УДК 621.002.56

В. С. СЕНЬКИН, С. В. СЮТКИНА-ДОРОНИНА

СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА С ГРАДИЕНТНЫМИ МЕТОДАМИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЕКТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ПРОГРАММ УПРАВЛЕНИЯ РАКЕТНЫМ ОБЪЕКТОМ

Институт технической механики
Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины,
ул. Лешко-Попеля, 15, 49005, Днепр, Украина; e-mail: svetasut2012@gmail.com

Мета статті – розробка методичного забезпечення для оптимізації на початковому етапі проектування основних характеристик керованого об’єкта (КО) з маршовим ракетним двигуном на твердому паливі, що включає формалізацію комплексної задачі спільної оптимізації проектних параметрів, параметрів траєкторії і програм керування рухом КО, який може здійснювати політ по балістичній, аеробалістичній або комбінованій траєкторіях. Задачу сформульовано як задачу теорії оптимального керування з обмеженнями у вигляді рівностей і диференціальних зв’язків. До складу параметрів, які оптимізуються, включені проектні параметри КО, параметри, що визначають програми керування рухом КО на різних ділянках траєкторії. Запропоновано підхід до формування програм керування КО у вигляді поліномів, що дозволяє звести задачу теорії оптимального управління до задачі нелінійного математичного програмування. Проведено огляд методів оптимізації та виконано порівняльний аналіз методів випадкового пошуку з градієнтними методами. Показано доцільність застосування на першому етапі генетичного алгоритму випадкового пошуку, за допомогою якого проводиться швидке і повне дослідження всього простору пошуку оптимального розв’язку і знаходиться розв’язок, найбільш наближений до глобального оптимуму цільового функціоналу. Потім на наступному етапі пропонується використовувати градієнтний метод покоординатного спуску в околиці знайденого на першому етапі розв’язку для знаходження глобального оптимуму цільового функціоналу. Запропоновано підхід для розв’язання сформульованої задачі, що дозволяє з необхідною для проектних досліджень точністю визначати оптимальні в заданому класі функцій програми керування рухом і раціональні значення проектних параметрів КО. Наведені алгоритми, що використані для оптимізації проектних параметрів, параметрів траєкторії і програм керування КО, можуть використовуватися проектними організаціями на початковому етапі проектування об’єктів ракетно-космічної техніки різного призначення.

Цель статьи – разработка методического обеспечения для оптимизации на начальном этапе проектирования основных характеристик управляемого объекта (УО) с маршевым ракетным двигателем на твёрдом топливе, включающая формализацию комплексной задачи совместной оптимизации проектных параметров, параметров траектории и программ управления движением УО, который может осуществлять полёт по баллистической, аэробаллистической или комбинированной траекториям. Задача сформулирована как задача теории оптимального управления с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей. В состав оптимизируемых параметров включены проектные параметры УО и параметры, позволяющие формировать программы управления движением УО на различных участках траектории. Предложен подход к формированию программ управления УО в виде полиномов, позволивший свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования. Проведен обзор методов оптимизации и выполнен сравнительный анализ методов случайного поиска с градиентными методами. Показана целесообразность применения на первом этапе генетического алгоритма случайного поиска, с помощью которого проводится быстрое и полное исследование всего пространства поиска оптимального решения и находится решение, наиболее приближенное к глобальному оптимуму целевого функционала. Затем на последующем этапе предлагается использовать градиентный метод покоординатного спуска в окрестности найденного на первом этапе решения для нахождения глобального оптимума целевого функционала. Предложенный подход для решения сформулированной задачи позволяет с необходимой для проектных исследований точностью определять оптимальные в заданном классе функций программы управления движением и рациональные значения проектных параметров УО. Приведенные алгоритмы, использованные для оптимизации проектных параметров, параметров траектории и программ управления УО, могут использоваться проектными организациями на начальном этапе проектирования объектов ракетно-космической техники различного назначения.

The aim of this paper is to develop a methodology for optimizing, at the initial design stage, the key characteristics of a rocket with a solid-propellant sustainer engine which can follow a ballistic, an aeroballistic, or a combined trajectory, including the formalization of the combined problem of simultaneous optimization of the rocket design parameters, trajectory parameters, and flight control programs. The problem is formulated as an optimal control problem with imposed equalities and differential constraints. The parameters to be optimized include the rocket design parameters and the parameters of the rocket control programs in different portions of the trajectory. The rocket control programs are proposed to be formed in polynomial form, which allows one to reduce the optimal control problem to a nonlinear programming problem. Optimization methods are overviewed, and random search methods are compared with gradient ones. It is shown that at the first stage it is advisable to use a genetic random search algorithm, which makes a quick and complete examination of the whole of the optimal solution search space and finds the solution closest to the global optimum of the objective functional. At the next stage, it is proposed to use a coordinate gradient descent method in the vicinity of the solution found at the first stage to find the global optimum of the objective functional. The proposed approach to the solution of the formulated problem allows one to determine, to the accuracy required in design studies, the rocket flight control programs optimal in a given class of functions and advisable values of the rocket design parameters. The algorithms for rocket design parameter, trajectory parameter, and control program optimization presented in this paper may be used by design organizations at the initial design stage of rockets of different purposes.

