

Вероятностное распределение длины трещин при множественном разрушении

С. Р. Игнатович¹, В. С. Краснопольский

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

¹ ignatovich@nau.edu.ua

На основании экспериментальных закономерностей образования и роста усталостных трещин в плоском образце с множественными концентраторами предлагается модель, описывающая распределение длины трещин. Плотность такого распределения соответствует распределению Парето и может быть использована для описания накопления рассеянных дефектов в широком диапазоне масштабных уровней растрескивания. Обоснованы критические значения показателя степени в функции распределения Парето, которые отвечают предельным состояниям множественного разрушения твердых тел.

Ключевые слова: множественное разрушение, образование и рост усталостных трещин, распределение длины трещин, слияние трещин.

Введение. Соотношение между количеством и размерами дефектов сплошности является фундаментальной характеристикой поврежденности твердых тел при множественном разрушении. Данное соотношение в виде статистического распределения размера трещин широко используется для построения моделей разрушения твердых тел и решения многих проблемных задач по прогнозированию несущей способности реальных конструкций.

В работах [1, 2] установлено подобие эмпирических зависимостей количества дефектов n от их размера a в самом широком диапазоне масштабов повреждаемости – от микронного размерного уровня до масштабов разрушения земной коры. Например, стадийность поврежденности области пластической деформации перед вершиной растущей трещины характеризуется изменением распределения размеров рассеянных микродефектов от экспоненциального типа ($n \propto \exp(-a)$) до степенного ($n \propto a^{-\gamma}$) [3]. На основании гипотезы о подобии множественного разрушения показатель γ степенного (гиперболического) распределения микродефектов связывают с показателем b обобщенной функции Гуттенберга–Рихтера, описывающей зависимость количества сейсмических событий от их энергии [3, 4]. Параметр b является диагностическим параметром тектонических событий – перед землетрясением его величина уменьшается. Такое же явление характерно для разрушения металлических материалов с рассеянными трещинами [3].

С использованием статистического распределения размера дефектов решаются многие задачи, связанные с прогнозированием ресурса конструкций, вероятностной оценкой их прочности и надежности. Например, если предельное состояние конструкции с трещинами наступает по достижении одной из них предельно допустимой длины a_* , то функция распределения ресурса T такой конструкции определяется соотношением $F(T) = 1 - P(a_*, T)$, где $P(a, t)$ – вероятность того, что в момент времени t в конструкции нет ни одной трещины длиной больше a (функция распределения длины трещин) [5].

Информация о распределении размера дефектов позволяет решать задачи по оценке надежности их обнаружения при неразрушающем контроле конструкций [6], а также является базовой при прогнозировании объединения рассеянных на поверхности трещин в условиях множественного разрушения [7, 8].

Частным случаем множественного разрушения является усталостное многоочаговое повреждение (MSD) заклепочных соединений авиационных конструкций. Учитывая, что количество очагов разрушения – отверстий под заклепки – большое, а также что природа образования и роста дефектов случайная, в качестве характеристики поврежденного состояния предлагается использовать статистическое распределение длины усталостных трещин [9]. Соответствующее распределение можно получить на основании результатов контроля технического состояния конструкций, объем которых, однако, весьма ограничен.

Необходимо отметить, что теоретическое обоснование распределения размера дефектов при множественном разрушении является проблемной задачей. В настоящей работе предлагается модель, описывающая стохастичность размеров усталостных трещин с учетом закономерностей их случайного образования и роста.

Результаты экспериментальных исследований. Для построения модели воспользуемся данными экспериментального исследования усталостного разрушения образцов с множественными концентраторами в виде отверстий [10].

Испытывались плоские образцы из листового алюминиевого сплава Д16АТ толщиной 1,5 мм, в которых имелось 14 отверстий диаметром 4 мм, расположенных в три ряда. Расстояние между центрами отверстий равно 20 мм. Образцы нагружались циклическим растяжением ($R = 0$) с частотой 11 Гц при трех значениях максимального номинального напряжения цикла: 80, 100 и 120 МПа. Методика регистрации и измерения размеров трещин, которые развивались из отверстий, изложена ранее [10].

