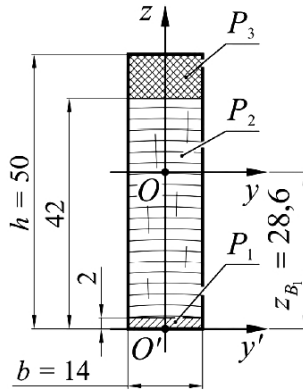


Рис. 3. Поперечное сечение трехслойного консольного бруса (мм).

Материалы слоев и их упругие характеристики таковы: алюминиевый сплав ( $P_1$ ) –  $E_x^{[1]} = E_z^{[1]} = 70$  ГПа,  $G_{xz}^{[1]} = 26,9$  ГПа,  $\nu_{xz}^{[1]} = \nu_{zx}^{[1]} = 0,34$ ; древесина ( $P_2$ ) –  $E_x^{[2]} = 15,4$  ГПа,  $E_z^{[2]} = 0,97$  ГПа,  $G_{xz}^{[2]} = 0,98$  ГПа,  $\nu_{xz}^{[2]} = 0,43$ ,  $\nu_{zx}^{[2]} = 0,07$ ; стеклопластик ( $P_3$ ) –  $E_x^{[3]} = 57$  ГПа,  $E_z^{[3]} = 9$  ГПа,  $G_{xz}^{[3]} = 5,2$  ГПа,  $\nu_{xz}^{[3]} = 0,4$ ,  $\nu_{zx}^{[3]} = 0,25$ .

Для рассматриваемого бруса с использованием полученных выше решений (22), (29), (33) и (38) определены характеристики НДС и построены графики их распределения.

На рис. 4 приведено распределение напряжений и деформаций в сечениях бруса на некотором удалении от торца. Там же и на рис. 5 для сравнения штриховыми линиями показано распределение напряжений, деформаций и перемещений для случая пренебрежения податливостью материала бруса деформациям поперечного сдвига и обжатия.

Анализ полученных результатов показывает, что согласно решению рассматриваемой задачи (рис. 1) касательные  $\tau_{xz}$  и нормальные  $\sigma_z$  напряжения не зависят от податливости бруса деформациям поперечного сдвига и обжатия. В то же время эти свойства материалов бруса влияют на характер распределения напряжений  $\sigma_x$ , особенно в поперечных сечениях на относительно большом удалении от закрепленного торца. Представляет интерес то, что в этих сечениях максимум напряжений

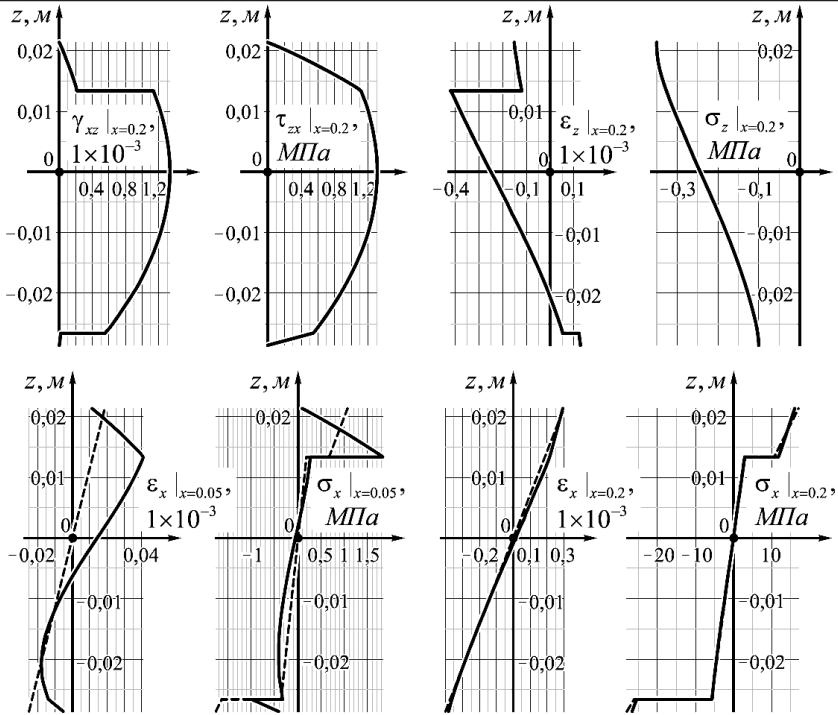


Рис. 4. Распределение напряжений и деформаций в сечениях трехслойного консольного композитного бруса.