Ключевые слова: *управляемый объект, маршевый ракетный двигатель на твёрдом топливе, начальный этап проектирования, проектные параметры, программы управления движением, целевой функционал, оптимизация, методы случайного поиска, градиентные методы.*

Введение. Проектирование, разработка и создание управляемых объектов (УО) связано с большими затратами материальных, финансовых и технических ресурсов. Необходимость учета этих факторов при проектировании предъявляет повышенные требования к качеству принимаемых проектных решений. Следует отметить, что неверные (нерациональные) проектные решения, принятые на начальном этапе проектирования УО, приводят в конечном итоге к снижению эффективности выполнения целевых задач, росту затрат на разработку и изготовление УО, увеличению сроков его создания.

Под управляемым объектом далее понимаются одноступенчатые ракеты различного назначения, предназначенные для доставки полезного груза в заданную точку пространства с требуемыми значениями кинематических параметров движения. В качестве силовых установок на УО рассматриваются ракетные двигатели, работающие на твердом топливе (РДТТ).

Для успешного решения проектных задач, связанных с разработкой УО, особое значение приобретает создание современного методического, алгоритмического и программного обеспечения, которое позволяет на начальном этапе проектирования с необходимой для проектных исследований точностью определять:

– оптимальные (рациональные) значения оптимизируемых параметров и основных характеристик УО;

– программы управления движением;

– количественные оценки показателей эффективности с учетом особенностей целевого применения УО.

При этом следует отметить, что разработка методического обеспечения для решения задач начального этапа проектирования УО является одной из основных предпосылок для осуществления корректного и научно обоснованного принятия проектных решений при проектировании УО, а также создания эффективных методов решения проектных задач, что собственно и определяет актуальность исследований, проводимых в данном направлении.

Вопросам проектирования и разработки управляемых объектов ракетно-космической техники (РКТ) уделено большое внимание в отечественной и зарубежной научной и технической литературе [1 – 3], где рассмотрены математические модели функционирования УО в целом, основных элементов и подсистем, а также вопросы, связанные с оптимизацией проектных параметров, программ управления УО различного назначения. В [4, 5] сформулирована задача совместной оптимизации проектных параметров и программ управления движением УО, приведены элементы математической модели и алгоритмы, позволяющие на начальном этапе проектирования определять массовые и габаритные характеристики УО с маршевым РДТТ.

Далее рассмотрена постановка комплексной задачи оптимизации программ управления и проектных параметров одноступенчатого УО с маршевым ракетным двигателем на твёрдом топливе.

Постановка задачи. Комплексная задача совместной оптимизации программ управления и проектных параметров одноступенчатого УО с маршевым РДТТ может быть сформулирована как задача теории оптимального управления с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей [1, 6], формализация которой заключается:

– в выборе критерия оптимизации (целевого функционала);

– в разработке математической модели, позволяющей в зависимости от исходных данных (вектор $\bar{x}$), оптимизируемых параметров, включающих основные проектные параметры УО и параметры траектории (вектор $\bar{p}$), определять программы управления (вектор $\bar{u}$) и значение целевого функционала;

– в разработке метода оптимизации, обеспечивающего нахождение таких значений векторов оптимизируемых параметров $\bar{p} = \bar{p}_{opt}$ и программ управления движением УО $\bar{u} = \bar{u}_{opt}$, при которых целевой функционал принимает оптимальное значение.

В качестве исходной информации (компоненты вектора $\bar{x}$), необходимой для решения комплексной задачи, далее рассматриваются:

– данные тактико-технического задания, определяющие целевую задачу, для решения которой проектируется УО;

– условия пуска УО;

– ограничения на траекторию полета, габаритно-массовые характеристики УО в целом, отдельных подсистем и элементов;

– коэффициенты безопасности, используемые при проведении прочностных расчетов;

– физико-механические и химические характеристики используемых материалов и твёрдого ракетного топлива (ТРТ);

– данные о прототипах, отдельных подсистем и элементов УО;

– неучтенные массы элементов, подсистем, не включённых в математическую модель для расчёта основных характеристик УО и др.

В состав оптимизируемых в процессе решения комплексной задачи параметров входят:

– основные проектные параметры, определяющие габаритно-массовые и энергетические характеристики УО в целом и входящего в его состав маршевого РДТТ;

– параметры, определяющие совместно с программами управления движением траекторию УО.

В качестве программ управления движением рассматриваются программа изменения во времени угла тангажа и программа изменения во времени тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ [4, 5].

Компонентами вектора оптимизируемых параметров $\bar{p}$ являются:

– проектные параметры УО, включающие коэффициент начальной тяговооруженности ν_p и относительную конечную массу μ_k;

– параметры маршевого РДТТ, такие как давление в камере сгорания p_k; диаметр среза сопла D_a; угол полураствора на срезе сопла β_a; отношение тяги в конце основного режима работы к тяге в начале основного режима работы РДТТ K_{pd};

– параметры траектории, включающие угол тангажа в конце активного участка траектории (АУТ) φ_{AUT}, а также время выхода на нулевой угол атаки после окончания АУТ $t_{PUT\,1}$.

Проектный параметр УО μ_k определяется при заданных массе полезного груза m_{pg}^{mp} и стартовой массе УО m_0^{mp} из условия размещения максимально возможного количества ТРТ в рассматриваемом варианте УО.

В качестве компонент вектора управления движением УО $\bar{u} = \bar{u}(t)$ рассматриваются, как уже указывалось ранее, программы изменения во времени угла тангажа $\varphi_{np}(t)$ на активном и пассивном участках траектории, а также тяговых $P_{np}(t)$ и расходных $\dot{m}_c(t)$ характеристик маршевого РДТТ.

