

## Чисельне моделювання напружено-деформованого стану тонкошарових гумометалевих елементів віброізоляторів в умовах нелінійного деформування

А. Ф. Булат<sup>а</sup>, В. І. Дирда<sup>а,1</sup>, М. І. Лисиця<sup>а</sup>, С. М. Гребенюк<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Інститут геотехнічної механіки НАН України, Дніпро, Україна

<sup>б</sup> Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

<sup>1</sup> vita.igtm@gmail.com

*Досліджуються компоненти напружено-деформованого стану тонкошарових гумометалевих елементів. Розраховано величину стиску тонкого гумового шару під дією вертикально прикладеного зусилля. При прийнятті спрощувальних гіпотез аналітичним методом отримано залежність величини осадки гумового шару від відношення між його радіусом і товщиною. Задачу розв'язано за лінійно-пружного деформування гумового шару, привулканізованого до металевих пластин. При чисельному розрахунку слабка стисливість гуми моделювалась за допомогою моментної схеми скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів, суть якої полягає у потрібній апроксимації полів переміщень, компонент деформацій та функції зміни об'єма. Чисельний розв'язок отримано методом скінченних елементів для різних значень радіуса та товщини шара у випадку геометрично нелінійного пружного і в'язкопружного деформування гумового матеріалу. Геометрична нелінійність описується за допомогою тензора нелінійних деформацій. Моделювання в'язкопружних властивостей гуми проводиться за спадковою теорією Больцмана–Вольтерра з ядром релаксації Работнова. Нелінійні крайові задачі розв'язуються модифікованим методом Ньютона–Канторовича. Розрахунок виконується для двох випадків кріплення гумового шару до металевих елементів конструкції. У першому випадку припускається, що він привулканізований до металевих пластин, у другому – може вільно проковзувати по їх поверхні. Для першого випадку проводиться порівняння чисельних результатів з аналітичним розв'язком. Досліджується вплив геометричної нелінійності та в'язкопружних властивостей гуми на величину осадки гумового шару.*

**Ключові слова:** тонкошарові гумометалеві елементи, осадка, в'язкопружність, нелінійність, моментна схема скінченного елемента, слабкостисливий матеріал.

**Вступ.** Тонкошарові гумометалеві елементи (ТГМЕ) широко застосовуються в різних галузях сучасного машинобудування як пружні шарніри лопатей гвинтокрилів, опори рульових пристроїв, рухомі опори мостів та ін. Подібні елементи використовуються у сильно навантажених пристроях із метою забезпечення точної фіксації конструкції в одному напрямі при вільному переміщенні в іншому. Основною тенденцією на сьогодні є використання гумових елементів при будівництві висотних будівель для захисту від вібраційного впливу штучного (рух транспорту, метро та ін.) та природного (сейсмічна активність) характеру.

Тонкошаровий гумометалевий елемент – це пружний елемент, що складається з тонких гумових та металевих шарів, зібраних у пакет із двох і більше шарів із підвищеною навантажувальною здатністю (> 30 МПа) у нормальному до шару напрямі та високою податливістю (50...200% відносної деформації) у поперечному напрямі.

**Аналіз досліджень.** Амортизаційні властивості гумових віброізоляторів спочатку досліджувались аналітичними методами [1–6]. Для покращання функціональних можливостей віброізоляторів та зниження ризику при вібраційних і сейсмічних впливах було запропоновано різні варіанти їх конструктивних рішень [7–9]. У роботі [10] розв'язано проблему протиударного захисту близько розташованих споруд під час землетрусу за допомогою використання гумових вставок у місцях передбачу-

ваних зіткнень і проведено чисельне моделювання ударної взаємодії на основі нелінійної непружної силової моделі. Вплив тертя у випадку вільного контакту між гумовими та металевими елементами на деформаційні властивості гумометалевого амортизатора розглянуто в роботі [11].