Рост трещин. Максимальная длина исследуемых трещин ограничивалась размером переемычки между краями отверстий, составляющим 16 мм. В данном размерном диапазоне зависимость длины трещин a от числа циклов нагружения N в полулогарифмических координатах (рис. 1) может быть описана линейной функцией вида

$$\ln a = p + hN, \quad (1)$$

где p и h – коэффициенты регрессии.

Всего исследовалось поведение 55 трещин на трех образцах для каждого режима циклического нагружения. Рост каждой трещины хорошо описывается зависимостью (1). Усредненный по всем трещинам коэффициент детерминации составляет: $R^2 = 0,9947$ для 13 трещин при $\sigma_{\max} = 80$ МПа; $R^2 = 0,9914$ для 23 трещин при $\sigma_{\max} = 100$ МПа и $R^2 = 0,9926$ для 19 трещин при $\sigma_{\max} = 120$ МПа.

Для начальной трещины $a_0 = 1$ мм из (1) следует

$$p = -hN_0, \quad (2)$$

где N_0 – число циклов до образования начальной трещины.

Подставив соотношение (2) в уравнение (1), получим

$$a = \exp[h(N - N_0)]. \quad (3)$$

Коэффициент h определяет скорость роста трещины от ее длины ($da/dN = ha$) и является функцией действующего напряжения. Отметим, что экспоненциальный рост усталостных трещин на начальной стадии распространения характерен для многих материалов [11], в том числе и для авиационных конструкций из алюминиевых сплавов [12, 13].

При фиксированном уровне действующего напряжения коэффициент h задает случайную траекторию роста трещины и, следовательно, является случайной вели-

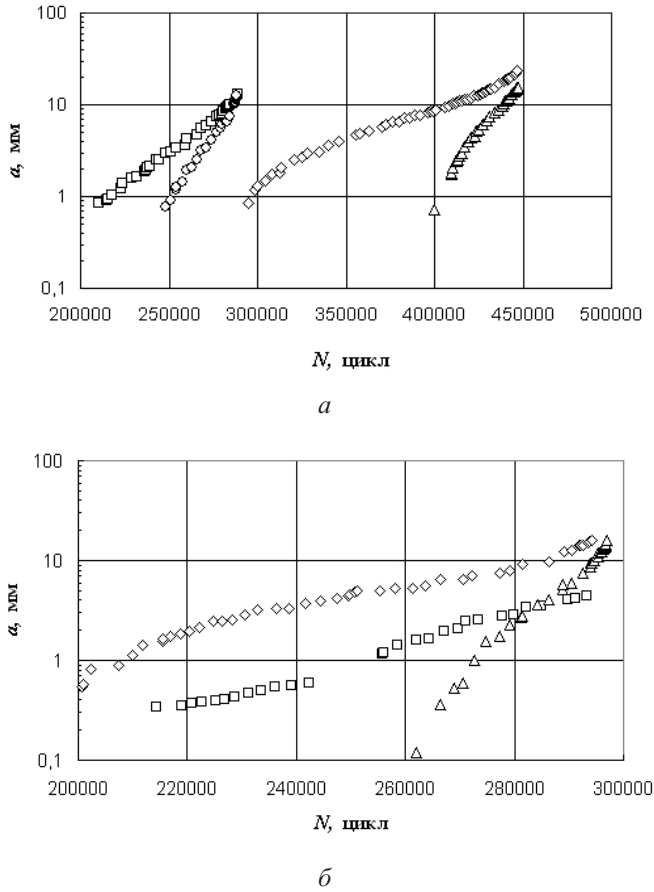


Рис. 1. Типичные зависимости длины трещин от числа циклов нагружения при разных значениях максимального напряжения в цикле: *a* – $\sigma_{\max} = 80$ МПа; *b* – $\sigma_{\max} = 100$ МПа.

чиной. Для статистических выборок исследуемых трещин на каждом уровне действующих напряжений распределение значений данного коэффициента удовлетворительно описывается равномерным законом с плотностью распределения

$$f(h) = \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}}, \quad (4)$$

где h_{\min} и h_{\max} – границы интервала возможных значений коэффициента h ($h \in [h_{\min}, h_{\max}]$).