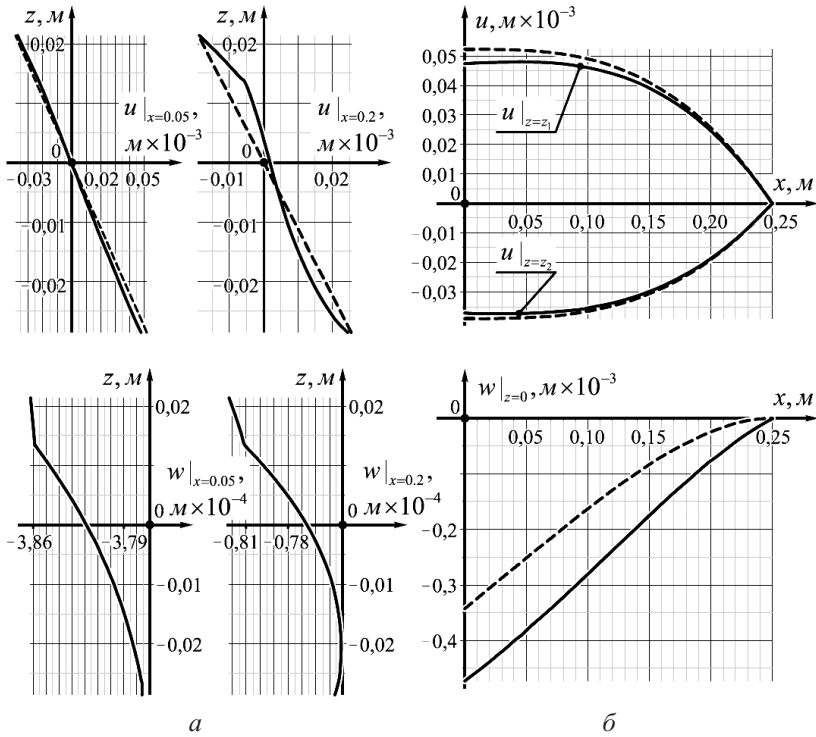


Рис. 5. Распределение перемещений по высоте сечений (а) и по длине (б) трехслойного консольного композитного бруса.

$\sigma_x$  смещается от поверхности продольных граней к внутренним границам наружных слоев. Этот эффект отдельного изгиба более жестких слоев нельзя описать с помощью теорий, построенных на гипотезе плоских сечений.

Распределение перемещений по длине характерных волокон и по высоте поперечных сечений приведено на рис. 5.

Полученные результаты указывают на существенное влияние податливости бруса деформациям поперечного сдвига и обжатия на характер распределения и величину как продольных  $u$ , так и поперечных  $w$  перемещений. Распределение продольных перемещений  $u$  по высоте сечений свидетельствует об их отчетливом искривлении (депланации), обусловленном в основном податливостью материала деформациям поперечного сдвига. Из распределения перемещений  $w$  видно, что прогиб нижнего слоя уменьшается вследствие поперечного обжатия пакета слоев. Однако наиболее значительным является увеличение стрелы прогиба композитной консоли (38%).

## Выводы

1. С использованием предложенных способов моделирования структурного строения и жесткого закрепления методами линейной теории упругости решена задача плоского поперечного изгиба слоистого консольного бруса под действием равномерно распределенных нагрузок на его продольных гранях при абсолютно жестком контакте слоев.

2. Получены соотношения, которые описывают распределения напряжений, деформаций и перемещений для всего пакета однородных ортотропных слоев бруса.

3. На примере трехслойной композитной консоли показано, что пренебрежение податливостью бруса деформациям поперечного обжатия и особенно сдвига приводит к существенному искажению картины распределения компонент НДС.