Урахування все більшої кількості деформаційних властивостей, характерних для гумових матеріалів, зумовлює необхідність застосування чисельних методів при розрахунках. На основі напівлінійної моделі матеріалу запропоновано скінченно-елементний підхід до розрахунку вісесиметричних задач механіки еластомірних нестисливих матеріалів в області великих деформацій [12]. Визначено напружено-деформований стан деяких еластомірних конструкцій. У роботі [13] у варіаційній постановці на основі моделі слабкостисливого негуківського матеріалу розроблено скінченноелементний підхід до розрахунку деформування гумового аркового амортизатора. Розрахунок гумових амортизаторів за допомогою моментної схеми скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів у нелінійній постановці наведено у роботах [14, 15]. Спеціальний скінченний елемент для слабкостисливих матеріалів запропоновано у [16].

**Постановка задачі.** Основним елементом гумометалевого пакета є шар гуми товщиною  $h$ , розташований між двома металевими пластинами (рис. 1). Нижню пластину закріплено нерухомо на горизонтальній основі, а на верхню діє вертикально спрямована сила  $P$  гумовий елемент має осадку  $\delta$ .

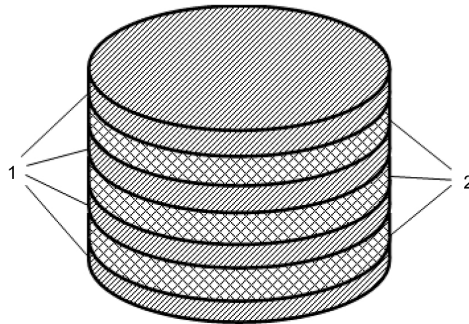


Рис. 1. Тонкошаровий гумовий (1) і металевий (2) елементи.

Проведемо розрахунок величини осадки для двох випадків кріплення гумового шару до металевих пластин. У першому випадку гумовий шар привулканізований до металевих пластин (жорстке защемлення), у другому – може вільно проковзувати у поперечному перетині без наявності тертя.

При розрахунку напружено-деформованого стану ТГМЕ необхідно враховувати реологічні властивості гуми, її слабку стисливість та ін.

Гума відноситься до матеріалів, які можуть сприймати значні деформації без руйнування. Діапазон лінійної залежності між напруженнями і деформаціями в загальному випадку є функцією вихідної суміші, ступеня наповнення, режиму вулканізації і т.д. Для ненаповненої та слабконаповненої гуми лінійність може зберігатися до деформації 80% і більше, а для сильнонаповненої – лише до 1...10% [17].

Для гумових матеріалів запропоновано значну кількість нелінійних законів стану Пенга–Ландела, Сетха, Ліндлі та ін. Вибір виду закону стану для кожної марки гуми є окремою задачею. Окрім того, їх застосування для окремих марок гум стримується відсутністю відомостей про сталі, що входять у рівняння стану. Нижче розглянуто визначення осадки віброізолятора з урахуванням двох типів нелінійності: геометричної та в'язкопружної на основі спадкової теорії Больцмана–Вольтерра, для якої відомо ядра релаксації для широкого спектра гум [18].

У результаті експериментальних досліджень встановлено, що більшість марок гум є слабкостисливими. Досить часто в інженерних розрахунках припускають, що гума являє собою нестисливий матеріал при деформації у замкненому об'ємі, і її коефіцієнт Пуассона дорівнює 0,5. Однак для багатьох так званих тонкошарових гумометалевих елементів необхідно враховувати слабку стисливість із реальним коефіцієнтом Пуассона у діапазоні 0,48...0,4995 [19].

У даній роботі для слабкостисливих матеріалів використано моментну схему скінченних елементів [15], яка включає усі переваги методу скінченних елементів і дозволяє проводити розрахунки напружено-деформованого стану конструкцій із слабкостисливих матеріалів (коефіцієнт Пуассона від 0,49 до 0,4999999999), на відміну від традиційного методу скінченних елементів, який вже при коефіцієнті Пуассона 0,49 дає похибки.