Согласно экспериментальным данным значения h_{\max} с увеличением максимального напряжения в цикле не изменяются, а h_{\min} возрастают (рис. 2). Это свидетельствует об уменьшении доли “медленных” трещин при повышении нагрузки, в результате чего увеличивается среднее значение коэффициента h (рис. 2).

Образование трещин. Ограничим размер начальных трещин значением $a_0 = 1$ мм. Это означает, что трещины длиной $a < 1$ мм в последующем анализе не учитываются. Из соотношения (2) следует

$$N_0 = -\frac{p}{h}. \quad (5)$$

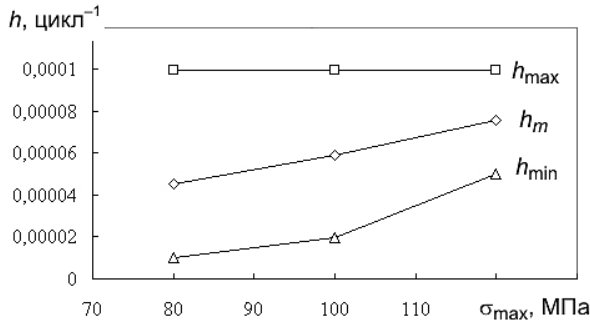


Рис. 2. Изменение максимального (h_{\max}), минимального (h_{\min}) и среднего (h_m) значений коэффициента h в зависимости от максимального напряжения в цикле σ_{\max} .

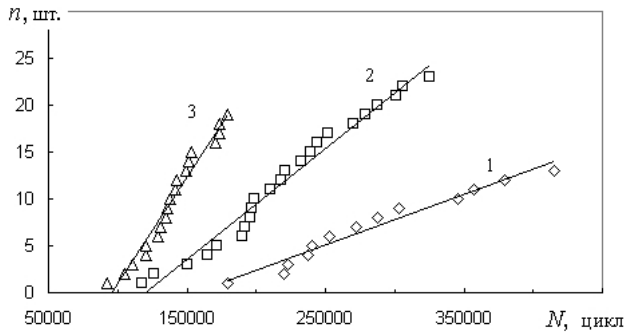


Рис. 3. Зависимость количества трещин в образцах от числа циклов нагружения при разных значениях максимального напряжения в цикле: 1 – $\sigma_{\max} = 80$ МПа; 2 – $\sigma_{\max} = 100$ МПа; 3 – $\sigma_{\max} = 120$ МПа. Абсциссы точек соответствуют значениям N_0 для каждой трещины.

Интенсивность образования трещин (плотность точек на оси N , соответствующих N_0) можно определить по зависимости количества накопленных трещин n от числа циклов нагружения (рис. 3).

При линейной аппроксимации полученных данных (рис. 3) можно принять, что интенсивность образования трещин λ для каждого уровня напряжений является постоянной и определяется из уравнения

$$n = \lambda N + c, \tag{6}$$

где c – коэффициент регрессии. Значения параметра λ и границы интервалов его применимости представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Значения интенсивности образования трещин и границы интервалов при различных максимальных напряжениях в цикле

σ_{\max} , МПа	λ , цикл ⁻¹	N_{\min} , цикл	N_{\max} , цикл	Коэффициент корреляции
80	0,00005	170000	415000	0,961
100	0,00010	142000	325000	0,976
120	0,00020	110000	180000	0,964

Модель стохастичности размеров трещин. Статистический разброс значений длины трещин при постоянном уровне циклического напряжения обусловлен двумя случайными факторами – ростом и образованием дефектов во времени.

Рост усталостных трещин осуществляется по случайным траекториям [14], что при неизменных параметрах нагружения может быть обусловлено только случайной природой структуры материала [15].

Если предположить, что все трещины растут с одинаковой (детерминированной) скоростью, но при этом каждая из них образуется в случайный момент наработки, то разброс значений их размеров будет зависеть исключительно от продолжительности роста – ранее возникшие трещины будут иметь большую длину. Распределение размера дефектов в этом случае определяется распределением наработки до образования трещин [16].

Основываясь на экспериментально установленных выше закономерностях поведения трещин, рассмотрим, как описывается распределение их длины с учетом случайного образования и роста. При этом будем использовать подход, изложенный в [17].