Коэффициент начальной тяговооруженности и относительная конечная масса УО определяются известными соотношениями [7]:

$$\nu_p = \frac{m_0 \cdot g_0}{P_0}, \ \mu_k = \frac{m_k}{m_0} = \frac{m_0 - m_m(\bar{p})}{m_0},$$

где m_0, m_k – соответственно стартовая и конечная массы УО; $m_m(\bar{p})$ – запас топлива маршевого РДТТ; g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли; P_0 – начальное значение тяги в пустоте маршевого РДТТ после выхода последнего на основной режим работы.

Значения оптимизируемых параметров (вектор $\bar{p}$) и программ управления движением УО (вектор $\bar{u}$) выбираются из условия обеспечения максимального значения целевого функционала – расстояния $L(\bar{p}, \bar{u}, \bar{x})$, на которое доставляется заданная масса полезного груза m_{pg}^{mp} с учётом ограничений, накладываемых конструктивно-технологическими требованиями, условиями эксплуатации, условиями прочности несущих элементов конструкции, условиями работоспособности РДТТ и т. п.

Программы управления движением УО задаются в определенном классе функций (полиномов), характер изменения которых во времени определяется вектором оптимизируемых параметров $\bar{p}$ и текущими значениями вектора фазовых координат $\bar{y}$, определяющего положение УО в пространстве.

В этом случае задача теории оптимального управления может быть преобразована в задачу нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей.

Комплексная задача совместной оптимизации проектных параметров и программ управления УО формулируется следующим образом. Необходимо определить значения векторов $\bar{p} = \bar{p}_{opt}$, $\bar{u} = \bar{u}_{opt}$, обеспечивающих максимальное значение целевого функционала

$$J(\bar{p}_{opt}, \bar{u}_{opt}, \bar{x}) = \max_{\bar{p}, \bar{u}} L(\bar{p}, \bar{u}, \bar{x})$$

при ограничениях:

- на области изменения оптимизируемых параметров $\bar{p}$ и исходных данных $\bar{x}$

$$\bar{p} \in \tilde{P}^m \subset P^m; \quad \bar{x} \in \tilde{X}^k \subset X^k;$$

- на траекторию полёта и программы управления УО

$$t_{vert} = t_{vert}^{mp}; \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, \bar{u}, \bar{x}, \bar{p}); \bar{y} \in \tilde{Y}^s \subset Y^s; \bar{u} \in \tilde{U}^r \subset U^r;$$

- на габаритно-массовые характеристики УО

$$m_0(\bar{x}, \bar{p}) = m_0^{mp}; m_{pg}(\bar{x}, \bar{p}) = m_{pg}^{mp}; D_p(\bar{x}, \bar{p}) = D_p^{dop}.$$

Здесь $\bar{x} = (x_i), i = \overline{1,k}$, $\bar{p} = (p_i), i = \overline{1,m}$ – векторы исходных данных и оптимизируемых параметров УО, являющиеся элементами векторных пространств X^k, P^m соответственно; $\tilde{P}^m, \tilde{X}^k$ – замкнутые области в векторных пространствах P^m, X^k, в которых могут принимать значения векторы $\bar{p}, \bar{x}$; $\bar{y} = (y_i)$, $i = \overline{1,s}$, $\bar{u} = (u_j)$, $j = \overline{1,r}$ – соответственно вектор фазовых координат, определяющий положение УО в пространстве, и вектор управления, являющиеся элементами векторных пространств Y^s и U^r; $\tilde{Y}^s, \tilde{U}^r$ – замкнутые области в векторных пространствах Y^s и U^r, в которых могут принимать значения векторы $\bar{y}$, $\bar{u}$; t_{vert}, t_{vert}^{mp} – расчётная и заданная продолжительность полёта на вертикальном участке движения УО; $m_0(\bar{x}, \bar{p}), m_0^{mp}$ – расчётная и заданная стартовые массы УО; $m_{pg}(\bar{x}, \bar{p}), m_{pg}^{mp}$ – расчётная и заданная массы полезного груза; $D_p(\bar{x}, \bar{p})$, D_p^{dop} – расчётный и максимально допустимый диаметры УО.

Математическая модель УО представлена в виде оператора $\tilde{F} = R(Z)$, с областью определения на множестве $Z = \tilde{X}^k \times \tilde{P}^m \times \tilde{U}^r$ и областью значений на множестве F, сопоставляющего каждому элементу множества $z(\bar{x}, \bar{p}, \bar{u}) \in Z$ множество выходных характеристик УО $\tilde{F} \subset F$.

В качестве выходных данных рассматриваются: габаритно-массовые характеристики УО в целом и основных его элементов и подсистем; прочностные, аэродинамические, баллистические, энергетические характеристики УО; программы управления; значение целевого функционала L – дальность полёта УО.

Структура математической модели, последовательность расчета целевого функционала при оптимизации проектных параметров и программ управления УО приведены в [4].

Для решения сформулированной комплексной задачи совместной оптимизации проектных параметров и программ управления могут быть применены методы теории оптимального управления [1, 6]. Однако следует отметить, что их использование наталкивается на трудности, связанные со сложностью используемых математических моделей, а также с проблемой решения краевой задачи для основной и сопряжённой систем обыкновенных дифференциальных уравнений для каждого из рассматриваемых альтернативных вариантов УО. Перечисленные факторы затрудняют внедрение этих методов в практику оптимального проектирования.

