

## Напружений стан пінистих середовищ із тунельними порожнинами при нестационарному динамічному навантаженні

В. І. Шваб'юк<sup>1</sup>, О. А. Мікуліч, В. В. Шваб'юк

Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

<sup>1</sup> V.shvabyuk@gmail.com, Shypra@ukr.net, Shvabyuk@lutsk-ntu.com.ua

*Досліджено динамічний напружений стан тіл з урахуванням моментних напружень із використанням перетворення Фур'є та методу інтегральних рівнянь. Отримані результати узгоджуються з основними принципами хвильової механіки. Розроблена методика дозволяє досліджувати нестационарні динамічні процеси у синтетичних матеріалах із порожнинами практично довільного перерізу. Вивчено вплив геометрії порожнини на розподіл динамічних напружень у пінистих середовищах.*

**Ключові слова:** нестационарна задача, моментні напруження, тунельна порожнина.

**Вступ.** На сьогодні широкий розвиток отримали експериментальні дослідження впливу температурних і механічних чинників на мікроструктуру та механічні властивості композитних матеріалів [1]. Поряд з експериментальними проводяться роботи, присвячені побудові моделей розрахунку швидкості росту дефектів у композитних матеріалах за дії імпульсних та осцилюючих навантажень [2, 3] з урахуванням пружно-пластичного деформування [4].

При дослідженні динамічних процесів у елементах конструкцій з нетрадиційних матеріалів (поліуретани, спінені поліакриламід, пінополіуретани та ін.), що достатньо широко використовуються, необхідно враховувати внутрішній момент кількості руху мікрочастинок. Процеси деформування у таких матеріалах не можна описати рівняннями класичної теорії пружності. Тому потрібно використовувати моделі середовищ, кожна матеріальна точка яких є абсолютно твердим тілом. Рівняння руху таких середовищ описуються у рамках моментної теорії пружності.

Напруження у цих матеріалах при плоскому та просторовому напружених станах визначаються за допомогою рівнянь моментної теорії пружності, що дозволяють враховувати обертально-зсувні деформації [5]. Розмірні ефекти, що виникають за різних видів навантажень у полімерних матеріалах, також можна дослідити на основі рівнянь моментної теорії пружності. Окрім того, зростання пружних характеристик при зменшенні розмірів тіла, що неможливо описати за допомогою класичної теорії пружності, можна пояснити на основі методів моментної теорії пружності.

У роботах [6, 7] та ін. для полімітакриліміду експериментально досліджено вплив мікроструктури матеріалу на його динамічну поведінку. Числовому дослідженню поширення хвильових процесів у моментних середовищах присвячено праці [8, 9], Саркісяна С. О. та ін.

Побудова аналітичних розв'язків динамічних та статичних задач щодо концентрації напружень у елементах конструкцій з поліуретанів в основному проводиться для моментного псевдоконтинуума Коссера, що дозволяє спростити розв'язання таких задач. У роботах [10–12] побудовано деякі аналітичні розв'язки двовимірних задач псевдоконтинуума Коссера для областей з циліндричними порожнинами. Аналітико-числовий підхід до дослідження напруженого стану середовищ із мікроструктурою за статичних навантажень на основі методу граничних елементів запропоновано в [13].

У роботі [14] описано аналітико-числовий підхід до дослідження концентрації напружень у ізотропних пластинках з отворами за динамічних навантажень, що базується на перетворенні Фур'є за часом, методі граничних інтегральних рівнянь, апараті теорії функції комплексної змінної. Цей підхід виявився ефективним для тіл практично довільної форми.

Метою даної роботи є розробка аналітико-числової методики дослідження розподілу напружень у середовищах, послаблених тунельними порожнинами, за дії динамічного навантаження на основі рівнянь моментної теорії пружності.

**Моделювання об'єкту дослідження.** Досліджуються елементи конструкцій, що виготовлені з пінополіуретанів. Для опису напружено-деформованого стану цих матеріалів використовуються гіпотези лінійної механіки деформівного твердого тіла з урахуванням можливості обертання мікрочастинок середовищ. Дослідження проведено на основі рівнянь руху моментного псевдоконтинуума Коссера для випадку дії динамічних навантажень. Тут кожна матеріальна точка розглядається як мале абсолютно тверде тіло, а вектори мікро- і макроповоротів збігаються [5, 12]:

$$\bar{\omega} = \text{rot } \mathbf{U} / 2,$$

де  $\mathbf{U}$  – вектор переміщення центра ваги;  $\bar{\omega}$  – вектор повороту. Зазначимо, що  $\mathbf{U}$  і  $\bar{\omega}$  є неперервними функціями.

**Постановка задачі.** Розглянемо тіло, що послаблене тунельною порожниною сталого довільного перерізу, до границі якого прикладене динамічне навантаження у вигляді осесиметричного тиску від дії пружного імпульсу (рис. 1). Дослідимо розподіл кільцевих та радіальних напружень у тілі з урахуванням обертально-зсувних деформацій мікрочастинок на основі рівнянь псевдоконтинуума Коссера.