Введем параметр размера y , однозначно связанный с длиной трещины соотношением $y = \ln a$. Принимаем, что длина трещин a измеряется в миллиметрах, а их начальная длина $a_0 = 1$ мм. Согласно уравнению (1) запишем

$$y = p + hN. \quad (7)$$

Определим функцию распределения параметра y в фиксированный момент наработки N' . При этом $N' > N_{\min}$, где N_{\min} – пороговое значение числа циклов до образования трещин.

Такая функция определяется вероятностью события $y < y'$, где y' – любое фиксированное значение параметра y при N' (рис. 4).

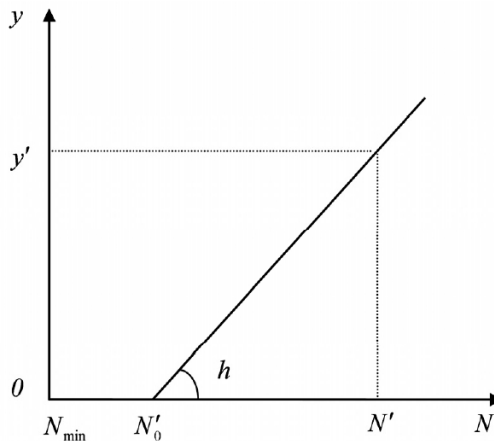


Рис. 4. Схема роста трещин.

Пусть все трещины растут с одинаковым значением параметра скорости h . Для некоторой трещины, скорость которой задается параметром h , а длина при наработке N' равна y' , число циклов до образования будет соответствовать значению N'_0 (рис. 4). Вполне очевидно, что в данном случае событие $y < y'$ будет выполняться для всех трещин, которые образуются в интервале наработки $(N'_0, N']$. Условная функция распределения параметра y определяется из соотношения

$$F(y; N|h) = P\{\hat{y} < y'; N'|h\} = P\{N_0 \in (N'_0, N']|h\}, \quad (8)$$

где знак \wedge обозначает случайную величину; $P\{\}$ – вероятность события.

Полагаем, что образование трещин отвечает пуассоновскому потоку событий, обладающему свойствами ординарности и отсутствия последствий. Согласно экспериментально установленной зависимости (6) интенсивность образования трещин λ в соответствующих интервалах наработки является постоянной величиной. Тогда вероятность образования трещины в интервале наработки $(N'_0, N']$ определится как

$$P\{N_0 \in (N'_0, N']|h\} = 1 - \exp[-\lambda(N' - N'_0)]. \quad (9)$$

Согласно принятой схеме роста трещин (рис. 4) выполняется очевидное соотношение

$$N' - N'_0 = \frac{y'}{h}. \quad (10)$$

Для любых значений N' и y' формула (8) с учетом выражений (9) и (10) принимает вид

$$F(y|h) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda y}{h}\right). \quad (11)$$

Из (11) следует, что условная функция распределения параметра y при заданном значении h не зависит от циклической наработки N .

Формула (11) задает распределение параметра размера y с учетом только одного фактора – случайного образования дефектов. Влияние случайного роста трещин на распределение их длины можно описать случайной величиной параметра скорости h . С использованием формулы полной вероятности для условной функции распределения (11) получим безусловную функцию распределения параметра размера дефектов y :

$$G(y) = \int_{H(h)} f(h)F(y|h)dh = 1 - \int_{H(h)} f(h)\exp\left(-\frac{\lambda y}{h}\right)dh, \quad (12)$$

где $f(h)$ – плотность распределения параметра h ; $H(h)$ – область его определения.

При выводе формулы (12) учитывалось свойство нормировки $\int_{H(h)} f(h)dh = 1$.

С учетом полученного эмпирического распределения параметра скорости h (4) выражение (12) преобразуется к виду

$$G(y) = 1 - \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}} \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \exp\left(-\frac{\lambda y}{h}\right)dh. \quad (13)$$

Интеграл в правой части равенства (13) заменой переменной $u = \lambda y/h$ выражается через интегральную показательную функцию $E_1(z) = \int_z^{\infty} u^{-1} \exp(-u)du$ [18].