**Аналітичний та чисельний підходи.** Отримати аналітичний розв'язок при визначенні осадки ТГМЕ можна лише з урахуванням спрощень, що моделюють поведінку гумових елементів, товщина яких у десятки та сотні разів менша за їх розміри у плані. Спрощення полягають в обмеженнях на переміщення по осях  $x$  та  $y$  (по осях, що збігаються із серединною площиною гумового шару).

Аналітичний розв'язок задачі при жорсткому защемленні торців гумового шару отримано за допомогою підходу, описаного в [6]. Сполучимо площину  $x, y$  декартової системи координат із серединною площиною гумового шару. Компоненти переміщень за напрямками  $x, y, z$  позначимо  $u_x, u_y, u_z$  відповідно.

Переміщення  $u_x$  та  $u_y$  є швидкозмінними функціями координати  $z$  і повільно змінними в залежності від  $x$  та  $y$  [5]. Переміщення  $u_z$  або не залежить від  $x$  та  $y$ , або змінюється за цими координатами повільно.

У роботі [6] запропоновано знехтувати рядом доданків у співвідношеннях Коші для зсувних деформацій та вважати, що деформація  $\gamma_{xy}$  мала порівняно з  $\gamma_{xz}$  і  $\gamma_{yz}$ . З урахуванням даних припущень при розрахунках приймалися до уваги лише деформації  $\gamma_{xz}$  та  $\gamma_{yz}$ . Напруження  $\tau_{xy}$  також не враховувались.

При визначенні напружено-деформованого стану гумового шару за допомогою указаних гіпотез було отримано співвідношення для залежності осадки гуми від величини навантаження [6]:

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{h^3}{\pi \mu R^4} P, \quad (1)$$

де  $\delta$  – осадка гумового шару;  $h, R$  – його товщина і радіус;  $\mu$  – миттєвий модуль зсуву;  $P$  – навантаження.

Ця формула справедлива лише для пружного деформування гуми та вказаних крайових умов на торцях. Для отримання розв'язків в умовах в'язкопружного деформування скористаємося методом скінченних елементів. Із метою уникнення математичних складнощів, пов'язаних із вищевказаною специфікою гумових матеріалів, використаємо модифікацію метода скінченних елементів – моментну схему скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів [15].

Моментна схема скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів базується на введенні потрібної апроксимації: полів переміщень, деформацій та функції зміни об'єма [15]. Порядок розкладання деформацій та функції зміни об'єма вибирається з таким розрахунком, щоб виключити всі компоненти деформацій, що реагують на жорсткі зміщення та ефект “хибного зсуву”, і всі компоненти функції зміни об'єма, що реагують на слабку стисливість гуми.

Апроксимація переміщень має вигляд

$$u_{k'} = \sum_{pqr} \omega_k^{(pqr)} \psi^{(pqr)}. \quad (2)$$

Тут  $\omega_k^{(pqr)}$  – коефіцієнти розкладання;  $\psi^{(pqr)}$  – набір степеневих координатних функцій,

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p (x^2)^q (x^3)^r}{p!q!r!}, \quad (3)$$

де  $p, q, r$  – степені апроксимуючого полінома за відповідними напрямками.

Компоненти тензора деформацій апроксимуються шляхом розкладання компонент  $\varepsilon_{ij}$  у ряд Маклорена в точці початку координат:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stg} e_{ij}^{(stg)} \psi^{(stg)}, \quad (4)$$

де  $e_{ij}^{(stg)}$  – коефіцієнти розкладання компонент деформацій.

Апроксимація функції зміни об'єма записується наступним чином:

$$\theta = \sum_{\alpha\beta\gamma} \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \psi^{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (5)$$

де  $\xi^{(\alpha\beta\gamma)}$  – коефіцієнти розкладання функції зміни об'єма.

У розкладаннях (4), (5) виключається ряд доданків згідно з певними правилами моментної схеми скінченного елемента для слабкостисливих матеріалів і на основі отриманих розкладів будується матриця жорсткості скінченного елемента.

