НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 620.178, 620.179

Анализ вибродиагностических показателей наличия дышащей поверхностной трещины разной геометрии в стержне круглого поперечного сечения

В. В. Матвеев, Е. А. Онищенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрен метод приближенного расчета возможных значений вибродиагностических показателей наличия в стержне круглого поперечного сечения дышащей поверхностной трещины с различной конфигурацией ее фронта (полуэллиптическая, полукруглая и прямолинейная) при супер- и субгармоническом резонансах по какой-либо собственной форме изгибных колебаний. Расчет вибродиагностических показателей наличия трещины выполнен на примере консольного стержня в случае резонанса, соответствующего первой собственной форме колебаний при силовом и кинематическом возбуждении. Получены зависимости диагностических показателей от места приложения вынуждающей силы, местоположения, относительной глубины и относительной площади трещины для разных отношений полуосей эллипса и для трещин с прямолинейным и полукруглым фронтом. Приведено некоторое сравнение результатов расчета с данными, полученными с помощью конечноэлементной модели.

Ключевые слова: вибродиагностика усталостного повреждения, дышащая поверхностная трещина, конечноэлементная модель, суб- и супергармонические резонансы.

Введение. Ранее [1] на примере консольного стержня круглого поперечного сечения с полуэллиптической трещиной нормального отрыва был рассмотрен расчет вибродиагностических показателей наличия такой дышащей трещины при возбуждении супергармонического порядка 1/2 и субгармонического 2-го порядка резонансов по первой собственной форме изгибных колебаний. В решении для вычисления определяющего параметра – параметра нелинейности колебательной системы – использовались известные справочные данные по коэффициенту интенсивности нормальных напряжений (КИН) в точках фронта трещины [2]. Однако отсутствие аппроксимационных формул для указанного вида трещин, ограниченность табличных и графических данных, особенно по значению КИН по фронту трещины при различных ее параметрах, обусловили необходимость нахождения весьма приближенных аппроксимирующих функций для каждого конкретного отношения полуосей эллипса и радиуса поперечного сечения стержня и исключили возможность рассмотрения предельных конфигураций трещины: с прямым и полукруглым фронтом.

В данной работе с использованием обобщенной полиномиальной зависимости для вычисления КИН в любой точке фронта поверхностной полуэллиптической трещины нормального отрыва, полученной в [3], рассмотрим возможности расчета вибродиагностических показателей наличия полуэллиптической трещины любых параметров, включая трещины с прямым и полукруглым фронтом.

Исходные положения. В качестве вибродиагностических показателей при указанных резонансах какой либо *j*-й собственной формы изгибных колебаний стержня используются отношения амплитуд гармоник в выбранном сечении стержня: второй, резонирующей к первой при суперрезонансе порядка 1/2 ($\bar{A}_{2/1} = A_{2j} / A_{1\Sigma}$), и первой, резонирующей ко второй при субрезонансе 2-го порядка ($\bar{A}_{1/2} = A_{1j} / A_{2\Sigma}$), которые определяются через параметр нелинейности α и логарифмический декремент колебаний δ исследуемой колебательной системы с дышащей трещиной по следующим формулам [1]:

$$\bar{A}_{2j} \cong 0{,}58 \frac{\alpha}{\delta} \lambda_{1j} \quad \text{при} \quad \bar{A}_{2j} \le 0{,}9 \quad \text{и} \quad \bar{A}_{2j} \cong 0{,}725 \lambda_{1j} \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} \quad \text{при} \quad \bar{A}_{2j} > 0{,}9; \tag{1}$$

$$\bar{A}_{1j} \cong \frac{4\alpha}{3\delta} \left(\lambda_{2j}^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{8\alpha^2}{9\pi\delta} \right)^2 \right)^{-1/2}. \tag{2}$$

Коэффициенты λ_{1j} и λ_{2j} определяются по результатам расчета методом нормальных форм вынужденных колебаний цельного стержня на частоте супер- и субрезонанса соответственно через отношения амплитуды гармоники *j*-й формы колебаний и полной амплитуды ΣA_i колебаний:

$$\lambda_{1j} = \frac{A_{1j}}{\sum_{i=1} A_{1i}}, \qquad \lambda_{2j} = \frac{\sum_{i=1} A_{2i}}{A_{2j}}. \tag{3}$$

Приведенные формулы (1), (2) получены в предположении неизменности собственных форм колебаний упругого тела при открытии трещины, что ограничивает их использование случаем относительно малых трещин. Следует заметить, что режимы колебаний при слабом субгармоническом резонансе, т.е. в случае $\bar{A}_{1j} < 1$, неустойчивы, и экспериментальное определение амплитуды первой резонирующей гармоники A_{1j} будет возможным при значении $\alpha > \frac{3}{4}\delta(A_{1j})$. При определении амплитуды второй резонирующей гармоники A_{2j} в случае возбуждения супергармонического резонанса важным является исключение в системе возбуждения паразитной второй гармоники.

Представленные вибропоказатели (1), (2) зависят от значений логарифмического декремента колебаний δ и обусловленного периодическим открытием поверхностной полуэллиптической трещины (рис. 1) параметра нелинейности α колебательной системы при ее деформировании по *j*-й форме в составе остальных возбуждаемых форм вынужденных колебаний на частоте соответствующего резонанса

$$\alpha = \frac{\chi}{1+\chi}, \tag{4}$$

где χ – энергетическая характеристика повреждения, равная отношению возможного приращения потенциальной энергии деформации стержня, обусловленного открытием трещины $\Delta\Pi_{j\text{т}}$, к потенциальной энергии деформации стержня по *j*-й форме вынужденных колебаний Π_j на частоте рассматриваемого резонанса:

$$\chi = \frac{\Delta\Pi_{j\text{т}}}{\Pi_j}. \tag{5}$$

Приращение потенциальной энергии $\Delta\Pi_{j\text{т}}$ и энергия деформации Π_j определяются по результатам расчета вынужденных колебаний цельного стержня при его изгибе по j-й форме в составе остальных возбуждаемых форм через коэффициент интенсивности напряжений K_I:

$$\Delta\Pi_{j\text{т}} = \frac{1}{E'}\iint\limits_{(S)} K_1^2 dS = \frac{1}{E'}\iint\limits_{(S)} K_1^2 \delta\overline{\rho}\cos\theta d\Gamma. \tag{6}$$

Здесь dS – элемент площади поверхности трещины у ее фронта; $\delta\overline{\rho}$ – вектор возможного смещения точки фронта-контура Γ трещины; θ – угол между $\delta\overline{\rho}$ и нормалью к контуру трещины; $E' = E$ – при плоском напряженном состоянии; $E' = E/(1-\mu^2)$ – при плоской деформации, где E – модуль упругости материала стержня; μ – коэффициент Пуассона. Не анализируя возможное напряженное состояние по фронту трещины, в дальнейшем будем определять меньшее значение $\Delta\Pi_{j\text{т}}$, т.е. принимая условие плоской деформации при $\mu = 0{,}3$.