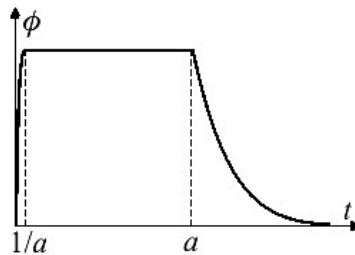


Рис. 1. Моделювання зміни інтенсивності навантаження з часом.

Граничні умови задачі записуються у вигляді

$$\sigma_r|_L = -\sigma_0\phi(t), \quad \tau_{r\theta}|_L = 0, \quad (1)$$

де  $\phi(t)$  – функція зміни навантаження;  $\sigma_0$  – стала, що залежить від інтенсивності навантаження.

За числових розрахунків зміну інтенсивності імпульсу з часом запишемо так:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ p_1 t^{n_1} e^{-\alpha_1 t} H(t), & 0 \leq t \leq \alpha_1; \\ H(t), & \alpha_1 \leq t \leq \alpha_2; \\ p_2 t^{n_2} e^{-\alpha_2 t} H(t), & t > \alpha_2, \end{cases} \quad (2)$$

де  $p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, n_1, n_2$  – сталі;  $H(t)$  – функція Хевісайда.

**Розробка методики та основні співвідношення.** Віднесемо тіло до декартової системи координат  $Oxy$ , яку розмістимо у його центрі ваги.

Рівняння руху тіла згідно з псевдоконтинуумом Коссера запишемо наступним чином [12]:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\partial_x \theta + \frac{B}{4}(\Delta \partial_x \theta - \Delta \Delta u) + \mu \Delta u + Q_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ (\lambda + \mu)\partial_y \theta + \frac{B}{4}(\Delta \partial_y \theta - \Delta \Delta v) + \mu \Delta v + Q_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\partial_x = \partial/\partial x$ ;  $\partial_y = \partial/\partial y$ ;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $v(\mathbf{x}, t)$  – переміщення;  $\theta = \partial_x u + \partial_y v$ ;  $Q_x$ ,  $Q_y$  – масові сили;  $\rho$  – густина матеріалу;  $\mu$ ,  $\lambda$  – сталі Ламе;  $B$  – стала, що відповідає мікроструктурі матеріалу,  $B = \gamma + \varepsilon$  (вимірюється у ньютонках і визначається експериментально);  $t$  – час;  $\mathbf{x} = (x, y)$ .

Вектор переміщення  $\mathbf{U} = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$  запишемо у вигляді суми потенціальної  $\varphi$  та вихрової  $\psi$  функцій:

$$\mathbf{U} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \tilde{\psi},$$

причому

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Підставимо залежності для переміщень у рівняння (3) і отримаємо два рівняння гіперболічного та параболічного типу:

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad l^2 \Delta \Delta \psi - \Delta \psi + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

де  $c_1, c_2$  – швидкість хвиль розширення і зсуву,  $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ .

З останнього рівняння (4) видно, що у моментному псевдоконтинуумі Коссера хвилі зсуву та хвилі поперечного обертання мають дисперсійні властивості і утворюють хвилі зсуву–обертання, подібно до випадку класичного континуума Коссера [9].

Аналогічно [14] для розв’язку нестационарної задачі використаємо перетворення Фур’є за часовою змінною  $t$ :

$$\tilde{f}(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-i\omega t} dt; \quad f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (5)$$

де  $\omega$  – частота.

Застосуємо перетворення Фур’є (5) до рівнянь (4) і аналогічно [12] отримаємо

$$\Delta \tilde{\varphi} + \frac{\omega^2}{c_1^2} \tilde{\varphi} = 0; \quad \Delta \tilde{\Psi} + \frac{\omega^2}{c_3^2} \tilde{\Psi} = 0; \quad \Delta \tilde{\Phi} - \frac{\omega^2}{c_4^2} \tilde{\Phi} = 0, \quad (6)$$

причому

$$\tilde{\psi} = \tilde{\Psi} + \tilde{\Phi},$$

де  $c_3^2 = \frac{c_2}{2}(\sqrt{c_2^2 + 4l^2\omega^2} + c_2)$ ;  $c_4^2 = \frac{c_2}{2}(\sqrt{c_2^2 + 4l^2\omega^2} - c_2)$ ;  $l$  – масштабний фактор, що має розмірність довжини та залежить від мікроструктури матеріалу,  $l^2 = B/(4\mu)$ .

Із (6) видно, що швидкість хвилі розширення не впливає на моментні напруження. При  $l \rightarrow 0$  швидкість однієї з хвиль  $c_3$  прямує до  $c_2$ , а інша з уявним хвильовим числом  $\omega/(ic_4)$  зникає. Тобто, коли вплив мікроструктури матеріалу є настільки малим, що ним можна знехтувати, результати розрахунків збігаються з класичною теорією пружності для ізотропних матеріалів.