Для урахування реологічних властивостей гуми скористаємося спадковою теорією Больцмана–Вольтерра. Тоді закон Гука можна записати в операторній формі:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{C}^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (6)$$

Тут  $\tilde{C}^{ijkl}$  – інтегральний оператор,

$$\tilde{C}^{ijkl} \phi = C_0^{ijkl} \left[ \phi(t) - \int_0^t R(t-\tau) \phi(\tau) d\tau \right], \quad (7)$$

де  $R(t-\tau)$  – різницеве ядро релаксації;  $C_0^{ijkl}$  – компоненти тензора пружних сталей, які визначаються через компоненти метричного тензора  $g^{ij}$  та коефіцієнти Ламе  $\mu_0$  і  $\lambda_0$  (миттєве значення):

$$C_0^{ijkl} = \mu_0 (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \lambda_0 g^{ij} g^{kl}. \quad (8)$$

При використанні оператора (7) необхідно розв'язати нелінійну задачу. Тому при реалізації методу скінчених елементів інтегральний оператор записується у скінченнорізницевої формі:

$$\tilde{C}_0^{ijkl} \phi = C_0^{ijkl} \left[ \phi(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) \phi(\tau) d\tau \right]. \quad (9)$$

Вираз для компонент тензора напружень з урахуванням (9) приймає вигляд

$$\tilde{\sigma}^{ij} = C_0^{ijkl} \left[ \varepsilon_{kl}(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_{kl}(t_m) \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) d\tau \right]. \quad (10)$$

Варіацію повної потенціальної енергії з урахуванням співвідношення для тензора напружень запишемо так:

$$\delta\Pi = \iiint_V \left[ C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_n) \delta\varepsilon_{ij} - \sum_{m=0}^{n-1} R_m^* C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_m) \delta\varepsilon_{ij} \right] dV - \delta A, \quad (11)$$

де

$$R_m^* = \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t-\tau) d\tau.$$

Перший доданок у квадратних дужках в (11) описує варіацію енергії пружної деформації і є основою при формуванні матриці жорсткості скінченного елемента  $[K^{s't'}]$  для фіксованого моменту часу  $t_n$ :

$$\iiint_V C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_n) \delta\varepsilon_{ij} dV = K^{s't'}(t_n) u_{s'}(t_n) \delta u_{t'}, \quad (12)$$

де  $K^{s't'}(t_n)$  – матриця жорсткості у момент часу  $t = t_n$ ;  $u_{s'}(t_n)$  – вектор переміщень.

Другий доданок у (11) описує спадкову складову матриці жорсткості, яку можна записати у вигляді

$$\sum_{m=0}^{n-1} R_m^* \iiint_V C_0^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t_m) \delta\varepsilon_{ij} dV = \sum_{m=0}^{n-1} R_m^* K^{s't'}(t_m) u_{s'} \delta u_{t'}. \quad (13)$$

Якщо на тіло діють тільки розподілені поверхневі навантаження, які в методі скінчених елементів зводяться до зосереджених вузлових сил, то варіаційний принцип на основі потенціальної енергії з урахуванням (12) і (13) представимо так:

$$\left[ K^{s't'}(t_n) u_{s'}(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} R_m^* K^{s't'}(t_m) u_{s'}(t_m) - F^{t'}(t_n) \right] \delta u_{t'} = 0, \quad (14)$$

де  $F^{t'}(t_n)$  – поверхневе навантаження.

Оскільки варіація переміщень не дорівнює нулю, то нулю має дорівнювати вираз у квадратних дужках (14), який являє собою систему лінеаризованих рівнянь спадкової в'язкопружності:

$$K_{(n)} \bar{u}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{Q}_{(m)} + \bar{P}_{(n)}, \quad (15)$$

де  $K_{(n)}$  – глобальна матриця жорсткості конструкції;  $\bar{u}^{(n)}$  – вектор вузлових переміщень;  $\bar{P}_{(n)}$  – вектор вузлових навантажень;  $\bar{Q}_{(m)}$  – вектор додаткового вузлового

навантаження, який моделює в'язкопружну поведінку матеріалу та визначається в ітераційному процесі на кожній  $m$ -й ітерації,  $\bar{Q}_{(m)} = R_m K^{s't'}(t_m)u_s'(t_m)$ .