После преобразований в (13) имеем

$$G(y) = 1 - \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}} \left\{ h_{\max} \exp\left(-\frac{\lambda y}{h_{\max}}\right) - h_{\min} \exp\left(-\frac{\lambda y}{h_{\min}}\right) + \lambda y \left[E_1\left(\frac{\lambda y}{h_{\min}}\right) - E_1\left(\frac{\lambda y}{h_{\max}}\right) \right] \right\}. \quad (14)$$

Формулу плотности распределения параметра y получим дифференцированием функции распределения (14) по этому параметру:

$$g(y) = \frac{\lambda}{h_{\max} - h_{\min}} \left[E_1\left(\frac{\lambda y}{h_{\max}}\right) - E_1\left(\frac{\lambda y}{h_{\min}}\right) \right]. \quad (15)$$

Переход от распределения параметра y (15) к распределению длины трещин a осуществим на основании правила преобразования случайных величин. С учетом принятого функционального соотношения $y(a) = \ln a$ и выражения (15) получим формулу для плотности распределения длины трещин:

$$f(a) = \left| \frac{dy}{da} \right| g[y(a)] = \frac{\lambda}{a(h_{\max} - h_{\min})} \left[E_1\left(\frac{\lambda \ln a}{h_{\max}}\right) - E_1\left(\frac{\lambda \ln a}{h_{\min}}\right) \right]. \quad (16)$$

Отметим, что функция (16) положительна и удовлетворяет условию нормировки $\int_1^{\infty} f(a) da = 1$, что отвечает требованиям к плотности распределения случайной величины.

Расчеты, проведенные по формуле (16) с учетом экспериментальных значений параметров λ , h_{\min} и h_{\max} , указывают на гиперболический тип функции для плотности распределения длины трещин a (рис. 5). При увеличении действующих напряжений в цикле гипербола более крутая, что свидетельствует о превалировании в выборке трещин небольших размеров.

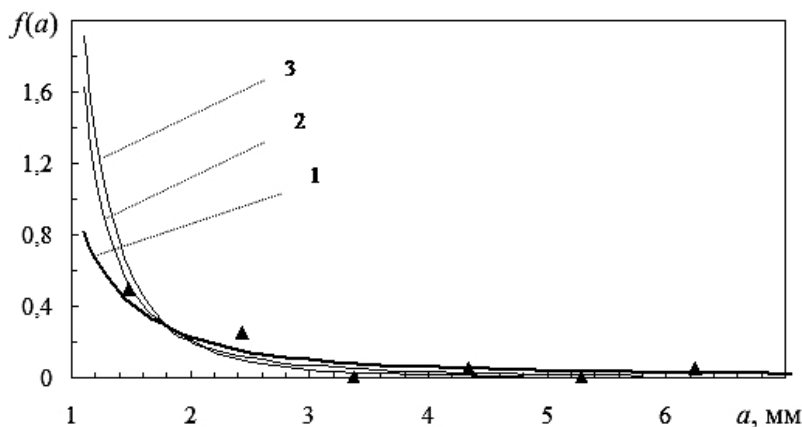


Рис. 5. Расчетная плотность распределения длины трещин при разных значениях максимального напряжения в цикле (линии) и экспериментальная при $\sigma_{\max} = 80$ МПа (точки): 1 – $\sigma_{\max} = 80$ МПа; 2 – $\sigma_{\max} = 100$ МПа; 3 – $\sigma_{\max} = 120$ МПа.

Экспериментальные данные для $\sigma_{\max} = 80$ МПа не противоречат расчетным значениям плотности распределения длины трещин (рис. 5).

Обсуждение полученных результатов. Расчетные зависимости на рис. 5 хорошо описываются функциями вида

$$\varphi(a) \cong \frac{A}{a^\gamma}, \quad (17)$$

где A и γ – постоянные, значения которых для действующих максимальных напряжений в цикле приведены в табл. 2. Отметим, что функция (17) аппроксимирует плотность распределения (16), но сама не является плотностью распределения.