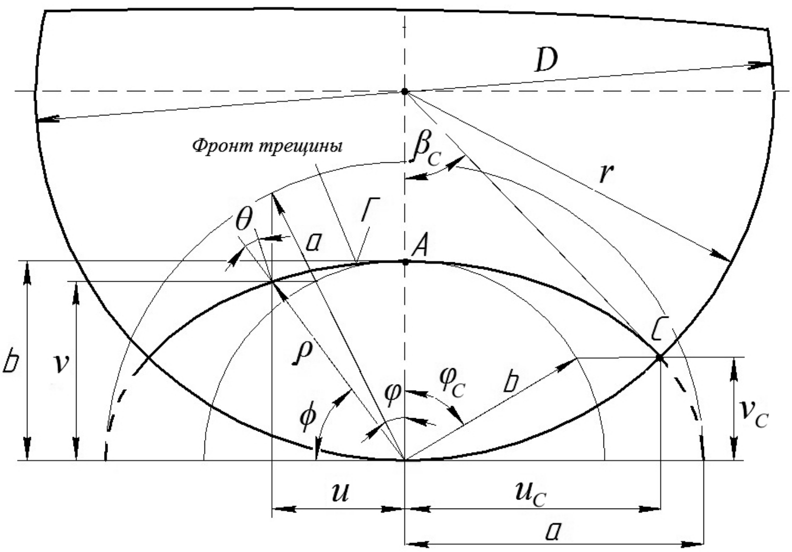


Рис. 1. Геометрия поверхностной полуэллиптической трещины в стержне круглого поперечного сечения.

В работе [1] вычисление $\Delta\Pi_{j\text{т}}$ выполнялось для двух возможных вариантов изменения фронта трещины. Первый – в предположении постоянного отношения полуосей эллипса ($a/b = \text{const}$), второй – при постоянном относительном значении большей полуоси ($a/D = \text{const}$). Поскольку результаты вычислений по этим вариантам практически не отличались, рассмотрим только первый, для которого формула (6) в случае использования полярных координат принимает вид

$$\Delta\Pi_{j\text{т}} = \frac{2}{E'}\frac{a}{b}\int\limits_0^b\int\limits_0^{\varphi_C} K_\text{I}^2 bdbd\varphi. \tag{7}$$

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений K_I по фронту трещины определялся по формуле [2]

$$K_\mathrm{I} = \frac{4M_\text{т}}{\pi r^3} F_1 \sqrt{\pi c}, \tag{8}$$

где $M_\text{т}$ – изгибающий момент в сечении расположения трещины $x = x_\text{т}$; c – полудлина дуги окружности сечения стержня, охватываемой трещиной ($c = r\beta_C$); F_1 – поправочный коэффициент, или безразмерный КИН, который в [1] был представлен в приближении в виде функции $F_1(z, \overline{\varphi})$ двух переменных: относительного угла $\overline{\varphi} = \varphi/\varphi_C$ и относительной текущей глубины трещины $z = b/r$.

Особенность использования формулы (8) заключается в том, что $M_\text{т}$ вычислялся нами по результатам расчета вынужденных колебаний цельного стержня при его деформировании по j-й форме в составе остальных форм колебаний на частоте соответствующего резонанса:

$$M_\text{т} = EI\left[\left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)\right]_{x = x_\text{т}}, \tag{9}$$

где I – осевой момент инерции поперечного сечения стержня; $y_i(x)$ – амплитудная функция прогибов стержня по i-й форме; N – количество учитываемых форм колебаний.

Определяя с учетом условия ортогональности собственных форм колебаний потенциальную энергию деформирования стержня по j-й форме в составе остальных форм Π_j как по изолированной, для диапазона возможных значений относительных параметров трещины, отражаемых функцией $F_1(z, \overline{\varphi})$, было найдено

$$\chi = 16(1-\mu^2)\frac{a}{b} r \int_0^{b/r} z\varphi_C(z)\beta_C(z)\int_0^1 (F_1(z, \overline{\varphi}))^2 d\overline{\varphi} dz \frac{\left[\left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d^2 y_i}{dx^2}\right)\right]_{x = x_\text{т}}}{\int_0^l \left(\frac{d^2 y_j}{dx^2}\right)^2 dx}, \tag{10}$$

где для рассматриваемой полуэллиптической трещины

$$\varphi_C(z) = \arccos\left(\frac{-1}{\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)z}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)z^2}\right]\right), \tag{11}$$

$$\beta_C(z) = \arccos(1 - z\cos\varphi_C). \tag{12}$$

Расчет энергетической характеристики χ для всего диапазона относительных параметров трещины. При известных аналитических функциях $y_i(x)$ для заданных граничных условий и возбуждающей нагрузки основным для определения χ по (10) является нахождение зависимости коэффициента F_1 для данного отношения a/b от относительной глубины трещины z и относительного угла $\overline{\varphi}$, т.е.

изменение его значений по всему фронту трещины при разной ее относительной глубине.

К сожалению, как уже отмечалось, в [2] для рассматриваемого случая поверхностной трещины отсутствуют какие-либо аппроксимирующие зависимости для коэффициента F_1. Табличные значения F_1 для ряда отношений b/r и b/a приведены только для точек A и C (рис. 1), а графики зависимости F_1 от $\overline{\varphi}$ при тех же отношениях b/a – только для значения $b/r = 0{,}4$. Для крайних конфигураций трещины с прямолинейным и полукруглым фронтом значения коэффициента F_1 приведены в виде графика его зависимости от отношения b/r только для точки A и при отношении радиуса полукруглой трещины к диаметру поперечного сечения стержня, равном 0,75. Поэтому в работе [1] по приведенным в [2] графикам и таблицам аппроксимирующая зависимость коэффициента F_1 от z и $\overline{\varphi}$ была представлена в явном приближении для одного значения $a/b = 2{,}5$.

В этом отношении по сравнению с отмеченными данными справочника [2], как и более полными [4], очень удобными для практического использования являются результаты работы [3]. В последней по результатам численного решения с использованием конечноэлементной модели, а также многопараметрической припасовывающей методики и некоторого их сравнения с экспериментальными и известными данными получена обобщенная полиномиальная зависимость для вычисления коэффициента F_1 при любых параметрах полуэллиптической трещины в любой точке ее фронта.