Для розв'язання нелінійної задачі використовується комбінований метод Ньютона–Канторовича продовження по параметру (навантаження, час) [15]. За допомогою методу можна отримувати лінеаризовані розв'язки на кожному кроці по параметру. У випадку в'язкопружного деформування розв'язується лінеаризована система рівнянь із правою частиною, що на кожному кроці за часом дозволяє ввести вектор додаткового навантаження, який моделює в'язкопружність матеріалу.

При розв'язанні геометрично нелінійної задачі сумарне навантаження розбивається на ряд кроків, і на кожному кроці за допомогою також цього методу проводиться її розв'язок.

Для отримання системи розв'язувальних рівнянь тензор скінченних деформацій запишемо так:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(л)} + \varepsilon_{ij}^{(н)}, \quad (16)$$

де  $\varepsilon_{ij}^{(л)}$  – лінійна частина тензора деформацій,  $\varepsilon_{ij}^{(л)} = \frac{1}{2}(C_j^{m'}u_{m,i} + C_i^{m'}u_{m',j})$ ;  $u_{m'}$  – компоненти вектора переміщень;  $C_j^{m'}$  – компоненти тензора перетворень;  $\varepsilon_{ij}^{(н)}$  – нелінійна частина тензора деформацій,  $\varepsilon_{ij}^{(н)} = \frac{1}{2}u_{m',i}u_j^{m'}$ .

Тоді тензор напружень прийме вигляд

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}(\varepsilon_{ij}^{(л)} + \varepsilon_{ij}^{(н)}) = \sigma_{(л)}^{ij} + \sigma_{(н)}^{ij}, \quad (17)$$

де  $\sigma_{(л)}^{ij}$  – лінійна частина тензора напружень,  $\sigma_{(л)}^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{ij}^{(л)}$ ;  $\sigma_{(н)}^{ij}$  – нелінійна частина тензора напружень,  $\sigma_{(н)}^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{ij}^{(н)}$ .

Варіацію внутрішньої енергії деформації з урахуванням (16), (17) можна записати так:

$$\delta W = \iiint_V \sigma_{(л)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(л)} dV + \iiint_V (\sigma_{(л)}^{ij} + \sigma_{(н)}^{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^{(н)} dV + \iiint_V \sigma_{(н)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(н)} dV. \quad (18)$$

Тоді її лінійна частина є основою для формування матриці жорсткості конструкції:

$$\iiint_V \sigma_{(л)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(л)} dV = K^{s't'} u_s' \delta u_{t'}. \quad (19)$$

Нелінійну частину варіації у виразі (18) запишемо так:

$$\iiint_V (\sigma_{(л)}^{ij} + \sigma_{(н)}^{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^{(н)} dV + \iiint_V \sigma_{(н)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(н)} dV = N^{s't'} u_s' \delta u_{t'}. \quad (20)$$

Варіаційний принцип на основі потенціальної енергії з урахуванням отриманих співвідношень набуває вигляду

$$[K^{s't'} u_s' + N^{s't'} u_s' - F^{t'}] \delta u_{t'} = 0. \quad (21)$$

Оскільки варіація переміщень не дорівнює нулю, то нулю має дорівнювати вираз у квадратних дужках (21), який являє собою систему лінеаризованих розв'язувальних рівнянь геометрично нелінійної задачі:

$$K_{(n)} \bar{u}^{(n)} = \bar{P}_{(n)} - \bar{N}_{(n)}, \quad (22)$$

де  $\bar{N}_{(n)}$  – вектор нелінійних додатків,  $\bar{N}_{(n)} = N^{s't'} u_{s't'}$ .

Після розв'язання системи (22) перераховуються геометрія конструкції та матриця жорсткості. Далі необхідно зробити наступний крок по навантаженню, й ітераційний процес розрахунку на основі (22) повторюється.