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициентов в формуле (17) для различных напряжений в цикле

σ_{\max} , МПа	A	γ	Коэффициент корреляции
80	0,905	1,965	0,9992
100	1,7964	2,963	0,9951
120	2,62	3,660	0,9998

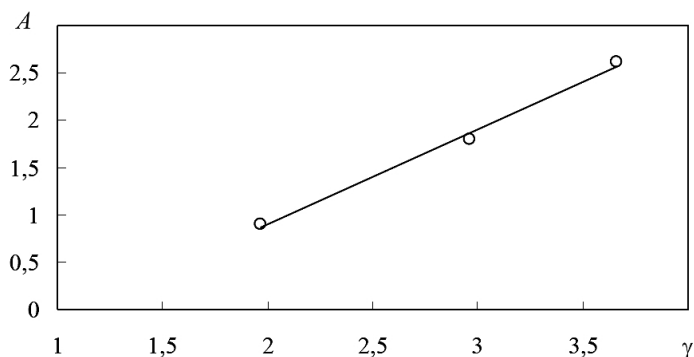


Рис. 6. Зависимость между коэффициентами A и γ .

Регрессионная зависимость между коэффициентами A и γ для различных максимальных напряжений в цикле (табл. 2) имеет вид $A = 1,0036\gamma - 1,0992$ (рис. 6) (коэффициент корреляции 0,9937). С учетом естественных погрешностей аппроксимации можно принять

$$A = \gamma - 1 \quad (18)$$

Тогда формулу (17) запишем в виде

$$\varphi(a) = \frac{\gamma - 1}{a^\gamma}. \quad (19)$$

Распределение (19) относится к типу степенных распределений, наиболее известными из которых являются распределение Парето (или Ципфа) для непрерывных величин и распределение Юла для дискретных [19]. Например, с использованием

принятых обозначений плотность распределения длины трещин по закону Парето имеет вид

$$\varphi(a) = \frac{\gamma - 1}{a_{\min}} \left(\frac{a_{\min}}{a} \right)^\gamma, \quad (20)$$

где a_{\min} – минимальная длина трещин в выборке (в рассматриваемом случае $a_{\min} = 1$ мм).

Отметим, что степенные распределения описывают достаточно многие явления в природе и социальной сфере [19]. Они относятся к распределениям с “тяжелыми хвостами” (heavy tails, fat tails), которые отражают наличие в выборках случайных величин, близких к экстремально большим значениям. Поэтому данный класс распределений применим, в том числе и к описанию статистики катастрофических разрушений и их последствий [20].

Покажем, что с помощью формулы (19), полученной для частного случая экспоненциального роста трещин, можно описывать общие закономерности множественного разрушения твердых тел. При этом показатель степени γ в (19) можно трактовать как параметр размерной стохастичности рассеянных трещин независимо от их масштаба и ориентации.

Числовые характеристики распределения Парето (19) имеют особенности при определенных значениях показателя γ . Например, математическое ожидание длины трещин m_a на основании (19) определяется при $\gamma > 2$:

$$m_a = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2}, \quad (21)$$

а дисперсия D_a – при $\gamma > 3$:

$$D_a = \frac{\gamma - 1}{(\gamma - 2)^2 (\gamma - 3)}. \quad (22)$$

Экспериментальные значения показателя γ для множественного разрушения различных материалов при разных видах нагружения показывают, что $\gamma > 3$ [2]: $\gamma = 6,2$ (поликристаллическая медь, усталость); $\gamma = 7,1$ (латунь, растяжение); $\gamma = 7,7$ (железо, ползучесть); $\gamma = 3,7$ (сталь 347, ползучесть); $\gamma = 3,7$ (сталь 304, ползучесть); $\gamma = 3,13$ (горные породы).

Обнаружено, что при развитии множественного разрушения металлических материалов показатель степени γ уменьшается до некоторого порогового значения. Например, при растяжении стали 20 окончательному разрушению соответствует значение $\gamma \approx 2$ [3]. Аналогичная закономерность, как уже отмечалось выше, имеет место и при тектонических событиях, когда перед землетрясением показатель b обобщенной функции Гутенберга–Рихтера уменьшается до критического значения $b \approx 1$. Гипотеза о подобии этих отличающихся по масштабам (на несколько порядков) проявлений множественного разрушения [3, 4] позволяет оценить пороговые значения показателя γ , вытекающие из формул (21) и (22).