Для преодоления этих трудностей использован подход, позволяющий свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования с ограничениями в виде равенств и дифференциальных связей [7]. В этом случае программы управления движением УО (программы изменения во времени угла тангажа, тяговых и расходных характеристик маршевого РДТТ) задаются в виде полиномов, часть коэффициентов которых определяется с использованием исходных данных, текущих значений оптимизируемых параметров и фазовых координат, а остальные коэффициенты оптимизируются совместно с основными проектными параметрами УО [7].

При таком подходе задача нелинейного математического программирования может быть успешно решена широко распространёнными методами оптимизации, в частности методами детерминированного или случайного поиска [8, 9]. В процессе решения задачи необходимо для различных значений вектора оптимизируемых параметров $\bar{p}$ сформировать программу управления движением УО – программу изменения угла тангажа $\varphi_{пр}(t)$ на АУТ, а также программы изменения тяги $P_{пр}(t)$ и массового секундного расхода продуктов сгорания ТРТ $\dot{m}_c = \dot{m}_c(t)$.

Следует отметить, что используемые при проектировании математические модели УО с двигательными установками на ТРТ достаточно широко освещены в технической литературе [1, 2, 3 и др.].

Элементы математической модели УО, которые дали возможность свести задачу теории оптимального управления к задаче нелинейного математического программирования, рассмотрены ранее [4, 5, 7].

Для успешного решения поставленной задачи необходима разработка метода оптимизации, позволяющего с достаточной для проектных исследований точностью определять проектные параметры, параметры траектории и программы управления полётом УО.

Далее приводится обзор и анализ методов оптимизации, которые могут быть использованы для решения поставленной задачи.

Обзор и анализ методов случайного поиска. Алгоритмы методов оптимизации можно разделить на две группы: алгоритмы локального и глобального поиска оптимального решения.

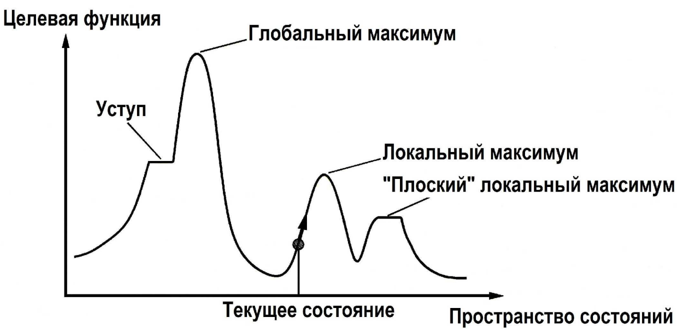

Рис. 1 – Ландшафт одномерного пространства состояний

Алгоритмы локального поиска являются эффективным средством решения задач оптимизации. Назначение алгоритмов состоит в поиске состояния, наилучшего с точки зрения целевого функционала. Как правило, алгоритмы локального поиска не предусматривают систематическое исследование пространства состояний [9]. В локальном поиске рассматривается ландшафт пространства состояний, характеризуемый «местоположением», которое определяется состоянием и «возвышением» (определенным значением целевого функционала). Ландшафт одномерного пространства состояний приведен на рис. 1. Задача состоит в поиске глобального максимума (высочайшего пика). Если решается задача минимизации целевого функционала, то задача состоит в поиске самой глубокой долины – глобального минимума. Алгоритмы локального поиска исследуют такой ландшафт и практически всегда находят цель – локальный оптимум, если он существует, а оптимальный алгоритм должен находить глобальный оптимум (максимум / минимум).

Возможно применение следующих алгоритмов локального поиска для задач оптимизации.

Алгоритм поиска с восхождением к вершине [9] в случае максимизации целевого функционала осуществляет перемещение в направлении возрастания значения целевого функционала в зависимости от вектора оптимизируемых параметров. Окончание вычислений осуществляется после достижения пика, в котором ни одно из соседних состояний не имеет более высокого значения. Следует отметить, что алгоритм поиска с восхождением к вершине имеет ряд недостатков. В частности, алгоритм часто заходит в тупик, поскольку найденный локальный максимум может быть ниже, чем глобальный максимум. При наличии хребтов в целевом функционале возникают последовательности локальных максимумов, задача прохождения которых для рассматриваемого алгоритма является достаточно сложной. В случае наличия плато, представляющее плоский локальный максимум, из которого рассматриваемый алгоритм может оказаться неспособным выйти. В то же время в случае уступа возможно дальнейшее успешное продвижение (см. рис. 1). В каждом из этих случаев рассматриваемый алгоритм достигает такой точки, из которой не может осуществляться дальнейшее успешное продвижение. При использовании этого алгоритма для поиска глобального максимума целесообразно проведение ряда запусков из сформированных случайным образом начальных состояний и последующий останов после достижения цели (локального или глобального оптимума).

Локальный лучевой поиск. Стремление преодолеть ограничения, связанные с нехваткой памяти в компьютере, привело к тому, что в свое время предпочтение отдавалось алгоритмам, предусматривающим хранение в памяти только одного узла, но, как оказалось, такой подход часто является слишком радикальным способом экономии памяти [9]. В алгоритме локального лучевого поиска [9] предусмотрено отслеживание k состояний, а не только одного состояния. Работа этого алгоритма начинается с формирования случайным образом k состояний. На каждом этапе формируются все преемники всех k состояний. Если какой-либо из этих преемников соответствует целевому состоянию, алгоритм останавливается. В противном случае алгоритм выбирает из общего списка k наилучших преемников и повторяет цикл.

Этот алгоритм способен быстро отказаться от бесплодных поисков и перебросить свои ресурсы туда, где достигнут наибольший прогресс.