Коэффициент интенсивности напряжений $K_{\rm I}$ определялся по классической формуле:

$$K_{\rm I} = \frac{32M_{\rm т}}{\pi D^3} F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{D}, \frac{u}{u_C}\right)\sqrt{\pi b} \tag{13}$$

с представлением F_1 в виде функции трех переменных: отношения полуосей эллипса (b/a), относительной глубины трещины ($b/D = \gamma$) и относительного положения точек по фронту трещины ($u/u_C = \overline{u}$):

$$F_1\left(\frac{b}{a}, \frac{b}{D}, \frac{u}{u_C}\right) = \sum_{p=0}^{2}\sum_{m=0}^{6}\sum_{n=0}^{2} N_{pmn}\left(\frac{b}{a}\right)^p (\gamma)^m (\overline{u})^n, \tag{14}$$

значения коэффициентов N_{pmn} находятся из таблицы.

Значения коэффициентов N_{pmn} для определения F_1 [3]

m	n, равное								
	0			1			2		
	при p								
	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1,346	−0,64	−0,022	0,19	−0,347	0,175	−0,926	1,399	−0,454
1	−9,627	6,435	0,207	−1,323	2,839	−1,635	6,767	−10,348	2,4
2	82,244	−36,062	−22,436	8,317	−18,649	9,091	−42,734	71,26	−4,388
3	−360,65	102,765	148,962	−31,454	70,186	−32,253	162,595	−263,786	−18,246
4	841,678	−151,83	−426,773	66,389	−142,227	60,188	−345,453	531,56	110,187
5	−973,482	107,831	554,803	−71,557	144,956	−55,293	375,935	−544,306	−186,619
6	449,146	−27,262	−276,533	31,022	−58,87	19,041	−165,151	225,705	108,877

Для использования формул (13), (14) при координатах точек фронта трещины $u = a\sin\varphi$, $v = b\cos\varphi$ (рис. 1) воспользуемся имеющимся выражением (7), и для возможности интегрирования функции F_1 по контуру трещины отношение (u/u_C) представим в виде

$$\frac{u}{u_C} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_C}, \tag{15}$$

где φ_C при $a/b = \mathrm{const}$ определяется выражением (11) как функция от $\gamma = z/2$.

Тогда с учетом (13)–(15) и (9) формула (7) принимает вид

$$\Delta\Pi_{j\text{т}} = 32E'I\frac{a}{b}D\int_0^{b/D}(\gamma)^2\int_0^{\varphi_C}F_1\left(\frac{b}{a},\gamma,\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_C}\right)d\varphi d\gamma\left[\left(\frac{d^2y_j}{dx^2}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d^2y_i}{dx^2}\right)\right]_{x=x_\text{т}}. \tag{16}$$

С использованием выражения для потенциальной энергии деформации стержня по j-й форме вынужденных колебаний на частоте соответствующего резонанса в виде $\Pi_j = \dfrac{EI}{2}\displaystyle\int_0^l\left(\frac{d^2y_j}{dx^2}\right)dx$ находим энергетическую характеристику повреждения (5):

$$\chi = 64(1-\mu^2)\frac{a}{b}D\int_0^{b/D}(\gamma)^2\int_0^{\varphi_C}\left(F_1\left(\frac{b}{a},\gamma,\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_C}\right)\right)^2 d\varphi d\gamma\times$$

$$\times\frac{\left[\left(\dfrac{d^2y_j}{dx^2}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{d^2y_i}{dx^2}\right)\right]_{x=x_\text{т}}}{\displaystyle\int_0^l\left(\frac{d^2y_j}{dx^2}\right)^2dx}. \tag{17}$$

Для строго полуэллиптической трещины значение φ_C определяется по формуле (11), а в случае предельной конфигурации с полукруглым фронтом $(a = b)$ –

$$\varphi_C(\gamma) = \arccos\frac{b}{D}. \tag{18}$$

Для предельной конфигурации трещины со строго прямолинейным фронтом следует использовать первое выражение в формуле (6) при $dS = dbdu = u_C dbd\bar{u}$, где

$$u_C = \sqrt{b(D-b)}. \tag{19}$$

В этом случае

$$\Delta\Pi_{j\text{т}} = 32E'ID\int_0^{b/D}\gamma\int_0^1\sqrt{\gamma(1-\gamma)}\left(F_1\left(\frac{b}{a},\gamma,\bar{u}\right)\right)^2 d\bar{u}d\gamma\left[\left(\frac{d^2y_j}{dx^2}\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d^2y_i}{dx^2}\right)\right]_{x=x_\text{т}}, \tag{20}$$

и энергетическая характеристика принимает следующий вид

$$\chi = 64(1-\mu^2)D\int_0^{b/D}\gamma\int_0^1\sqrt{\gamma(1-\gamma)}\left(F_1\left(\frac{b}{a},\gamma,\bar{u}\right)\right)^2 d\bar{u}d\gamma\,\frac{\left[\left(\dfrac{d^2y_j}{dx^2}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\dfrac{d^2y_i}{dx^2}\right)\right]_{x=x_\text{т}}}{\displaystyle\int_0^l\left(\dfrac{d^2y_j}{dx^2}\right)^2 dx}. \quad (21)$$

Результаты расчета вибродиагностических показателей. Прежде чем перейти к результатам расчета по формулам (1), (2), заметим, что кроме параметра нелинейности α (1), определяемого через энергетическую характеристику повреждения χ, для вычисления которой найдена обобщающая зависимость (17), необходимо располагать данными о демпфирующей способности исследуемой колебательной системы, т.е. о декременте колебаний δ. Действительное значение декремента δ, строго говоря, можно определить только экспериментально по затуханию свободных колебаний или по ширине резонансного пика конкретного исследуемого конструктивного элемента при колебаниях по рассматриваемой j-й резонирующей собственной форме при данных граничных условиях [5]. Кроме того, в случае амплитудозависимого декремента колебаний, например $\delta = \kappa_n A_j^{n-1}$, формулы (1), (2) принимают следующий вид:

$$\bar{A}_{2/1} = \sqrt[n]{\frac{0{,}58\alpha}{\kappa_n A_{1\Sigma}^{n-1}}\lambda_{1j}} \qquad \text{при} \qquad \bar{A}_{2/1} \le 0{,}9; \quad (22а)$$

$$\bar{A}_{2/1} = \sqrt[n+1]{\frac{0{,}5256\alpha}{\kappa_n A_{1\Sigma}^{n-1}}\lambda_{1j}^2} \qquad \text{при} \qquad \bar{A}_{2/1} > 0{,}9; \quad (22б)$$

$$\bar{A}_{1/2} \approx \sqrt[n]{\frac{4\alpha}{3\kappa_n A_{2\Sigma}^{n-1}\lambda_{2j}}}. \quad (23)$$

Существенным отличием формул (22), (23) от (1), (2) является зависимость вибродиагностических показателей от уровня возбуждения колебаний, определяющего значение полной амплитуды вынужденных колебаний $A_{1\Sigma}$ и $A_{2\Sigma}$ на частоте соответствующего резонанса.