**Розробка алгоритму розв'язку задачі.** Для розв'язку задачі щодо концентрації динамічних напружень на границі порожнин та отворів у псевдоконтинуумі Коссера використаємо метод граничних інтегральних рівнянь. Застосуємо перетворення Фур'є (5) до рівнянь (3):

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\partial_x \tilde{\theta} + \frac{B}{4} \Delta \partial_x \tilde{\theta} - \frac{B}{4} \Delta \Delta \tilde{u} + \mu \Delta \tilde{u} + \tilde{Q}_x + \rho \omega^2 \tilde{u} &= 0; \\ (\lambda + \mu)\partial_y \tilde{\theta} + \frac{B}{4} \Delta \partial_y \tilde{\theta} - \frac{B}{4} \Delta \Delta \tilde{v} + \mu \Delta \tilde{v} + \tilde{Q}_y + \rho \omega^2 \tilde{v} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

і отримаємо рівняння, еквівалентні рівнянням усталених коливань із циклічною частотою  $\omega$ , де  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{Q}_x$ ,  $\tilde{Q}_y$  – Фур'є-зображення переміщень і масових сил, що знаходяться на основі залежностей (5).

Виокремивши вплив часового фактора за допомогою інтегрального перетворення Фур'є, подальші дослідження будемо проводити в області Фур'є-зображень.

Застосуємо перетворення (5) до граничних умов (1) і отримаємо

$$\tilde{\sigma}_r|_L = -\sigma_0 \tilde{\phi}(\omega), \quad \tilde{\tau}_{r\theta}|_L = 0, \quad (8)$$

де  $\tilde{\phi}(\omega)$  – зображення функції (2).

Для першої основної задачі потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень виберемо у вигляді [15]

$$\tilde{\mathbf{U}} = \int_L \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{U}} ds, \quad (9)$$

де  $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0, \omega) = (p_x, p_y)$  – невідомі комплексні потенціальні функції;  $\hat{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0, \omega) = \begin{pmatrix} \hat{U}_{xx} & \hat{U}_{yx} \\ \hat{U}_{xy} & \hat{U}_{yy} \end{pmatrix}$  – фундаментальний тензор;  $L$  – границя області. Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ ,  $\mathbf{x}^0$  – довільна точка тіла.

При побудові виразів для фундаментального тензора  $\hat{\mathbf{U}}$  псевдоконтинуума Коссера необхідно врахувати умови Зоммерфельда [15]. Запишемо цей тензор у вигляді суми складових для класичної теорії пружності  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{кл}}$  та додаткових моментних компонент  $\hat{\mathbf{U}}_{\text{м}}$ , що визначають вплив мікроструктури матеріалу:

$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}_{\text{кл}} + \hat{\mathbf{U}}_{\text{м}}. \quad (10)$$

Відповідно до [16] для неусталених хвильових процесів класичної теорії пружності  $\hat{U}_{\text{кл}jk}$  записується у вигляді

$$\hat{U}_{\text{кл}jk} = \frac{1}{2\pi\mu} \left( K_0(\kappa_2 r) \delta_{jk} + \frac{1}{\kappa_2^2} \partial_k \partial_j ((-1)^{m-1} K_0(\kappa_m r)) \right), \quad (11)$$

де  $\kappa_m = i\omega/c_m$  – хвильові числа,  $m = 1, 2$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ;  $K_0(r)$  – модифікована функція Бесселя третього роду нульового порядку (або функція Макдональда);  $r$  – відстань від досліджуваної точки до границі,  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$ ;  $j, k \rightarrow \{x, y\}$ .

Для визначення моментних складових  $\hat{U}_{mjk}$  продиференціюємо перше рівняння (7) по  $x$ , а друге – по  $y$  та додамо їх. У результаті отримаємо рівняння Гемгольца для  $\theta$ :

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) \tilde{\theta} = - \frac{1}{\rho c_1^2} \partial_j Q_j,$$

звідки

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2\pi\rho c_1^2} \partial_j K_0(\kappa_1 r).$$

Підставимо залежність (10) з урахуванням представлень (11) у рівняння (7) та проведемо відповідні спрощення:

$$\hat{U}_{mjk} = - \frac{D}{2\pi\mu} \Delta(\Delta\delta_{jk} - \partial_k\partial_j) D_{m_1} K_0(\kappa_{m_1} r),$$

де

$$D_{m_1} = \left( \frac{1}{\kappa_{m_1}^2 - \kappa_3^2} - \frac{1}{\kappa_{m_1}^2 - \kappa_4^2} \right) \delta_{m_1 2} - \frac{\delta_{m_1 3}}{\kappa_{m_1-1}^2 - \kappa_{m_1}^2} + \frac{\delta_{m_1 4}}{\kappa_{m_1-2}^2 - \kappa_{m_1}^2}; \quad m_1 = 2, 3, 4;$$

$$D = \frac{1}{\kappa_3^2 - \omega_4^2}.$$

Для визначення невідомих потенціальних функцій  $p_1, p_2$  розрахуємо напруження за такими формулами [12]:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + e^{-2i\theta} \frac{\sigma_x - \sigma_y + i(\tau_{xy} + \tau_{yx})}{4} + e^{2i\theta} \frac{\sigma_x - \sigma_y - i(\tau_{xy} + \tau_{yx})}{4}; \\ \tilde{\tau}_{r\theta} &= \frac{\tau_{xy} - \tau_{yx}}{2} + ie^{2i\theta} \frac{\sigma_x - \sigma_y - i(\tau_{xy} + \tau_{yx})}{4} - ie^{-2i\theta} \frac{\sigma_x - \sigma_y + i(\tau_{xy} + \tau_{yx})}{4}, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\theta$  – кут між нормаллю  $\vec{n}$  до площинки та віссю  $Ox$ .