Заметим, что явление подобия эмпирических кривых распределения размера дефектов в широком диапазоне масштабов повреждаемости – автомодельность множественного разрушения [1] – непосредственно следует из свойства степенных распределений. Это единственный тип распределений, которые имеют одинаковый вид не зависимо от того, в каком масштабе их рассматривают (масштабно-инвариантные распределения) [19]. Поэтому существует возможность моделировать процессы множественного разрушения в широком размерном диапазоне – от микроскопического до макроскопического.

В рамках автомодельного подхода, основанного на подобии множественного растрескивания твердых тел, предлагается формула для определения плотности вероятности распределения длины одинаково ориентированных трещин [4, 21]:

$$p(L) = \frac{c_0}{L^{\gamma'+1}}, \quad L > L_0, \quad (23)$$

где L – длина трещин; γ' и c_0 – коэффициенты; L_0 – некий пороговый размер дефекта.

Параметр γ' с учетом связи магнитуды землетрясений с сигналами акустической эмиссии выражается через показатель b обобщенной функции Гутенберга–Рихтера как [4, 21]

$$\gamma' = 2b. \quad (24)$$

Из сравнения формул (19) и (23) с учетом (24) следует

$$\gamma = \gamma' + 1 = 2b + 1. \quad (25)$$

Пороговые значения показателя b оцениваются с учетом фрактальной размерности тел с трещинами и их размеров. Утверждается, что на ранних стадиях разрушения $b \geq 1,5$ ($\gamma \geq 3$), а перед окончательным разрушением $b = 1$ ($\gamma = 3$) [4, 21]. Поскольку при этом формируется “лидерная” трещина длиной, соизмеримой с размерами тела, то дисперсия D_a резко возрастает, что описывается формулой (22).

Однако для малоразмерных тел возможен случай $0,5 < b < 1$ [21], что подтверждается данными экспериментальных исследований распределения размеров дефектов. Аналогичные значения b встречаются и для тектонических разломов, например $0,67 < b < 2,07$ [3], что названо закритическим режимом (post-critical regime) [21]. Для этого случая на основании (25) имеем $2 < \gamma < 3$. Пороговое значение $\gamma = 2$ является предельным для определения среднего размера дефектов по формуле (21).

Таким образом, полученное распределение длины трещин (19) при множественных дефектах в теле опосредовано обосновывает наличие двух критических значений показателя степени γ , который может быть принят в качестве критерия множественного разрушения. Это значение $\gamma = 3$, при котором нарушается устойчивость процесса накопления рассеянных трещин вследствие слияния части дефектов и образования лидерной трещины значительно большей длины по сравнению с имеющимися ($D_a \rightarrow \infty$). Такое предельное состояние при множественном разрушении можно назвать “хрупким”.

Если лидерная трещина не приводит к полному разрушению тела, процесс накопления повреждений сопровождается увеличением их размеров (возрастает m_a), и предельное состояние реализуется при $\gamma \rightarrow 2$, когда лавинообразное укрупнение дефектов происходит путем их массового объединения. Такое предельное состояние можно назвать “вязким”. Его реализация в металлических материалах сопровождается изменением масштаба множественного разрушения – его стадийностью [3]. В данном случае сингулярность дисперсии D_a при $\gamma = 3$ означает образование устойчивого дефекта более высокого размерного уровня.

Заключение. Вероятностное распределение длины усталостных трещин, полученное на основании теоретической модели их случайного образования и роста, описывается степенной функцией гиперболического типа. С учетом экспериментально установленных значений параметров случайного образования и роста трещин данная функция преобразуется в плотность распределения длины трещин, соответст-

вующую распределению Парето. С учетом известных данных можно предположить, что такой тип распределения размеров дефектов является характерным для множественного разрушения твердых тел. При этом в качестве основного параметра, определяющего предельное состояние при множественном разрушении, используется показатель степени γ распределения Парето. При $\gamma = 3$ разрушение реализуется вследствие слияния части дефектов и формирования одной большой трещины, соизмеримой с характерным размером тела (критерий “хрупкого” множественного разрушения). При $\gamma \rightarrow 2$ реализуется массовое слияние рассеянных дефектов, их укрупнение и переход поврежденности на более высокий размерный уровень (критерий “вязкого” множественного разрушения).