**Чисельні результати.** За допомогою двох вищеописаних підходів проведемо просторовий розрахунок тонкошарового гумометалевого елемента при різних значеннях  $R/h$ .

Визначимо напружено-деформований стан тонкого гумового шару під дією вертикально прикладеного зусилля. Порівняємо результати розрахунків за аналітичною формулою (1) з урахуванням спрощень із даними, отриманими чисельним методом за моментною схемою скінченного елемента.

Застосування формули (1) обмежено умовою  $R/h = 2 \dots 6$  (менше значення відповідає жорстким гумам) з допустимою похибкою 10% [6]. У зв'язку з цим було вибрано розміри гумового елемента у даному діапазоні та за формулою (1) розраховано величину осадки за різних значень навантаження.

Матеріал гумового шару – гума марки 2956 із такими механічними характеристиками: миттєвий модуль зсуву  $\mu = 1,76$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,49$ . Як ядро релаксації гуми вибрано ядро Работнова з параметрами  $\alpha = -0,6$ ,  $\beta = 1,06$ ,  $\gamma = 0,58$ .

Розрахунок конструкції проводимо при різних сітках розбиття на скінченні елементи при поступовому згущенні сітки. На рис. 2 наведено результати розрахунку для сітки з розбиттям на  $9 \times 17 \times 17$  скінченних елементів, коли подальше її згущення приводить до незначної зміни результатів.

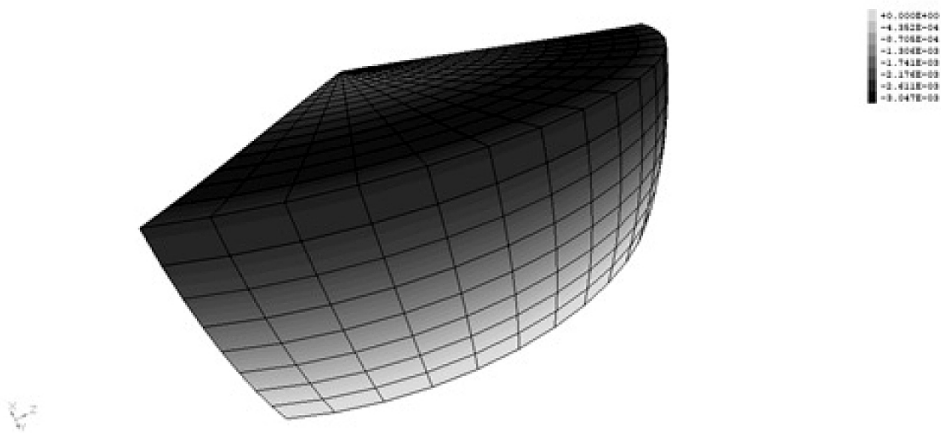


Рис. 2. Скінченноелементна модель віброізолятора.

Результати розрахунків при  $R = 0,2$  м і різних значеннях  $h$  та  $P = 100$  кН ілюструють рис. 3 і 4.

Порівняння отриманих чисельних результатів при пружному тривимірному деформуванні віброізолятора з жорстким закріпленням торців (рис. 3) з аналітичним розв'язком [6] показує якісно однакову залежність відносної осадки від  $R/h$ , хоча