Підставимо потенціальне зображення (9) з урахуванням (10) у формули (12) і отримаємо інтегральні залежності:

$$\tilde{\sigma}_r = \int_L (f_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j) ds; \quad \tilde{\tau}_{r\theta} = \int_L (g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j) ds. \quad (13)$$

Тут  $f_j, g_j$  – відомі функції, до яких входять функції Бесселя третього роду, в операторному вигляді записуються так:

$$f_j = \frac{1}{2\pi} \left( \chi_1^{(j)} K_0(\kappa_2 r) + \frac{1}{\kappa_2^2} \chi_2^{(j)} ((-1)^{m-1} K_0(\kappa_m r)) + D \chi_3^{(j)} (D_l K_0(\kappa_l r)) \right);$$

$$g_j = \frac{i}{2\pi} \left( \beta_1^{(j)} K_0(\kappa_2 r) + \frac{1}{\kappa_2^2} \beta_2^{(j)} ((-1)^{m-1} K_0(\kappa_m r)) + D\beta_3^{(j)} (D_l K_0(\kappa_l r)) \right);$$

$$\chi_1^{(1)} = (1 + e^{2i\theta}) \partial_z + (1 + e^{-2i\theta}) \partial_{\bar{z}} + \lambda / \mu \partial_1;$$

$$\chi_1^{(2)} = i((1 - e^{2i\theta}) \partial_z - (1 - e^{-2i\theta}) \partial_{\bar{z}} + \lambda / \mu \partial_2);$$

$$\chi_2^{(1)} = \partial_1 ((1 + \lambda / \mu) \Delta + 2(e^{2i\theta} \partial_z^2 + e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2));$$

$$\chi_2^{(2)} = \partial_2 ((1 + \lambda / \mu) \Delta + 2(e^{2i\theta} \partial_z^2 + e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2));$$

$$\chi_3^{(1)} = -2i \partial_2 \Delta (e^{-2i\theta} \partial_z^2 - e^{2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2);$$

$$\chi_3^{(2)} = 2i \partial_1 \Delta (e^{2i\theta} \partial_z^2 - e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2);$$

$$\beta_1^{(1)} = e^{2i\theta} \partial_z - e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}; \quad \beta_1^{(2)} = -i(e^{2i\theta} \partial_z + e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}});$$

$$\beta_2^{(1)} = 2\partial_1 (e^{2i\theta} \partial_z^2 - e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2); \quad \beta_2^{(2)} = 2\partial_2 (e^{2i\theta} \partial_z^2 - e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2);$$

$$\beta_3^{(1)} = \Delta \partial_2 (-B / (2\mu) \Delta \Delta - 2i(e^{2i\theta} \partial_z^2 + e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2));$$

$$\beta_3^{(2)} = \partial_1 \Delta (B / (2\mu) \Delta \Delta + 2i(e^{2i\theta} \partial_z^2 + e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2)),$$

де  $\partial_z = \partial/\partial z$ ;  $\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial \bar{z}$ ;  $z = x_1 + ix_2$ ;  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ .

Враховуючи, що підінтегральні функції  $f_j$ ,  $g_j$  при малих значеннях аргументу є нерегулярними, для функцій Бесселя третього роду використовуємо асимптотичні вирази [17]:

$$K_0(r) = \ln 2 - \ln r - \gamma + \frac{1}{4} (\ln 2 - \ln r - \gamma - 1) r^2 + O(r^3),$$

де  $\gamma$  – ейлерова константа.

Виділимо нерегулярні складові у підінтегральних функціях  $f_j$ ,  $g_j$  та за допомогою формул Племеля–Сохоцького [12, 15] при граничному переході у залежностях (13) отримаємо систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(q) / 2 + \mathbf{v. p.} \int_L (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}) = \tilde{\sigma}; \\ \operatorname{Im}(q(1 - (l/c_2)^2)) / 2 + \mathbf{v. p.} \int_L (g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + g_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \bar{q} d\bar{\zeta}) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

де  $q = i \cdot p ds / d\zeta$ ;  $p = p_1 + ip_2$  – невідома функція;  $\zeta = x_1^0 + ix_2^0$ . Тут під інтегралами будемо розуміти їх головні значення.