Резюме

На базі експериментальних закономірностей утворення та росту тріщин від утомленості в плоскому зразку з множинними концентраторами пропонується модель, яка описує розподіл довжини тріщин. Щільність такого розподілу відповідає розподілу Парето і може бути використана для опису накопичення розсіяних дефектів у широкому діапазоні масштабних рівнів розтріскування. Обґрунтовано критичні значення показника степеня в функції розподілу Парето, які відповідають граничним станам множинного руйнування твердих тіл.

1. Ботвина Л. Р., Баренблатт Г. И. Автомодельность накопления повреждаемости // Пробл. прочности. – 1985. – № 12. – С. 17–24.
2. Ботвина Л. Р. Кинетика разрушения конструкционных материалов. – М.: Наука, 1989. – 232 с.
3. Ботвина Л. Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности. – М.: Наука, 2008. – 334 с.
4. Карпинтери А., Лачидонья Дж., Пуцци С. Прогноз развития трещин в полномасштабных конструкциях на основе анализа показателя b и статистики Юла // Физ. мезомеханика. – 2008. – **11**, № 3. – С. 75–87.
5. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 448 с.
6. Ignatovich S. R. and Bouraou N. I. The reliability of detecting cracks during nondestructive testing of aircraft components // Russ. J. Nondestruct. Test. – 2013. – **49**, No. 5. – P. 294–300.
7. Игнатович С. Р. Прогнозирование объединения рассеянных дефектов // Пробл. прочности. – 1992. – № 2. – С. 71–78.
8. Игнатович С. Р., Кучер А. Г., Якушенко А. С., Баишта А. В. Моделирование объединения рассеянных поверхностных трещин. Сообщ. 1. Вероятностная модель объединения трещин // Там же. – 2004. – № 2. – С. 21–32.
9. Игнатович С. Р. Вероятностная модель многоочагового усталостного повреждения заклепочных соединений авиационных конструкций // Там же. – 2014. – № 3. – С. 48–58.
10. Игнатович С. Р., Каран Е. В. Кинетика роста усталостных трещин в образцах алюминиевого сплава Д16АТ с множественными концентраторами // Там же. – 2015. – № 4. – С. 91–101.
11. Трощенко В. Т., Хамаза Л. А. Механика рассеянного усталостного повреждения металлов и сплавов. – Киев: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2016. – 412 с.

12. *Barter S., Molent L., Goldsmith N., and Jones R.* An experimental evaluation of fatigue crack growth // *Eng. Fail. Anal.* – 2005. – **12**. – P. 99–128.
13. *Molent L., Jones R., Barter S., and Pitt S.* Recent developments in fatigue crack growth assessment // *Int. J. Fatigue.* – 2006. – **28**. – P. 1759–1768.
14. *Virkler D. A., Hillberry B. M., and Goel P. K.* The statistical nature of fatigue crack propagation // *J. Eng. Mater. Technol.* – 1979. – **101**, No. 2. – P. 148–153.
15. *Tong Y. C.* Literature Review on Aircraft Structural Risk and Reliability Analysis // Technical Report DSTO-TR-1110. – Aeronautical and Maritime Research Laboratory, 2001 – 45 p.
16. *Игнатович С. Р., Каран Е. В., Краснопольский В. С.* Распределение длины трещин в заклепочном соединении самолетной конструкции при многоочаговом повреждении // *Физ.-хим. механика материалов.* – 2013. – **49**, № 2. – С. 109–116.
17. *Игнатович С. Р.* Распределение размеров дефектов при нагружении твердых тел // *Пробл. прочности.* – 1990. – № 9. – С. 40–45.
18. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
19. *Newman M. E. J.* Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // *Contemp. Phys.* – 2005. – **46**, No. 5. – P. 323–351.
20. *Владимиров В. А., Воробьев Ю. Л., Малинецкий Г. Г. и др.* Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. – М.: Наука, 2000. – 432 с.
21. *Carpinteri A., Lacidogna G., Niccolini G., and Puzzi S.* Critical defect size distributions in concrete structures detected by the acoustic emission technique // *Meccanica.* – 2008. – 43. – P. 349–363.

Поступила 20. 12. 2016