Генетический алгоритм. Генетический алгоритм [9] представляет собой вариант стохастического лучевого поиска, в котором состояния-преемники (потомки) формируются путем комбинирования двух родительских состояний, а не посредством модификации единственного состояния. В нем просматривается такая же аналогия с естественным отбором, как и в стохастическом лучевом поиске.

В генетическом алгоритме вероятность выбора родителей для воспроизводства потомков прямо пропорциональна оценке целевого функционала. Для воспроизводства потомка случайным образом выбираются двое родителей в соответствии с вероятностями, прямо пропорциональными оценкам целевого функционала каждого индивидуума. Однако, возможна ситуация, когда один индивидуум выбирается дважды, а один вообще остается невыбранным. При использовании метода отсеивания, в котором отбрасываются все индивидуумы с оценками целевого функционала ниже заданного порога, алгоритм сходится быстрее, чем при использовании версии со случайным выбором. Для каждой пары родителей, предназначенной для воспроизводства потомков, среди параметров вектора случайным образом выбирается точка скрещивания. Сами потомки создаются путем перекрестного обмена параметрами родительских векторов, разорванных в точке скрещивания. На практике генетические алгоритмы оказали глубокое влияние на научные методы, применяющиеся при решении таких задач оптимизации, как компоновка электронных схем и планирование производства [9].

В статье генетический алгоритм используется как один из возможных методов для совместной оптимизации программ управления, проектных параметров и программ управления одноступенчатого УО с маршевым РДТТ.

Метод решения. Для оптимизации параметров и программ управления были использованы генетический алгоритм [9] и градиентный метод покоординатного спуска с поочередным изменением параметров [8]. Следует отметить, что решение поставленной задачи с помощью градиентного метода покоординатного спуска при каждой итерации требует вычисления градиента функции (частной производной целевого функционала по каждому проектному параметру) методом численного дифференцирования, что значительно увеличивает количество расчетов целевого функционала и, как следствие, увеличивает время оптимизации. При малых градиентных шагах изменения каждого проектного параметра градиентный метод покоординатного спуска окажется неспособным найти глобальный максимум целевого функционала, поскольку может зайти в тупик, достигнув локального оптимума. Основная проблема состоит в том, что если значения шагов градиентов изменения каждого параметра будут слишком малыми, то потребуется слишком много этапов поиска, а если слишком большими, то в поиске можно проскочить глобальный оптимум.

Попытка преодолеть эту дилемму предпринимается следующим образом:

– на первом этапе генетическим алгоритмом проводится более быстрое и полное исследование всего пространства поиска оптимального вектора проектных параметров и находится вектор, наиболее приближенный к глобальному максимуму целевого функционала;

– на втором этапе градиентным методом покоординатного спуска в окрестности найденного вектора находится наилучший вектор, который соответствует глобальному максимуму целевого функционала.

Далее приведены алгоритмы методов, использованные для оптимизации проектных параметров, параметров траектории и программ управления УО.

Генетический алгоритм. Шаг 1. Задаётся: n – количество оптимизируемых параметров, допустимые диапазоны их изменения и целевой функционал $f(\overline{X})$, который необходимо максимизировать; M – предельное число циклов расчёта генетического алгоритма; k – количество изначально формируемых случайным образом состояний вектора проектных параметров.

Шаг 2. Задать номер цикла $j = 1,\ldots,M$.

Шаг 3. Проверить условие $j \le M$:

а) если $j > M$, то $\overline{X} = \overline{X}_{opt}$, расчёт окончен;

б) если $j \le M$, то перейти к шагу 4.

Шаг 4. Проверить условие: является ли итерация первой $j = 1$:

а) если $j = 1$, то перейти к шагу 5 для генерации случайным образом начальной популяции, состоящей из k индивидуумов;

б) если $j > 1$, то перейти к шагу 6 для формирования новой популяции, состоящей из полученных потомков в предыдущей итерации.

Шаг 5. Формируется случайным образом k индивидуумов в начальном массиве популяции:

$$mas\_popul = \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \\ \ldots \\ \overline{X_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} random\ \{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}\} \\ random\ \{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}\} \\ \ldots \\ random\ \{x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}\} \end{pmatrix}.$$

Шаг 6. В массив новой популяции mas_popul записывается массив потомков mas_child :

$$mas\_child = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 \\ \overline{C}_2 \\ \ldots \\ \overline{C}_k \end{pmatrix} \Rightarrow mas\_popul = \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \\ \ldots \\ \overline{X_k} \end{pmatrix}.$$

Шаг 7. Рассчитывается целевой функционал для каждого вектора проектных параметров популяции:

$$mas\_popul = \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \\ \ldots \\ \overline{X_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}\} \\ \{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}\} \\ \ldots \\ \{x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}\} \end{pmatrix} \Leftrightarrow mas\_target = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_k \end{pmatrix}.$$

Шаг 8. Рассчитывается процент вероятности выбора родителей для воспроизводства потомков прямо пропорционально значению целевого функционала:

$$\begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \\ \dots \\ \overline{X_k} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow mas\_target\_pct = \begin{pmatrix} f_1\_\% \\ f_2\_\% \\ \dots \\ f_k\_\% \end{pmatrix}.$$

Шаг 9. Определяется индивидуум с максимальным значением целевого функционала:

$$for\ \ i = 1\ to\ k\ do \quad if\ \ f\left(\overline{X}_{opt}\right) \le f\left(\overline{X}_i\right)\ \ then \quad \left(\overline{X}_{opt} = \overline{X}_i\right) \Leftrightarrow f_{\max}.$$