**Результати числових досліджень.** Для знаходження невідомих на границі функцій  $p_1$ ,  $p_2$  систему інтегральних рівнянь (14) розв'язуватимемо числово методом механічних квадратур та колокації. До інтегралів, що мають особливості типу Коші, застосуємо уточнені квадратурні формули. Для визначення значень невідомих на границі функцій  $p_1$ ,  $p_2$  одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(q_s) / 2 + h \sum_{n=1}^N f_1(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_n^0) q_n \xi'_n + h \sum_{n=1}^N f_2(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_n^0) \bar{q}_n \bar{\xi}'_n = \tilde{\sigma}_s; \\ \operatorname{Im}(q_s (1 - (l/c_2)^2)) / 2 + h \sum_{n=1}^N g_1(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_n^0) q_n \xi'_n + h \sum_{n=1}^N g_2(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_n^0) \bar{q}_n \bar{\xi}'_n = 0, \end{cases}$$

де  $\xi_n = \xi(\vartheta_n)$ ;  $\vartheta_n = hn$ ;  $h = 2\pi/N$ ;  $\xi(\vartheta)$  – параметричне задання границі області  $L$ ;  $N$  – кількість вузлових точок.

Параметр  $\vartheta$  вибирається на основі нелінійного перетворення Сіді [18] так, щоб при обході вздовж границі область залишалася зліва. Використання такого підходу виявилось ефективним при дослідженні напруженого стану пластинок із розрізами за усталених коливань [19].

**Розрахунок динамічних кільцевих напружень на границі.** Для розрахунку зображень кільцевих напружень на границі використовуємо формули [12]

$$\tilde{\sigma}_\theta = (\sigma_x + \sigma_y) / 2 - (e^{-2i\theta} (\sigma_x - \sigma_y + i(\tau_{xy} + \tau_{yx})) + e^{2i\theta} (\sigma_x - \sigma_y - i(\tau_{xy} + \tau_{yx}))) / 4,$$

які при підстановці у них потенціального зображення (6) в операторному вигляді запишемо так:

$$\tilde{\sigma}_\theta = \int_L (h_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j) ds, \quad (15)$$

де

$$h_j = \frac{1}{2\pi} \left( \zeta_1^{(j)} K_0(k_2 r) + \frac{1}{k_2^2} \zeta_2^{(j)} ((-1)^{m-1} K_0(\kappa_m r)) + D_{\zeta_3}^{(j)} (D_l K_0(\kappa_l r)) \right);$$

$$\zeta_1^{(1)} = (1 - e^{2i\theta}) \partial_z + (1 - e^{-2i\theta}) \partial_{\bar{z}} + \lambda / \mu \partial_1;$$

$$\zeta_1^{(2)} = i((1 + e^{2i\theta}) \partial_z - (1 + e^{-2i\theta}) \partial_{\bar{z}}) + \lambda / \mu \partial_2;$$

$$\zeta_2^{(1)} = \partial_1 (\Delta(1 + \lambda / \mu) - 2(e^{2i\theta} \partial_z^2 + e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2));$$

$$\zeta_2^{(2)} = \partial_2 (\Delta(1 + \lambda / \mu) - 2(e^{2i\theta} \partial_z^2 + e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2)).$$

$$\zeta_3^{(1)} = -2i \partial_2 \Delta (e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 - e^{2i\theta} \partial_z^2); \quad \zeta_3^{(2)} = -2i \partial_1 \Delta (e^{2i\theta} \partial_z^2 - e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2).$$

Виділимо нерегулярні складові у (15) та виконаємо граничний перехід на основі формул Племеля–Сохоцького [12, 15]. У результаті отримаємо залежності для розрахунку зображень кільцевих напружень на границі:

$$\tilde{\sigma}_\theta = \frac{\nu}{2} \operatorname{Re}(q) + \mathbf{v. p.} \int_L (h_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\zeta + h_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) q d\bar{\zeta}).$$

Зображення радіальних динамічних напружень у тілі визначаються за формулами

$$\tilde{\sigma}_r = \mathbf{v. p.} \int_L f_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) p_j ds.$$

Для визначення динамічних напружень їх оригінали розрахуємо на основі дискретного оберненого перетворення Фур'є:

$$\sigma(T_k) = \frac{2}{T} \operatorname{Re} \left( \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{\sigma}(\omega_n) \exp\left(2\pi i \frac{nk}{K}\right) - \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{\sigma}(\omega_n) \right), \quad (16)$$

де  $K$  – кількість елементів дискретної вибірки;  $\omega_n = 2\pi n/T$  – частоти вибірки;  $T_k = kT/K$ ;  $k = 0, \dots, K-1$  – фіксовані моменти часу.

Використання дискретного оберненого перетворення Фур'є (16) при визначенні оригіналів кільцевих напружень дає можливість отримати достовірні значення для усіх наперед фіксованих моментів часу, а не для половини з них, як у випадку застосування виключно дискретного перетворення Фур'є.

**Оцінка достовірності розробленої методики.** Точність даного підходу перевіряємо при порівнянні отриманих за допомогою розробленої методики значень відносних динамічних напружень для нескінченної ізотропної пластини, послабленої круговим отвором, із відомими даними для випадку плоского напруженого стану (рис. 2). Числові розрахунки виконаємо для безрозмірного масштабного фактора  $\bar{l} = l/a$  та безрозмірного часового параметра  $\bar{t} = tc_1/a$ , де  $a$  – деякий характерний розмір. При цьому враховувалося, що середній розмір зерна для сталі 20 становить 25 мкм. За числових розрахунків навантаження, яке прикладене до границі отвору у пластині, задавалося у вигляді (9) при  $p_1 = 272$ ,  $p_2 = 0,272$ ,  $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 0,1$ ,  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$ .