Поэтому при расчете ограничимся раскрытием характера зависимости вибродиагностических показателей от особенности возбуждения колебаний, местоположения трещины, ее вида и относительных размеров, а также некоторым сравнением результатов расчета с численным решением с использованием конечноэлементной модели на примере консольного стержня диаметром $D = 20$ мм и длиной $l = 230$ мм (рис. 2) при супер- и субгармонических резонансных колебаниях по первой ($j = 1$) собственной форме в случае амплитудонезависимого декремента $\delta = 0{,}0112$.

Для рассматриваемого стержня имеем

$$y_i(x_P, x) = \frac{Pl^3}{EI(k_1 l)^4} X_i(x_P) X_i(x)\beta_i$$

при возбуждении колебаний сосредоточенной силой $P\sin\nu t$, приложенной в сечении $x = x_P$, и

$$y_i(x) = \frac{Bm_0 \nu^2 l^3}{EI(k_1 l)^4} X_i(x) \int_0^l X_i(x)\,dx\,\beta_i$$

при перемещении заделки ($x = 0$) $B \sin \nu t$, где

$$X_i(x) = (\operatorname{ch} k_i x - \cos k_i x) - \frac{\operatorname{ch} k_i l + \cos k_i l}{\operatorname{sh} k_i l + \sin k_i l} (\operatorname{sh} k_i x - \sin k_i x);$$

$$\beta_i = \left[\left(\frac{k_i l}{k_1 l} \right)^4 - \left(\frac{\nu}{\omega_1} \right)^2 \right]^{-1};$$

$k_i l$ – i-й корень частотного уравнения; m_0 – масса единицы длины стержня.

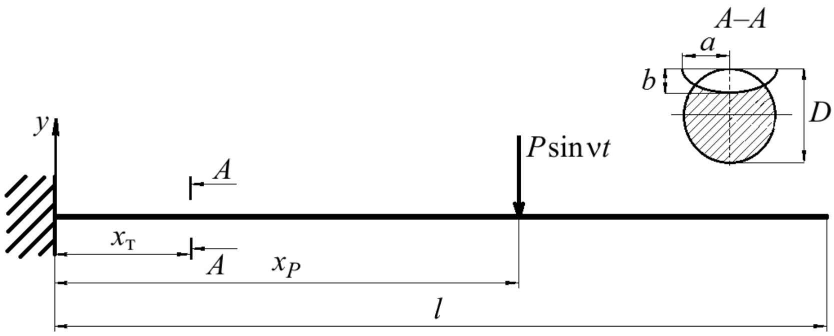


Рис. 2. Стержень круглого поперечного сечения с поверхностной полуэллиптической трещиной, нагруженный сосредоточенной вынуждающей гармонической силой.

Сравним результаты расчета с использованием зависимости (17) с ранее [1] полученной (10) при аппроксимирующей функции для случая $b/a = 0{,}4$:

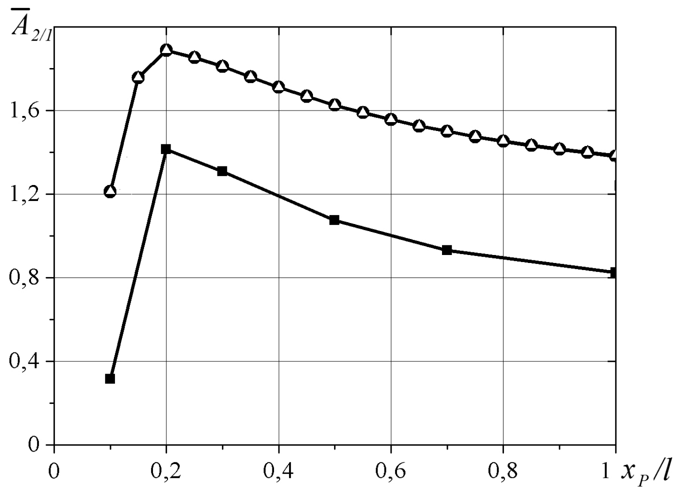
$$F_1(z, \overline{\varphi}) = F_{1A}(z) + 0{,}511 \Delta F_1 \overline{\varphi} - 1{,}511 \Delta F_1 \overline{\varphi}^2,$$

где

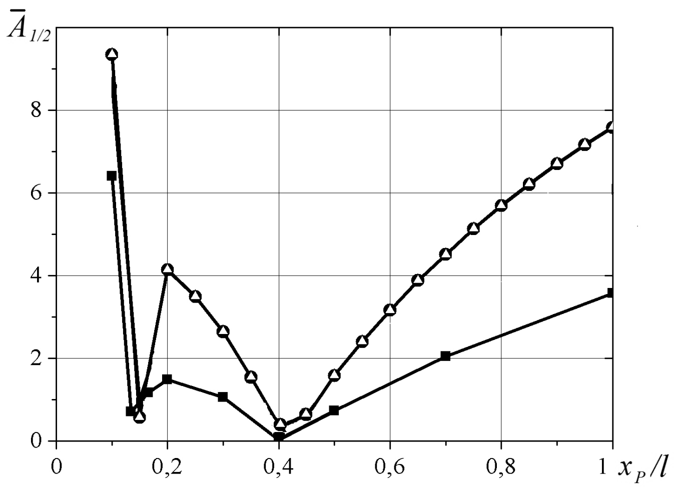
$$\Delta F_1 = F_{1A}(z) - F_{1C}(z); \qquad F_{1A}(z) = 0{,}56 - 0{,}027z - 0{,}058z^2 + 0{,}382z^3;$$

$$F_{1C}(z) = 4{,}426z - 20{,}9z^2 + 45{,}18z^3 - 43{,}7z^4 + 15{,}75z^5.$$

На рис. 3 представлены соответствующие расчетные зависимости вибродиагностических показателей $\overline{A}_{2/1}$ и $\overline{A}_{1/2}$ от места приложения вынуждающей силы x_P при местоположении трещины $x_т = 0{,}1l$ с относительными размерами $b/a = 0{,}4$ и $b/D = 0{,}2$. Как видно, имеется полное согласование как по характеру зависимостей, так и по значениям указанных показателей. Зависимость вибродиагностических показателей от места приложения вынуждающей силы обусловлена характером амплитудных функций прогиба $y_i(x_P, x)$. На рис. 3 также приведены данные, полученные с помощью конечноэлементной модели, при модуле упругости $E = 200$ ГПа и плотности $\rho = 7800$ кг/м^3 материала стержня, которые согласуются по характеру зависимостей с результатами расчетов при существенно меньших значениях определяемых показателей. Ранее [1] было установлено, что основная причина различия обусловлена более низкими значениями КИН для исследуемой конечноэлементной модели