Шаг 10. Попарно выбираются k родителей случайным образом в соответствии с полученными процентами вероятности для воспроизводства k потомков:

$$\begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \\ \dots \\ \overline{X_k} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f_1\_\% \\ f_2\_\% \\ \dots \\ f_k\_\% \end{pmatrix} \Rightarrow mas\_parents = random \begin{pmatrix} \overline{X_3} \\ \overline{X_k} \\ \dots \\ \overline{X_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \\ \dots \\ \overline{P_k} \end{pmatrix}.$$

Шаг 11. Для каждой пары, предназначенной для воспроизводства потомков, среди позиций параметров случайным образом выбирается точка скрещивания. Размер массива случайных точек скрещивания каждой пары родителей равен $trunc\ (k/2)$:

$$mas\_parents = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \overline{P_1} \\ \overline{P_2} \end{matrix}\right\} \\ \dots \\ \left.\begin{matrix} \overline{P_{k-1}} \\ \overline{P_k} \end{matrix}\right\} \end{pmatrix} \Leftrightarrow mas\_point\_cros = random \begin{pmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_{k/2} \end{pmatrix}.$$

Шаг 12. Генерируются массив k потомков по два потомка от каждой пары родителей путём перекрестного обмена родительских векторов параметров, разорванных в случайной точке скрещивания:

$$\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \overline{P_1} = \{x_{11}, x_{12}, | x_{13}, \dots, x_{1n}\} \\ \overline{P_2} = \{x_{21}, x_{22}, | x_{23}, \dots, x_{2n}\} \end{matrix}\right\} \\ \dots \\ \left.\begin{matrix} \overline{P_{k-1}} = \{x_{(k-1)1}, | x_{(k-1)2}, \dots, x_{(k-1)n}\} \\ \overline{P_k} = \{x_{k1}, \quad | x_{k2}, \dots, x_{kn}\} \end{matrix}\right\} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{C_1} = \{x_{11}, x_{12}, x_{23}, \dots, x_{2n}\} \\ \overline{C_2} = \{x_{21}, x_{22}, x_{13}, \dots, x_{1n}\} \\ \dots \\ \overline{C_{k-1}} = \{x_{(k-1)1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}\} \\ \overline{C_k} = \{x_{k1}, x_{(k-1)2}, \dots, x_{(k-1)n}\} \end{pmatrix}.$$

Шаг 13. Генерируется случайным образом массив мутаций, т. е. случайный порядковый номера параметра, который случайным образом изменяется у каждого потомка:

$$mas\_mut = random\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \ldots \\ m_k \end{pmatrix} \Rightarrow mas\_child = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 = \left\{ x_{11}, \underset{m_1}{\langle x_{12} \rangle}, x_{13}, \ldots, x_{1n} \right\} \\ \overline{C}_2 = \left\{ x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, \underset{m_2}{\langle x_{2n} \rangle} \right\} \\ \ldots \\ \overline{C}_k = \left\{ x_{k1}, x_{k2}, \underset{m_k}{\langle x_{k3} \rangle}, \ldots, x_{kn} \right\} \end{pmatrix}$$

Шаг 14. Проверка номера цикла j :

а) если $j \geq M$, то расчет окончен и получен оптимальный вектор параметров $\overline{X}_{opt} \Leftrightarrow f_{\max}$; б) если $j < M$, то перейти к шагу 2.

Алгоритм градиентного метода покоординатного спуска.

Шаг 1. Задаётся n – количество оптимизируемых параметров, диапазоны их изменения и целевой функционал $f(\overline{X})$. Начальный вектор оптимизируемых параметров $\overline{X}^{10}$ включает в себя минимальные граничные значения заданных диапазонов изменения оптимизируемых параметров. Задаётся: ε – малое положительное число $0 < \varepsilon < 1$; Задаётся M – предельное число циклов расчёта оптимизации.

Шаг 2. Задаётся номер цикла $j = 1, \ldots, M$.

Шаг 3. Проверяется условие $j \leq M$: а) если $j > M$, то $\overline{X}_{opt} = \overline{X}^{jn}$, расчёт окончен; б) если $j \leq M$, то переход к шагу 4.

Шаг 4. Задаётся $k = 1, \ldots, n$.

Шаг 5. Проверяется условие $k \leq n$: а) если $k \leq n$, то переход к шагу 6; б) если $k = n + 1$, то присвоить $\overline{X}^{(j+1)0} = \overline{X}^{jn}$ и перейти к шагу 2.

Шаг 6. Вычисляется градиент функции $\nabla f(\overline{X}^{jk})$ по k -тому проектному параметру x_k методом численного дифференцирования

$$\nabla f(\overline{X}^{jk}) = \left(\frac{\partial f(\overline{X})}{\partial x_k} \right)_{\overline{X} = \overline{X}^{jk-1}} .$$

Суть метода численного дифференцирования состоит в том, что целевая функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом Ньютона $P(x)$, который дифференцируется. При этом чем меньше расстояние между узлами интерполяции, тем точнее полученный результат дифференцирования.

Узлы интерполяции равно отстоят друг от друга, то есть образуют арифметическую прогрессию и обозначаются как:

$$x_0; \quad x_1 = x_0 + h; \quad x_2 = x_0 + 2 \cdot h; \quad \ldots; \quad x_n = x_0 + m \cdot h;$$

где h – шаг между узлами интерполяции.