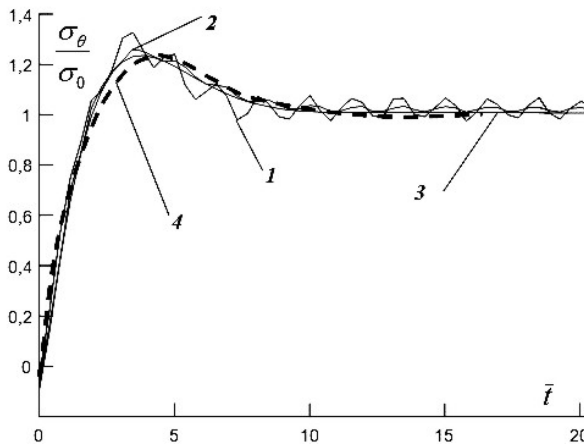


Рис. 2. Розподіл відносних динамічних кільцевих напружень на границі кругового отвору, отриманий на основі розробленої методики: 1 –  $\bar{l} = 2,5$ ; 2 –  $\bar{l} = 0,025$ ; 3 –  $\bar{l} = 0,0025$ ; 4 – дані, наведені у [20].

Із рис. 2 видно, що при  $\bar{l} \rightarrow 0$  відносні динамічні напруження, розраховані на основі рівнянь моментного псевдоконтинуума Коссера, збігаються з розрахованими за класичною теорією для ізотропних тіл [20], що узгоджується з попередніми викладками. Отримані розрахунки підтверджують точність та ефективність запропонованої аналітико-числової методики.

**Розрахунок динамічних напружень у поліуретанових тілах.** На основі розробленого підходу дослідимо зміну з часом відносних кільцевих та радіальних напружень у пружному піністому тілі з тунельною циліндричною порожниною радіуса  $R$ , до границі якого прикладене динамічне навантаження (9). На рис. 3 наведено результати числових розрахунків для пінополіуретану високої міцності [6]



(густина  $\rho = 0,34 \text{ г/см}^3$ , модуль Юнга  $E = 300 \text{ МПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,44$ ,  $B = 44,5 \text{ Н}$ ), пінистого поліуретану WF 300 [7] ( $\rho = 0,38 \text{ г/см}^3$ ,  $E = 637 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0,13$ ,  $B = 676 \text{ Н}$ ) та синтетичного поліуретану [8] ( $\rho = 0,59 \text{ г/см}^3$ ,  $E = 2,768 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,34$ ,  $B = 4,23 \text{ Н}$ ). Розрахунок напружень проводився у  $N = 80$  вузлових точках. Оригінали відносних динамічних напружень визначалися для  $K = 2^{10}$  елементів дискретної вибірки. Числовий розрахунок здійснювався на основі алгоритму швидкого перетворення Фур'є.

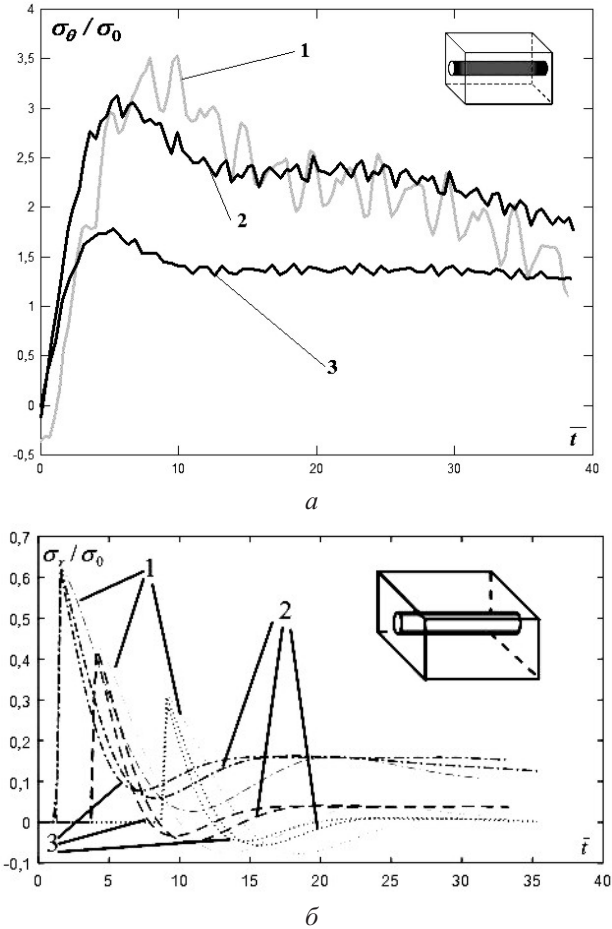


Рис. 3. Розподіл відносних динамічних кільцевих напружень на границі циліндричної порожнини – *a* та радіальних напружень у перерізах, віддалених на відстань  $2,5R$  (штрихпунктирні лінії),  $5R$  (штрихові лінії),  $10R$  (пунктирні лінії) – *б*: 1 – пінополіуретан високої міцності; 2 – пінистий поліуретан; 3 – синтетичний поліуретан.