а



б

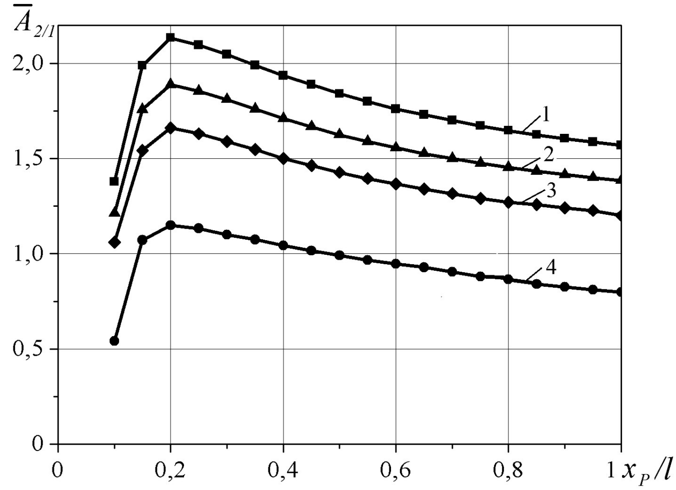
Рис. 3. Зависимость вибродиагностических показателей $\overline{A}_{2/1}$ (*а*) и $\overline{A}_{1/2}$ (*б*) от места приложения x_P/l вынуждающей силы $P\sin\nu t$ для трещины относительных размеров $b/a=0{,}4$, $b/D=0{,}2$ в сечении $x_т=0{,}1l$: ■ – по методу конечных элементов; ●, △ – с использованием формул (10), (17) соответственно.

из-за относительно редкой сетки, поскольку с увеличением количества элементов повышается время проведения численных расчетов и возникает необходимость в дополнительных компьютерных ресурсах.

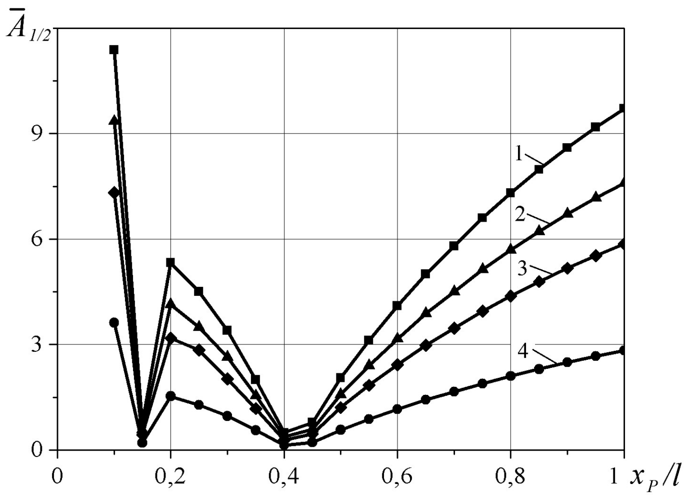
Зависимости $\overline{A}_{2/1}(x_P)$ и $\overline{A}_{1/2}(x_P)$, полученные с использованием (17), (21) для трещин одинаковой относительной глубины b/D, но с разным отношением полуосей эллипса b/a, свидетельствуют об уменьшении значения вибропоказателей с увеличением отношения b/a при практически одинаковом их характере (рис. 4).

Из представленных на рис. 3, 4 зависимостей следует, что в случае расположения трещины у заделки наиболее практически целесообразным является приложение вынуждающей силы на свободном конце стержня.

Расчетные зависимости показателей $\overline{A}_{2/1}$ и $\overline{A}_{1/2}$ от местоположения трещины $x_т$ с разным отношением b/a при относительной глубине $b/D=0{,}2$ для случаев



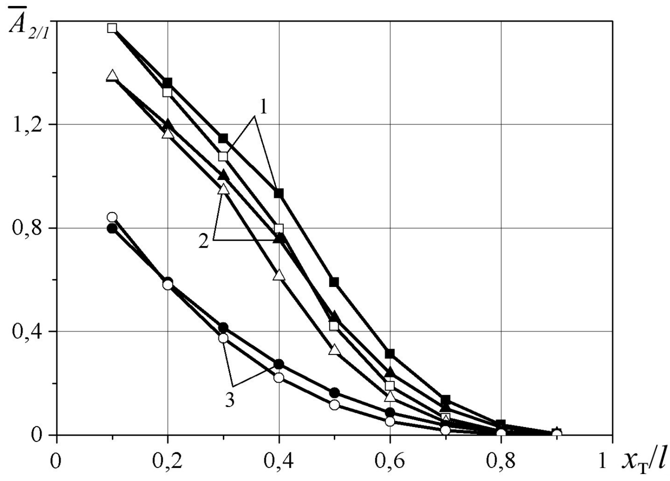
а



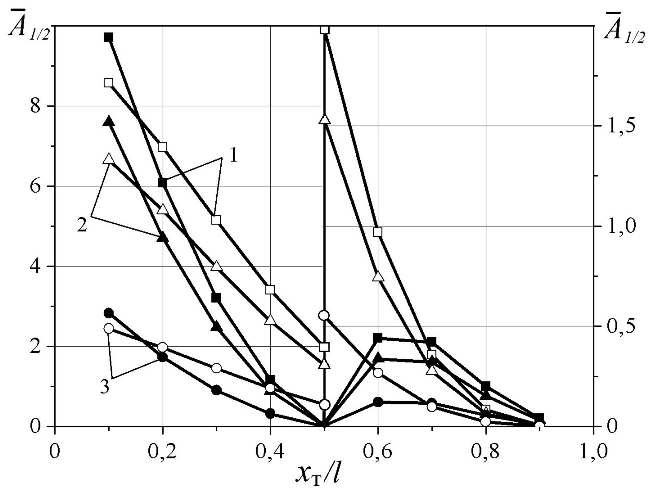
б

Рис. 4. Зависимость вибродиагностических показателей $\overline{A}_{2/1}$ (*а*) и $\overline{A}_{1/2}$ (*б*) от места приложения x_P/l вынуждающей силы $P\sin\nu t$ для трещины в сечении $x_т = 0{,}1l$ при $b/D = 0{,}2$ и разных значениях отношения полуосей b/a: *1* – $b/a = 0$; *2* – $b/a = 0{,}4$; *3* – $b/a = 0{,}6$; *4* – $b/a = 1$.