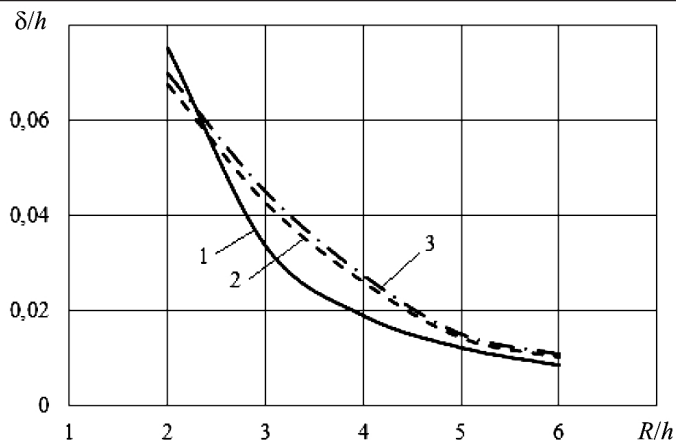


Рис. 3. Залежність величини відносної осадки віброізолятора  $\delta/h$  з жорстким закріпленням торців від  $R/h$ : 1 – аналітичний розв’язок за формулою (1); 2, 3 – чисельні нелінійний пружний та в’язкопружний розв’язки.

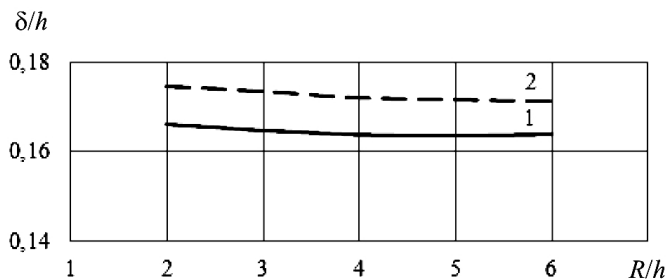


Рис. 4. Залежність величини відносної осадки віброізолятора  $\delta/h$  з вільним закріпленням торців від  $R/h$ : 1, 2 – чисельні нелінійний пружний та в’язкопружний розв’язки.

числові значення дещо різняться через урахування нелінійності деформування. Окрім того, на кінцях діапазону  $R/h = 2 \dots 6$  лінійний розв’язок наближається до нелінійного, що пояснюється обмеженістю аналітичної формули (1) через застосування спрощувальних гіпотез. При чисельному розв’язанні в’язкопружної задачі (при  $t = 10$  с) у всьому діапазоні  $R/h = 2 \dots 6$  отримано трохи більші значення осадки порівняно з такими при розв’язанні пружної задачі, що зумовлено процесом повзучості матеріалу. Однак ця різниця незначна, і при  $R/h \sim 6$ , тобто при тонкому гумовому шарі, обидва розв’язки практично збігаються. Це пояснюється тим, що жорстке закріплення торців при стисканні забезпечує деформування гумового шару у радіальному напрямі, а отже, він знаходиться у стисненому стані і через слабку стисливість гуми чинить опір деформуванню в осьовому напрямі, у тому числі і деформаціям повзучості.

При незакріплених торцях гумового шару матеріал може вільно деформуватися у радіальному напрямі, тому величина осадки у вертикальному напрямі зростає більше ніж у два рази порівняно із закріпленими торцями. Окрім того, відносна осадка мало залежить від відношення  $R/h$ . При закріплених торцях у результаті в’язкопружного розв’язку отримуємо величину осадки, яка на 8...12% більша, ніж при пружному деформуванні, що також зумовлено більшою спроможністю гумового шару деформуватися у осьовому напрямі.

**Висновок.** Урахування нелінійності при деформуванні гумових віброізоляторів дозволяє уточнити їх напружено-деформований стан в умовах статичного навантаження і скоригувати задачу у динамічній постановці.



**Резюме**

Исследуются компоненты напряженно-деформированного состояния тонкослойных резинометаллических элементов. Рассчитано величину сжатия тонкого резинового слоя под действием вертикально приложенного усилия. В случае принятия упрощающих гипотез аналитическим методом получена зависимость величины осадки резинового слоя от отношения между его радиусом и толщиной. Задача решается при линейно-упругом деформировании резинового слоя, привулканизированного к металлическим пластинам. При численном расчете слабая сжимаемость резины моделировалась с помощью моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов, суть которой заключается в тройной аппроксимации полей перемещений, компонент деформаций и функции изменения объема. Численное решение получено методом конечных элементов для различных значений радиуса и толщины слоя в случае геометрически нелинейного упругого и вязкоупругого деформирования резинового материала. Геометрическая нелинейность описывается с помощью тензора нелинейных деформаций. Для моделирования вязкоупругих свойств резины используется наследственная теория Больцмана–Вольтерра с ядром релаксации Работнова. Нелинейные краевые задачи решаются модифицированным методом Ньютона–Канторовича. Расчет проводится для двух случаев прикрепления резинового слоя к металлическим элементам конструкции. В первом случае считалось, что он привулканизирован к металлическим пластинам, во втором – может свободно проскальзывать по их поверхности. Для первого случая проведено сравнение численных результатов с аналитическим решением. Исследовано влияние геометрической нелинейности и вязкоупругих свойств резины на величину осадки резинового слоя.