Як видно з рис. 3, *a*, розподіл відносних динамічних кільцевих напружень має коливний характер, що пояснюється впливом мікроструктури матеріалу та підтверджує результати експериментальних досліджень [6, 7]. Зі збільшенням густини та пружних характеристик поліуретанів коливний характер розподілу напружень зменшується.

Достовірність запропонованої методики підтверджує те, що радіальні напруження є нульовими до моменту досягнення хвилею відповідного перерізу тіла. Із рис. 3, *б* видно, що у віддалених від границі порожнини точках проходження хвилі пов'язано з

наявністю у тілі як полів розтягувальних, так і стискальних напружень, що узгоджується з основними принципами хвильової механіки. Числові розрахунки показують, що для випадку порожнини кругового перерізу відсутній вплив обертально-зсувних деформацій, що пов'язані з мікроструктурою матеріалу, на зміну відносних радіальних напружень у тілі. Згідно з числовими розрахунками у віддалених на відстані  $10R$  перерізах динамічні радіальні напруження зменшуються у 3,3 раза порівняно з відповідними напруженнями на границі порожнини.

Перевага запропонованої методики полягає у можливості дослідження динамічного напруженого стану тіл із порожнинами практично довільного перерізу, де розподіл напружень нерівномірний вздовж границі. На основі розвинутого аналітико-числового алгоритму дослідимо вплив форми перерізу порожнини тіла на розподіл відносних напружень за дії динамічного навантаження. Результати розрахунків динамічних кільцевих та радіальних напружень у синтетичному пінополіуретані, що послаблений тунельною еліптичною порожниною з відношенням півосей перерізу 2, наведено на рис. 4. Числові розрахунки виконано у  $N = 128$  вузлових точках на границі перерізу порожнини та для  $K = 2^{11}$  елементів дискретної вибірки в оберненому перетворенні Фур'є.

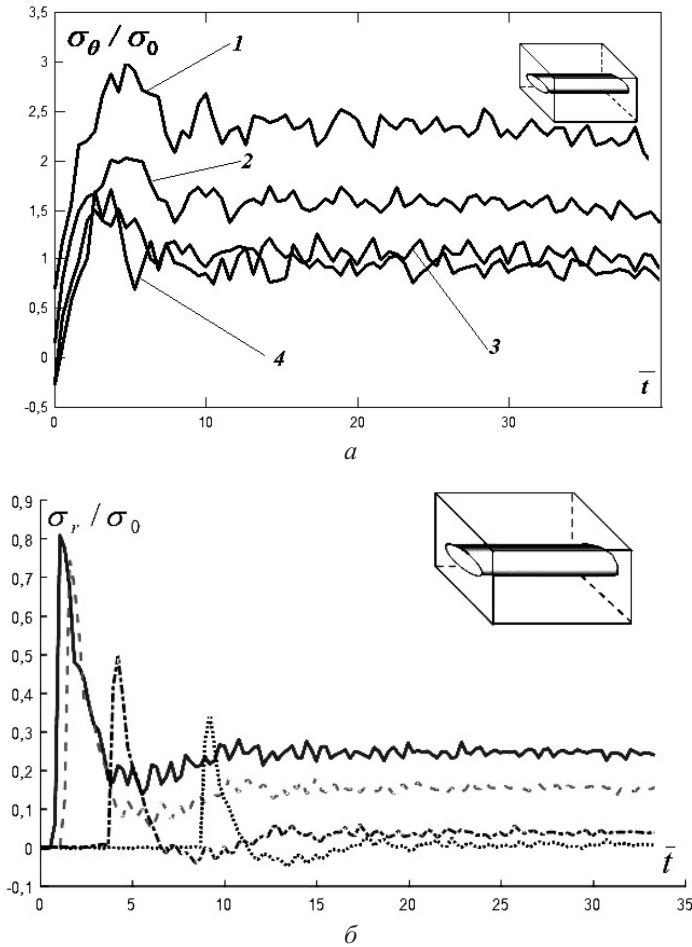


Рис. 4. Розподіл відносних динамічних кільцевих напружень на границі еліптичної порожнини ( $1 - \vartheta = 0^\circ$ ;  $2 - \vartheta = 30^\circ$ ;  $3 - \vartheta = 60^\circ$ ;  $4 - \vartheta = 90^\circ$ ) –  $a$  та радіальних напружень у тілі в перерізах, віддалених на відстані  $2b$  (суцільна лінія),  $2,5b$  (штрихова лінія),  $5b$  (штрихпунктирна лінія),  $10b$  (пунктирна лінія) від центра порожнини –  $b$ .

Із рис. 4,а видно, що розподіл відносних динамічних кільцевих напружень у всіх точках границі має коливний характер, що є наслідком впливу обертально-зсувних деформацій. Максимальні значення напружень виникають у точках великої піввісі перерізу, де кільцеві напруження в 1,76 раза вищі за відповідні значення, які виникають у точках малої піввісі.