возбуждения колебаний сосредоточенной силой, приложенной в сечении $x_P = l$, и перемещением заделки представлены на рис. 5. Как видно, при постоянном отношении b/D с удалением трещины от заделки стержня значения $\overline{A}_{2/1}$ и $\overline{A}_{1/2}$ существенно уменьшаются, что обусловлено уменьшением $M_т$ (9), определяемым значением $\left[\left(\dfrac{d^2 y_j}{dx^2}\right)\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\dfrac{d^2 y_i}{dx^2}\right)\right]_{x=x_т}$ и изменение которого обусловливает некоторое увеличение вибродиагностического показателя при субгармоническом резонансе (рис. 5,*б*) в области $x_т = 0{,}6 - 0{,}8l$. При этом наибольшее значение вибродиагностических показателей, так же как и на рис. 4, наблюдается для трещины с прямым фронтом ($b/a = 0$) и наименьшее – с полукруглым ($b/a = 1$). Особенности возбуждения колебаний при супергармоническом резонансе не оказывают существенного влияния на значение



а



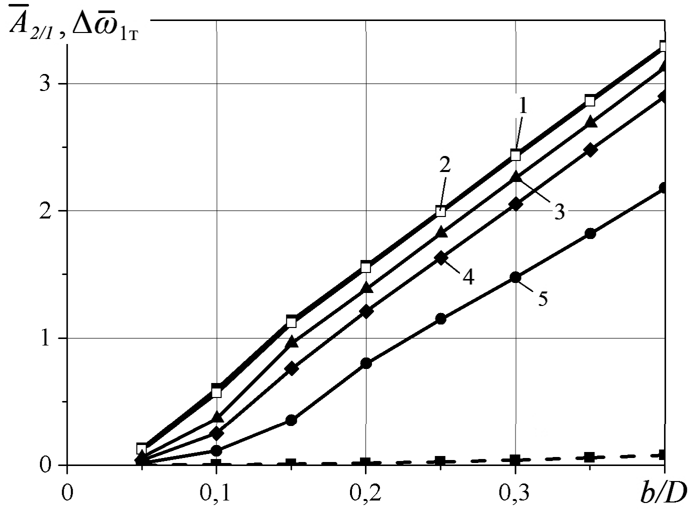
б

Рис. 5. Зависимость вибродиагностических показателей $\overline{A}_{2/1}$ (*а*) и $\overline{A}_{1/2}$ (*б*) от местоположения трещины $x_т/l$ при ее относительной глубине $b/D = 0{,}2$ и разных значениях отношения полуосей b/a в случаях возбуждения колебаний вынуждающей силой $P \sin \nu t$ в сечении $x_P = l$ (■, ▲, ●) и кинематическом перемещении заделки ($x = 0$) $B \sin \nu t$ (□, △, ○): *1* – $b/a = 0$; *2* – $b/a = 0{,}4$; *3* – $b/a = 1$.

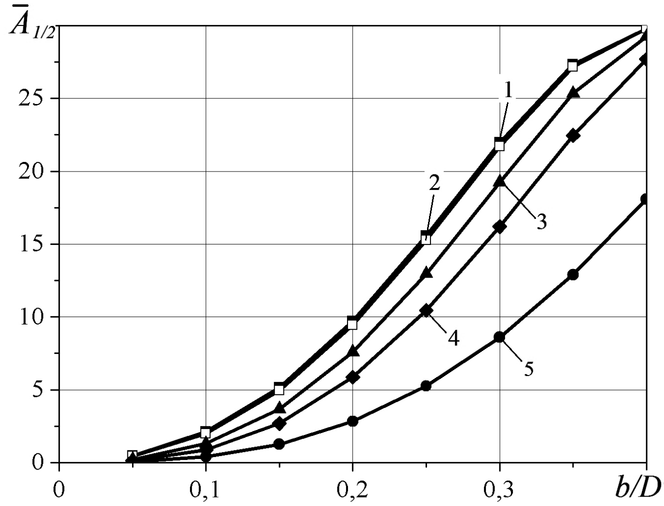
$\overline{A}_{2/1}$, а в случае субгармонического резонанса наблюдается различие как в значениях, так и в характере зависимости $\overline{A}_{1/2}$ от местоположения трещины при $x_т/l > 0{,}3$, что обусловлено разным характером функций $y_i(x_P, x)$ и $y_i(x)$.

Зависимость вибродиагностических показателей как от относительной глубины b/D (рис. 6), так и от относительной площади трещины $S_{тр}/S$ (рис. 7) при различной ее конфигурации также четко выявляет уменьшение значений рассматриваемых вибропоказателей с увеличением отношения b/a.

Приведенный анализ показывает, что наблюдаемое уменьшение значений $\overline{A}_{2/1}$ и $\overline{A}_{1/2}$ с увеличением отношения b/a (рис. 4–6) в основном обусловлено уменьшением площади трещины при определенном влиянии изменения значения функции F_1 и характера ее распределения по фронту трещины (рис. 8).