1. Лавендел Э. Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 232 с.
2. Дымников С. И. Расчет резинотехнических деталей при средних деформациях. *Механика полимеров*. 1968. № 2. С. 271–275.
3. Сухова Н. А., Бидерман В. Л. К расчету резиновых амортизаторов, работающих на сжатие. *Расчеты на прочность*. 1962. № 8. С. 200–211.
4. Бидерман В. Л., Сухова Н. А. Расчет цилиндрических и прямоугольных длинных резиновых амортизаторов сжатия. *Расчеты на прочность*. 1968. № 13. С. 55–72.
5. Бидерман В. Л., Мартыанова Г. В. Сжатие низких резинометаллических амортизаторов и прокладок. *Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение*. 1962. Вып. 3. С. 154–158.
6. Бидерман В. Л., Мартыанова Г. В. Сжатие и изгиб тонкослойных резинометаллических элементов. *Расчеты на прочность*. 1983. Вып. 23. С. 32–47.
7. Дырда В. И., Гончаренко А. В., Жарко Л. А. Решение задачи о сжатии вязкоупругого цилиндра методом Ритца. *Геотехническая механика*. 2010. Вып. 86. С. 113–124.
8. Булат А. Ф., Дырда В. И., Немчинов Ю. И. и др. Вибросейсмозащита машин и сооружений с помощью резиновых блоков. *Геотехническая механика*. 2010. Вып. 85. С. 128–132.
9. Дырда В. И., Твердохлеб Т. Е., Лисица Н. И., Лисица Н. Н. Применение  $\beta$ -метода для расчета резинометаллических вибросейсмоблоков. *Геотехническая механика*. 2010. Вып. 86. С. 144–158.
10. Polycarpou P. C., Komodromos P., and Polycarpou A. C. A nonlinear impact model for simulating the use of rubber shock absorbers for mitigating the effects of structural pounding during earthquakes. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* 2013. **42**, No. 1. P. 81–100.

11. Banić M., Stamenković D., Milošević M., and Miltenović A. Tribology aspect of rubber shock absorbers development. *Tribol. Ind.* 2013. **35**, No. 3. P. 225– 231.
12. Димитриенко Ю. И., Царев С. М., Веретенников А. В. Разработка метода конечных элементов из несжимаемых материалов с большими деформациями. *Вест. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2007. № 3. С. 69–82.
13. Белкин А. Е., Хоминич Д. С. Расчет больших деформаций арочного амортизатора с учетом объемной сжимаемости резины. *Вест. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение.* 2012. № 2. С. 3–11.
14. Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей. Днепропетровск; Запорожье: Запорож. нац. ун-т, 2012. 370 с.
15. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. Киев: Наук. думка, 2002. 655 с.
16. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. The Finite Element Method. Vol. 1: The Basis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 693 p.
17. Потураев В. Н., Дырда В. И., Круш И. И. Прикладная механика резины. Киев: Наук. думка, 1980. 260 с.
18. Булат А. Ф., Дырда В. И., Звягильский Е. Л., Кобец А. С. Прикладная механика упругонаследственных сред. В 3 т. Т. 1. Механика деформирования и разрушения эластомеров. Киев: Наук. думка, 2011. 568 с.
19. Дымников С. И., Лавендел Э. Э., Павловскис А. А., Сниеги М. И. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 238 с.

Поступила 22. 03. 2018