Получается интерполяционная формула Ньютона функции $P(x)$:

$$f(x) = P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \ldots;$$

где

– разности функции первого порядка:

$$\Delta y_0 = f(x_1) - f(x_0) = y_1 - y_0; \; \Delta y_1 = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1;$$

– разности функции второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2 \cdot y_1 + y_0 .$$

Вводится независимая переменная q:

$$x = x_0 + h \cdot q; \; \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{h} = q; \\ \dfrac{x - x_1}{h} = \dfrac{x - (x_0 + h)}{h} = \dfrac{(x - x_0)}{h} - \dfrac{h}{h} = (q - 1); \\ \dfrac{x - x_2}{h} = \dfrac{x - (x_0 + 2 \cdot h)}{h} = (q - 2). \end{cases}$$

Подставляются полученные выражения в многочлен Ньютона:

$$f(x) = P(x_0 + h \cdot q) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot h \cdot q + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!} \cdot h^2 \cdot q \cdot (q - 1) + \ldots;$$

$$f(x) = P(x_0 + h \cdot q) = y_0 + \Delta y_0 \cdot q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot q \cdot (q - 1) + \ldots \quad .$$

Дифференцируется сложная функция:

$$\begin{cases} x = x_0 + h \cdot q; \\ \dfrac{dx}{dq} = h; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq} = \dfrac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dq}; \\ \dfrac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dx} = \dfrac{\dfrac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq}}{\dfrac{dx}{dq}} = \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq}. \end{cases}$$

Дифференцируется интерполяционный многочлен Ньютона по независимой переменной q:

$$f(x) = P(x_0 + h \cdot q) = y_0 + \Delta y_0 \cdot q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot q \cdot (q - 1) + \ldots;$$

$$\frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq} = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 \cdot q - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{2} \cdot q^2 - \Delta^3 y_0 \cdot q + \frac{\Delta^3 y_0}{3} =$$

$$= \Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (2q - 1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot (3q^2 - 6q + 2) + \ldots \quad .$$

Дифференцируется интерполяционный многочлен Ньютона по переменной x:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dP(x_0 + h \cdot q)}{dq} = \frac{1}{h} \cdot \left[\begin{aligned} &\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (2q - 1) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot (3q^2 - 6q + 2) + \ldots \end{aligned} \right].$$

Таким образом, получается численное дифференцирование целевого функционала $f(\overline{X})$ по k -тому проектному параметру x_k :

$$\frac{df(\overline{X})}{dx_k} = \frac{1}{h} \cdot \left[\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot (2q - 1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot (3q^2 - 6q + 2) + \ldots \right],$$

где h – шаг между узлами проектного параметра x_k интерполяции целевого функционала $f(\overline{X})$;

$$q = \frac{x_k - x_{k_0}}{h};$$

– разность целевого функционала $f(\overline{X})$ первого порядка:

$$\Delta y_0 = f(x_1, \ldots, x_{k_1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{k_0}, \ldots, x_n);$$

– разность целевого функционала $f(\overline{X})$ второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = f(x_1, \ldots, x_{k_2}, \ldots, x_n) - 2 \cdot f(x_1, \ldots, x_{k_1}, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{k_0}, \ldots, x_n);$$

– разность целевого функционала $f(\overline{X})$ третьего порядка:

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_0 = f(x_1, \ldots, x_{k_3}, \ldots, x_n) - 3 \cdot f(x_1, \ldots, x_{k_2}, \ldots, x_n) + \\ + 3 \cdot f(x_1, \ldots, x_{k_1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{k_0}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Все остальные проектные параметры вектора $\overline{X}\{x_1, \ldots, x_n\}$ равны соответствующим параметрам вектора $\overline{X}^{jk-1}\{x_1, \ldots, x_n\}$, кроме проектного параметра x_k .

Шаг 7. Задаётся шаг t_k для k -го проектного параметра.

Шаг 8. Вычисляется новый вектор параметров $\overline{X}^{jk}$

$$\overline{X}^{jk} = \overline{X}^{jk-1} + t_k \cdot \left(\frac{\partial f(\overline{X})}{\partial x_k} \right)_{\overline{X} = \overline{X}^{jk-1}}.$$

Шаг 9. Проверяется выполнение условия:

$$f\left(\overline{X}^{jk}\right) - f\left(\overline{X}^{jk-1}\right) \geq 0,$$

а) если условие выполнено, то переход к шагу 10; б) если нет, то положить шаг $t_k = \frac{t_k}{2}$ и перейти к шагу 8.

Шаг 10. Проверяется выполнение условия:

$$\left| f\left(\overline{X}^{jk}\right) - f\left(\overline{X}^{jk-1}\right) \right| < \varepsilon ,$$

а) если в двух последовательных циклах с номерами j и $(j-1)$ условие выполняется по всем проектным параметрам, то расчёт в точке $\overline{X}^{jn}$ окончен и $\overline{X}_{opt} = \overline{X}^{jn}$; б) если условие не выполнено, то положить $k = k+1$ и перейти к шагу 4.

Иллюстративный пример. По приведенным методам генетического алгоритма и градиентного покоординатного спуска проведена оптимизация вектора параметров $\overline{p}$ одноступенчатого УО со стартовой массой $m_0 = 1300$ (кг) и массой полезного груза $m_{pg} = 250$ (кг). Оптимизируемые параметры выбирались из условия максимума целевого функционала $L = L(\overline{p})$ (км) – расстояния, на которое доставляется масса полезного груза.

В качестве силовой установки на УО использовался РДТТ.