Після проходження фронту хвилі у віддалених від центра порожнини перерізах виникають стискальні напруження з подальшим їх затуханням (рис. 4,б). У близьких до порожнини перерізах динамічні радіальні напруження мають коливний характер та є знакосталими, що пов'язано з тривалістю динамічного імпульсу. Числові розрахунки показують, що вплив геометрії порожнини на затухання динамічних радіальних напружень незначний. У віддалених на відстані  $10b$  перерізах вони зменшуються у три рази порівняно з відповідними напруженнями на границі порожнини.

## Висновки

1. Запропонована аналітико-числова методика дослідження нестационарних динамічних процесів у синтетичних матеріалах із мікроструктурою ґрунтується на використанні інтегрального і дискретного перетворення Фур'є та методу інтегральних рівнянь. Побудовані функції впливу для псевдоконтинуума Коссера дають можливість досліджувати хвильові процеси, що описуються швидкозмінними функціями.

2. Точність запропонованого підходу забезпечується завдяки використанню дискретного перетворення лише на етапі пошуку оригіналів динамічних напружень і збігу отриманих результатів із відомими даними для ізотропних тіл.

3. На основі числових розрахунків встановлено, що при зростанні відношення півосей еліптичної порожнини відбувається концентрація динамічних кільцевих напружень в околі точок великої піввісі: для випадку відношення півосей 5 і 10 максимальне значення відносних кільцевих напружень збільшується у 3,81 і 6,53 раза відповідно порівняно з випадком кругової порожнини.

4. При подальшому зростанні відношень півосей еліптичної порожнини можливий контакт відповідних границь внаслідок коливного характеру динамічних напружень, тому при аналітико-числових розрахунках необхідно враховувати також вплив контактних напружень, що при цьому виникають.

## Резюме

Исследовано динамическое напряженное состояние тел с учетом моментных напряжений при использовании преобразования Фурье и метода интегральных уравнений. Полученные результаты согласуются с основными принципами волновой механики. Разработанная методика позволяет исследовать нестационарные динамические процессы в синтетических материалах с полостями практически произвольного сечения. Изучено влияние геометрии полости на распределение динамических напряжений в пенистых средах.

1. Харченко В. В., Макаев А. Г., Каток О. А. та ін. Експериментальне дослідження механічної поведінки матеріалів методом продавлювання дискових мікроразривів // Пробл. прочності. – 2015. – № 3. – С. 32–38.
2. Степанов Г. В., Харченко В. В., Котляренко А. А., Бабуцкий А. И. Влияние обработки импульсным магнитным полем на сопротивление разрушению образца с трещиной // Там же. – 2013. – № 2. – С. 46–57.
3. Синенко Е. А., Зиньковский А. П. Влияние места приложения вынуждающей силы на амплитудный спектр изгибных колебаний стержня с дышащей трещиной // Там же. – 2015. – № 4. – С. 51–60.

4. Горик А. В., Зиньковский А. П., Черняк Р. Е., Брикун А. Н. Упругопластическое деформирование поверхностного слоя машиностроительных конструкций при дробеструйной обработке // Там же. – 2016. – № 5. – С. 74–83.
5. Эринген А. К. Теория микрополярной упругости // Разрушение. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 646–751.
6. Anderson W. B. and Lakes R. S. Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed-cell polymethacrylimide foam // J. Mater. Sci. – 1994. – 29. – P. 6413–6419.
7. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum Models for Materials with Microstructure / Ed. by H.-В. Mühlhaus. – Wiley, 1995. – Ch. 1. – P. 1–22.
8. Садовский В. М., Садовская О. В., Варыгина М. П. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах // Вычислит. механика сплошных сред. – 2009. – 2, № 4. – С. 111–121.
9. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд. Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
10. Туан Л. Т., Тарлаковский Д. В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // Физика сплошных сред. – 2013. – 5, № 1. – С. 119–125.
11. Шардаков И. Н., Кулеш М. А. Построение и анализ некоторых точных аналитических решений двумерных упругих задач в рамках континуума Коссера // Математ. моделирование систем и процессов. – 2001. – № 9. – С. 187–201.
12. Савин Г. Н., Шульга Н. А. Динамическая плоская задача моментной теории упругости // Прикл. механика. – 1967. – 3, вып. 6. – С. 216–221.
13. Hadjesfandiari A. R. and Dargush G. F. Boundary element formulation for plane problems in couple stress elasticity // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2011. – 89. – P. 618–636.
14. Mikulich O. A. and Shvabyuk V. I. Interaction of weak shock waves with rectangular meches in plates // Odes'kyi Politehnychnyi Universytet. Pratsi. – 2016. – Issue 2 (49). – P. 104–110.
15. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 560 с.
16. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
17. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 486 с.
18. Sidi A. Extension of a class of periodizing variable transformations for numerical integration // Math. Comput. – 2006. – 75, No. 253. – P. 327–343.
19. Shvabyuk V., Sulym H., and Mikulich O. Stress state of plate with incisions under the action of oscillating concentrated forces // Acta Mech. Automat. – 2015. – 9, No. 3. – P. 140–144.
20. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 308 с.

Поступила 27. 03. 2017