а



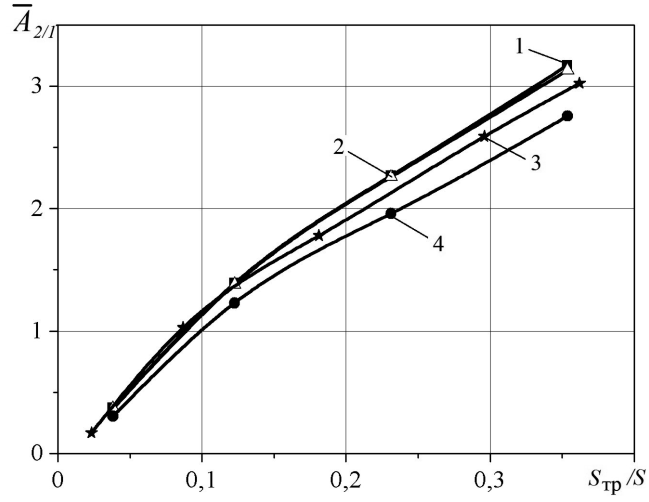
б

Рис. 6. Зависимость вибродиагностических показателей $\overline{A}_{2/1}$, $\Delta\overline{\omega}_{1т}$ (*а*) и $\overline{A}_{1/2}$ (*б*) от относительной глубины b/D трещины в сечении $x_т = 0{,}1l$ при разных значениях полуосей b/a в случае возбуждения колебаний вынуждающей силой $P\sin\nu t$ в сечении $x_P = l$: *1* – $b/a = 0$; *2* – $b/a = 0{,}1$; *3* – $b/a = 0{,}4$; *4* – $b/a = 0{,}6$; *5* – $b/a = 1$.

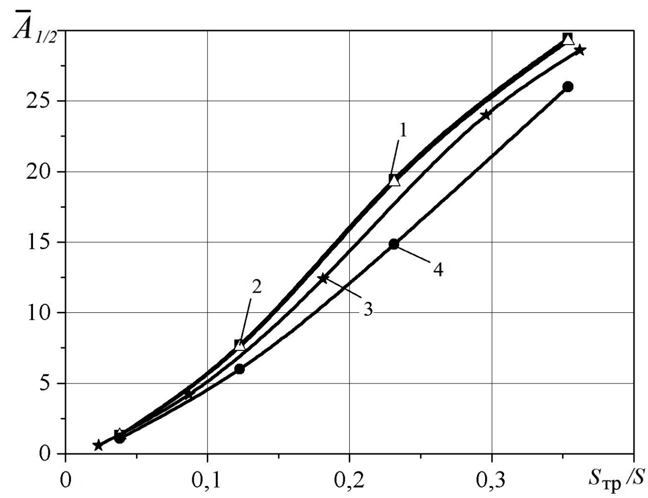
Для сравнительной оценки чувствительности показателей $\overline{A}_{2/1}$ и $\overline{A}_{1/2}$ на рис. 6,*а* штриховой линией показана также зависимость максимального относительного изменения собственной частоты резонирующей первой собственной формы колебаний стержня с дышащей трещиной от b/D при $b/a = 0$ [6]:

$$\Delta\overline{\omega}_{1т} = \frac{\omega_1 - \omega_{1т}}{\omega_1} = \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}},$$

где ω_1, $\omega_{1т}$ – собственная частота колебаний цельного стержня и с дышащей трещиной соответственно.



а



б

Рис. 7. Зависимость вибродиагностических показателей $\overline{A}_{2/1}$ (*а*) и $\overline{A}_{1/2}$ (*б*) от относительной площади $S_{тр}/S$ трещины в сечении $x_т = 0{,}1l$ при разных значениях полуосей b/a в случае возбуждения колебаний вынуждающей силой $P\sin\nu t$ в сечении $x_P = l$: *1* – $b/a = 0$; *2* – $b/a = 0{,}4$; *3* – $b/a = 0{,}8$; *4* – $b/a = 1$.

Как видно, значение $\Delta\overline{\omega}_{1т}$ для рассматриваемых глубин трещины весьма малое. Так, для максимальной относительной глубины $b/D = 0{,}4$ значение $\Delta\overline{\omega}_{1т}$ составляет 0,077 для случая $b/a = 1$ и 0,031 для $b/a = 0$.

В заключение сравним некоторые результаты расчета для трещины с прямым фронтом ($b/a = 1$) с данными проведенного численного решения с использованием конечноэлементной модели (рис. 9). Рассматривался стержень диаметром $D = 23$ мм и длиной $l = 230$ мм с трещиной глубиной $b = 5{,}84$ мм и $x_т = 23$ мм. Механические характеристики стержня: модуль упругости $E = 200$ ГПа, плотность материала $\rho = 7800$ кг/м^3, логарифмический декремент колебаний $\delta = 0{,}01$. Колебания стержня возбуждались сосредоточенной гармонической силой $P\sin\nu t$, приложенной в разных сечениях. Вибродиагностические показатели определялись, как и в работе [1], реше-

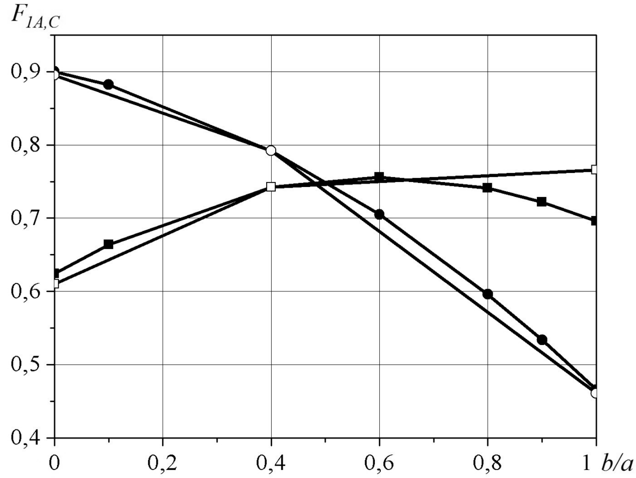


Рис. 8. Зависимость функции F_{1A} (■, □) и F_{1C} (●, ○) от отношения полуосей трещины b/a при ее относительной глубине $b/D = 0{,}3$ (темные точки) и относительной площади $S_{\text{тр}}/S = 0{,}23$ (светлые точки).