Была задана следующая аэродинамическая схема УО: головная часть, представляющая собой сочетание конической и цилиндрической форм, цилиндрический металлический корпус, с задним расположением стабилизаторов. Полная длина головной части принята равной $L_{GTH} = 2{,}5$ (м), наружный диаметр корпуса УО принят равным $D_{UO} = 0{,}4$ (м).

Активный участок траектории состоял из вертикального участка движения и участка разворота. Продолжительность вертикального участка движения принята равной $t_{vert} = 2{,}0$ (с).

Программа изменения угла тангажа на участке разворота задавалась линейной зависимостью от времени, окончание участка разворота траектории на АУТ определялось временем работы маршевого РДТТ.

Для заданных стартовой массы m_0 и массы полезного груза m_{pg} определялись относительная конечная масса μ_k и максимально возможный запас топлива на УО.

Выбирались следующие оптимизируемые параметры и диапазоны изменений их значений:

– коэффициент начальной тяговооруженности $\nu_n = (0{,}05 \div 0{,}12)$;

– угол тангажа в конце активного участка траектории $\varphi_{AUT} = 20 \div 36$ [град];

– давление в камере сгорания (КС) РДТТ $p_k = (63 \div 79)$ [кгс/см^2];

– диаметр среза сопла маршевого РДТТ $D_a = (0{,}34 \div 0{,}38)$[м];

– коэффициент прогрессивности (дегрессивности) тяги на стационарном режиме $K_{pd} = (0{,}8 \div 1{,}3)$[–].

Результаты оптимизации параметров в указанных диапазонах их применения с помощью генетического алгоритма и градиентного метода покоординатного спуска приведены в табл. 1, рис. 2. Во время отработки генетического алгоритма и градиентного метода количество расчётов целевого функционала было принято равным 200, поэтому машинное время работы этих алгоритмов тоже одинаково.

Таблица 1

Результаты оптимизации вектора проектных параметров $\overline{p}_{opt}$ с помощью генетического алгоритма и градиентного метода

Параметры	Размерность	Допустимый диапазон		Оптимальные значения $\overline{p}_{opt}$	
				генетический алгоритм	градиентный метод
P_k	кгс/см^2	63,0	79,00	77,947	78,995
D_a	м	0,34	0,38	0,377	0,380
K_{pd}	–	0,8	1,3	1,213	1,186
φ_{AUT}	град.	20	36	22,753	22,753
ν_n	-	0,05	0,12	0,109	0,11
Целевой функционал $L\left(\overline{p}_{opt}\right)$				234,894 (км)	235,632 (км)

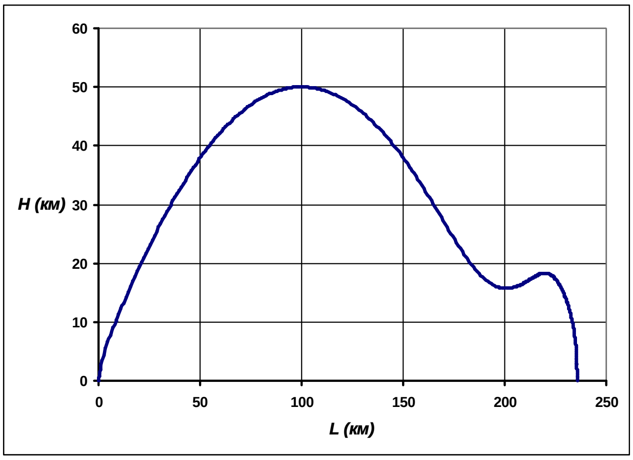

Рис. 2 – Зависимость высоты H от дальности полёта L

Выводы. Сформулирована комплексная задача оптимизации проектных параметров и программ управления движением одноступенчатого УО с маршевым РДТТ. Проведен обзор методов случайного поиска и сравнительный анализ методов случайного поиска с градиентными методами оптимизации.

Показана целесообразность проведения процесса оптимизации в два этапа: сначала генетическим алгоритмом, а затем градиентным методом покоординатного спуска в окрестности, найденного на первом этапе вектора оптимизируемых параметров. Такой подход позволяет находить вектор оптимизируемых параметров, который соответствует глобальному максимуму целевого функционала.

Приведенные алгоритмы оптимизации могут быть использованы проектными организациями на начальном этапе проектирования объектов ракетно-космической техники различного назначения.

1. *Тарасов Е. В.* Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата. М.: Машиностроение. 1970. 364 с.
2. *Разумев В. Ф., Ковалев Б. К.* Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1976. 356 с.
3. Tewari Ashish. Advanced control of aircraft, spacecraft and rockets. Kanpur: John Wiley & Sons, 2011. 456 p.

4. *Сенькин В. С., Сарычев А. П.* Выбор проектных параметров и программ управления на начальном этапе проектирования ракет-носителей. Техническая механика. 2014. № 3. С. 33–47.
5. *Сенькин В. С.* Комплексная задача оптимизации проектных параметров и программ управления твердотопливной ракеты-носителя сверхлегкого класса. Техническая механика. 2012. № 2. С. 106–121.
6. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.
7. *Алпатов А. П., Сенькин В. С.* Комплексная задача оптимизации основных проектных параметров и программ управления движением ракет космического назначения. Техническая механика. 2011. № 4. С. 98–113.
8. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах: учебник для вузов. М.: Высш. шк., 2005. 544 с.
9. *Рассел Стюарт, Норвиг Питер* Искусственный интеллект: современный подход. Пер. с англ. М. : Издательский дом «Вильямс», 2007. 1408 с.

Получено 24.05.2018,
в окончательном варианте 15.06.2018