4. Полученное решение может быть использовано для прогнозирования прочности и жесткости многослойных консольных брусьев в условиях плоского изгиба, для решения прикладных задач, экспериментального определения характеристик отдельных слоев композитных брусьев, а также для разработки прикладных методов расчета таких элементов конструкций.

## Резюме

Наведено точний прямий розв'язок задачі плоского поперечного згину шаруватого консольного бруса малої ширини під дією рівномірно розподіленого навантаження за абсолютно жорсткого контакту шарів. Розв'язок побудовано за допомогою рівнянь лінійної теорії пружності, при цьому для урахування неоднорідної будови шаруватого бруса у співвідношення закону Гука введено кусочно-постійні функції Хевісайда. У процесі розв'язку задачі нормальні напруження виражено зі статичних рівнянь через невідому функцію розподілу дотичних напружень по висоті перерізу. Використання отриманих виразів у співвідношеннях закону Гука і рівняннях Коші для лінійних деформацій дозволило установити залежності між переміщеннями і дотичними напруженнями. Рівняння Коші для кутових деформацій, що залишилося, дало визначальне інтегро-диференціальне співвідношення, з якого отримано диференціальні рівняння для шуканої функції дотичних напружень та всіх невідомих функцій інтегрування. Розв'язок одержаних рівнянь можливий для всього пакета шарів без розгляду окремого шару. При цьому кінцеві співвідношення для напружень, деформацій і переміщень описують напружено-деформований стан всього пакета шарів композитного бруса. Побудований розв'язок задовольняє граничні умови й умови абсолютно жорсткого контакту шарів та є точним, якщо розподіл

навантаження відповідає отриманому розподілу напружень. За допомогою останнього проведено теоретичне дослідження напружено-деформованого стану тришарового бруса. Одержані співвідношення дозволяють прогнозувати міцність і жорсткість багатошарових композитних елементів конструкцій та будувати прикладні розв'язки для інших задач пружного згину шаруватих брусів.

1. Kucher N. K., Zarazovskii M. N., and Danil'chuk E. L. Deformation and strength of laminated carbon-fiber-reinforced plastics under a static thermomechanical loading. *Mech. Compos. Mater.* 2013. **48**, No. 6. P. 669–680. DOI: 10.1007/s11029-013-9311-0.
2. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 264 с.
3. Goryk A. V. Modeling transverse compression of cylindrical bodies in bending. *Int. Appl. Mech.* 2001. **37**, No. 9. P. 1210–1221. DOI: 10.1023/A:1013294701860.
4. Shupikov A. N., Ugrimov S. V., Kolodiazhny A. V., and Yareschenko V. G. High-order theory of multilayer plates. The impact problem. *Int. J. Solid. Struct.* 1998. **35**, No. 25. P. 3391–3403. DOI: 10.1016/s0020-7683(98)00020-1.
5. Shvab'yuk V. I., Pasternak Y. M., and Rotko S. V. Refined solution of the Timoshenko problem for an orthotropic beam on a rigid base. *Mater. Sci.* 2010. **46**, No. 1. P. 56–63. DOI: 10.1007/s11003-010-9263-7.
6. Piskunov V. G. An iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems. *Mech. Compos. Mater.* 2003. **39**, No. 1. P. 1–16. DOI: 10.1023/A:1022979003150.
7. Piskunov V. G., Gorik A. V., Lyakhov A. L., and Cherednikov V. M. High-order model of the stress-strain state of composite bars and its implementation by computer algebra. *Compos. Struct.* 2000. **48**, Nos. 1–3. P. 169–176. DOI: 10.1016/S0263-8223(99)00091-4.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
10. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: ОГИЗ, 1947. 354 с.
11. Pagano N. J. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *J. Compos. Mater.* 1969. **3**, No. 3. P. 398–411.
12. Pagano N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites sandwich plates. *J. Compos. Mater.* 1970. **4**, No. 1. P. 20–34.
13. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш. шк., 1968. 512 с.
14. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

Поступила 27. 09. 2017