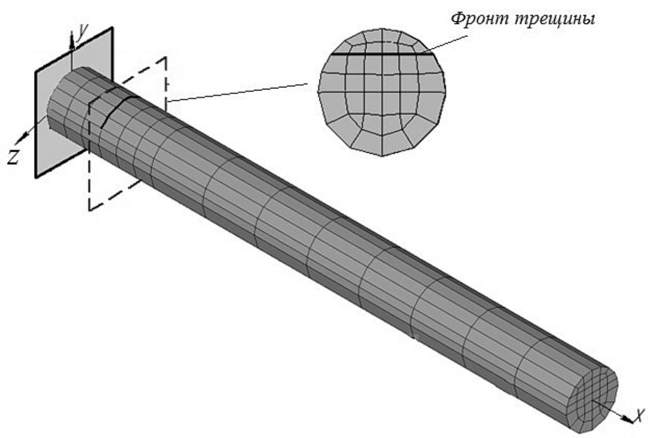
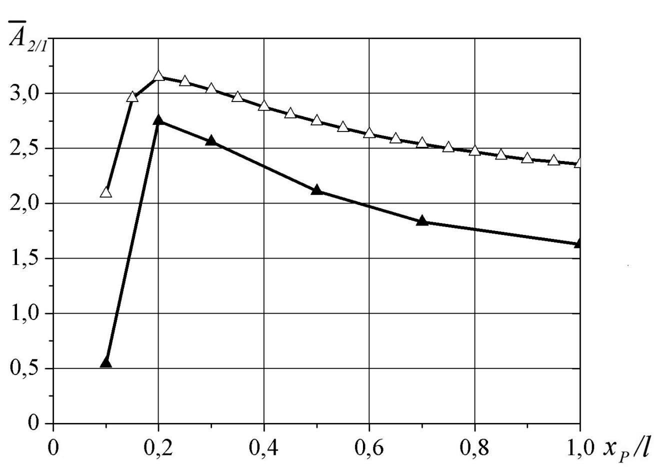
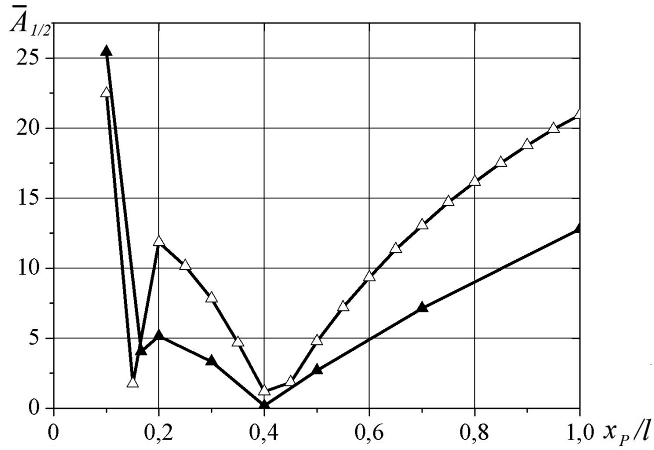


Рис. 9. Конечноэлементная модель круглого стержня с прямолинейной поверхностной дышащей трещиной.



а



б

Рис. 10. Зависимость вибродиагностических показателей $\overline{A}_{2/1}$ (*а*) и $\overline{A}_{1/2}$ (*б*) от места приложения x_P/l вынуждающей силы $P\sin\nu t$ для прямолинейной трещины относительной глубины $b/D = 0{,}254$ в сечении $x_т = 0{,}1l$, полученная с использованием формулы (21) (△) и по данным численного решения с помощью конечноэлементной модели стержня (▲).

нием контактной задачи для берегов трещины, а также с использованием метода Ньюмарка и FFT анализа. Результаты расчета и данные численного решения приведены на рис. 10 в виде зависимостей $\overline{A}_{2/1}$ и $\overline{A}_{1/2}$ от места приложения вынуждающей силы x_P. Как и в случае эллиптической трещины (рис. 3), наблюдается соответствие между характером зависимостей вибродиагностических показателей от места приложения силы x_P при существенном различии их значений, что обусловлено меньшим значением КИН для используемой конечноэлементной модели по сравнению с данными [3], принимаемыми при расчете энергетической характеристики повреждения (21).

Выводы

1. С использованием обобщенной формулы для КИН вдоль фронта полуэллиптической поверхностной трещины в стержне круглого поперечного сечения рассмотрен приближенный метод расчета возможных значений вибродиагностических показателей наличия трещины разной геометрии, относительной глубины и местоположения при супергармоническом порядка 1/2 и субгармоническом 2-го порядка резонансах по какой-либо собственной форме изгибных колебаний.

2. На примере консольного стержня при силовом и кинематическом возбуждении резонансов по первой собственной форме колебаний получены характерные расчетные зависимости вибродиагностических показателей от места приложения вынуждающей силы x_P, местоположения $x_т$ и относительной глубины b/D трещины при разных отношениях полуосей эллипса b/a. При одинаковой относительной глубине трещины наибольшее значение вибродиагностических показателей наблюдается для трещин с прямым фронтом ($b/a = 0$) и наименьшее – с полукруглым ($b/a = 1$). Уменьшение значения вибропоказателей с увеличением отношения b/a обусловлено уменьшением площади трещины при некотором изменении значения и характера распределения КИН по фронту трещины. С ростом относительной глубины трещины $b/D > 0{,}05$ для всех значений b/a фиксируется ожидаемое увеличение значений искомых показателей.

3. Сравнение результатов расчета зависимости вибродиагностических показателей от места приложения вынуждающей силы с данными проведенного численного решения с использованием конечноэлементной модели стержня с трещиной свидетельствует о полном соответствии характера определяемых зависимостей при расхождении в значениях показателей, что обусловлено меньшими значениями КИН в используемой конечноэлементной модели из-за относительно редкой сетки.

Резюме

Розглянуто метод наближеного розрахунку можливих значень вібродіагностичних показників наявності у стрижні круглого поперечного перерізу дихаючої поверхневої тріщини з різною конфігурацією її фронту (напівеліптична, напівкругла і прямолінійна) при супер- і субгармонічному резонансах будь-якої власної форми згинних коливань. Розрахунок вібродіагностичних показників наявності тріщини виконано на прикладі консольного стрижня у випадку резонансу, що відповідає першій власній формі коливань при силовому і кінематичному збудженні. Отримано залежності діагностичних показників від місця прикладання змушувальної сили, місцеположення, відносної глибини і відносної площі тріщини для різних відношень півосей еліпса та для тріщин з прямолінійним і напівкруглим фронтом. Наведено деяке порівняння розрахункових результатів із даними, отриманими за допомогою скінченноелементної моделі.

1. *Матвеев В. В.*, *Онищенко Е. А.* Вибродиагностические параметры наличия полуэллиптической дышащей трещины в стержне круглого поперечного сечения при супер- и субгармоническом резонансах // Пробл. прочности. – 2016. – № 2. – С. 5–19.
2. *Справочник* по коэффициентам интенсивности напряжений. В. 2 т. / Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 448 с.
3. *Shin C. S. and Cai C. Q.* Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending // Int. J. Fracture. – 2004. – **129**, No. 3. – P. 239–264.
4. *Carpinteri A.* Elliptical-arc surface cracks in round bars // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1992. – **15**, No. 11. – P. 1141–1153.
5. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
6. *Матвеев В. В.*, *Яковлев А. П.*, *Богинич О. Е.*, *Синенко Е. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе // Пробл. прочности. – 2014. – № 3. – С. 21–37.

Поступила 04. 09. 2017