

Исследование влияния трения между расслоившимися слоями на напряженно-деформированное состояние толстых слоистых анизотропных цилиндрических оболочек полуаналитическим методом конечных элементов

А. В. Марчук¹, С. В. Гнедаш, А. А. Апунович, А. В. Вовк

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

¹ ksm_ntu@ukr.net

В рамках пространственной теории упругости построен подход к исследованию напряженно-деформированного состояния осесимметричных цилиндрических оболочек с учетом расслоения слоев при трении между ними. Подход базируется на разделении оболочки на ряд составляющих оболочек по толщине с фиксированной кривизной каждого слоя на уровне его срединной поверхности. Для аппроксимации искомых функций в плане применяются линейные полиномы, а их распределение по толщине находится на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Предлагаемый подход можно отнести к полуаналитическому методу конечных элементов. Проанализировано влияние трения в зоне расслоения на напряженно-деформированное состояние оболочки.

Ключевые слова: толстые анизотропные слоистые цилиндрические оболочки, расслоение, учет трения, пространственная теория упругости, полуаналитический метод конечных элементов.

Введение. В настоящее время пластиковые волокнистые многослойные цилиндры широко применяются в различных областях техники. Слои таких конструкций обладают анизотропией свойств и подвержены нагрузкам, которые могут привести к высоким градиентам изменения трехмерного напряженно-деформированного состояния (НДС), что, в свою очередь, может вызвать расслоение такого рода конструкций. При расчете толстостенных оболочек необходимо учитывать изменение кривизны по ее толщине при построении уравнений равновесия и их решении, что является достаточно сложной задачей. В большинстве известных моделей расчета кривизна считается константой для всей оболочки [1–12]. В литературных источниках практически отсутствуют данные по расчету толстостенных оболочек большой кривизны при расслоении слоев с учетом трения между ними.

Цель данной работы заключается в разработке подхода, который позволит рассматривать НДС толстостенных оболочек большой кривизны в условиях осесимметричного изгиба при наличии расслоения с учетом трения. Подход основан на разделении цилиндрической оболочки по толщине концентрическими поверхностями на ряд составляющих цилиндрических оболочек (рис. 1), достаточно тонких, чтобы можно было пренебречь изменением их кривизны по толщине. Удовлетворяя условиям контакта на внешних поверхностях между составляющими оболочек, опишем напряженно-деформированное состояние исходной оболочки с дискретным учетом изменения кривизны по толщине.

Для аппроксимации искомых функций в плане используются полиномы, а их распределение по толщине конструкции отыскивается на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. Данный подход можно отнести к модификации методов, развиваемым в [2, 13, 14].

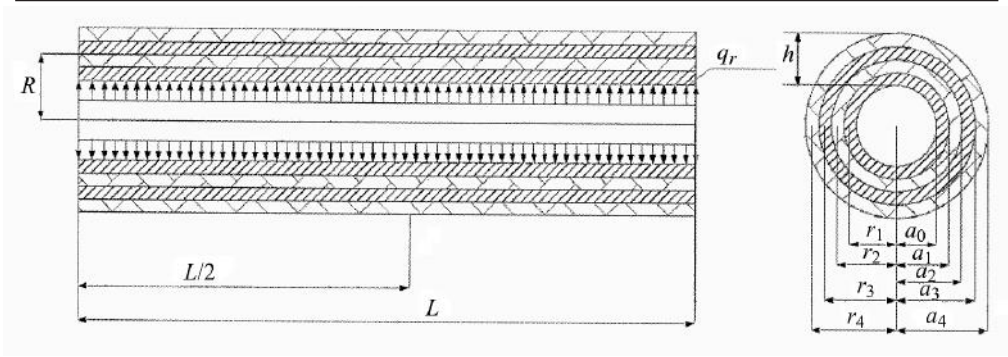


Рис. 1. Схема конструкции.

Полуаналитический метод исследования. Уравнения равновесия k -го анизотропного слоя оболочки в смешанной форме имеют вид [1]

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} - B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)} - B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0; \\
 B_{13}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{63}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x} - B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} = 0; \\
 \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_r^{(k)} - B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)} - B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0; \\
 B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{xr}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} = 0; \\
 B_{21}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r^2} U_r^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \\
 + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} = 0; \\
 B_{16}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + \\
 + B_{36}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0,
 \end{array} \right. \quad (1)$$

где характеристики $B_{ij}^{(k)}$ фигурируют в следующих уравнениях:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_{xx}^{(k)} = B_{11}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{12}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
 \sigma_{\theta\theta}^{(k)} = B_{21}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{22}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
 \sigma_{x\theta}^{(k)} = B_{61}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{62}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{63}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{66}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
 B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} = B_{13}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + e_{rr}^{(k)} + B_{36}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
 e_{r\theta}^{(k)} = B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}; \\
 e_{xr}^{(k)} = B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}.
 \end{array} \right. \quad (2)$$

Продольные и окружные напряжения находим из закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\ \sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем следующую аппроксимацию искомых функций перемещений и напряжений в плане конечного элемента [15]:

$$\begin{cases} U_x^{(k)}(x, r) = (\varphi_1(x)v_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x)v_{x2}^{(k)}(r)); \\ U_\theta^{(k)}(x, r) = (\varphi_1(x)v_{\theta1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x)v_{\theta2}^{(k)}(r)); \\ U_r^{(k)}(x, r) = (\varphi_1(x)w_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x)w_2^{(k)}(r)); \\ \sigma_{xr}^{(k)}(x, r) = (\varphi_1(x)\tau_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x)\tau_{x2}^{(k)}(r)); \\ \sigma_{\theta r}^{(k)}(x, r) = (\varphi_1(x)\tau_{\theta1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x)\tau_{\theta2}^{(k)}(r)); \\ \sigma_{rr}^{(k)}(x, r) = (\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(r)), \end{cases} \quad (4)$$

где $\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{a}$; $\varphi_2(x) = \frac{x}{a}$; a – длина конечного элемента; $v_{xi}^{(k)}(r)$, $v_{\theta i}^{(k)}(r)$, $w_i^{(k)}(r)$, $\tau_{xi}^{(k)}(r)$, $\tau_{\theta i}^{(k)}(r)$, $\sigma_i^{(k)}(r)$ – искомые функции распределения перемещений и напряжений в i -ом узле (координата x направлена вдоль оболочки).

Известная процедура Бубнова–Галеркина с использованием формулы Грина позволяет получить уравнение равновесия конечного элемента:

$$\begin{pmatrix} 0 & -k_{01} & 0 & B_{55}^{(k)}k_{00} & 0 & B_{45}^{(k)}k_{00} \\ -B_{13}^{(k)}k_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}}B_{23}^{(k)}k_{00} & -k_{01}B_{36}^{(k)} & 0 & k_{00}B_{33}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}}k_{00} & B_{45}^{(k)}k_{00} & 0 & B_{44}^{(k)}k_{00} \\ B_{11}^{(k)}k_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{12}^{(k)}k_{10} & B_{16}^{(k)}k_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}}k_{00} & B_{13}^{(k)}k_{00} & 0 \\ \frac{1}{r^{(k)}}B_{21}^{(k)}k_{01} & k_{00}\frac{1}{(r^{(k)})^2}B_{21}^{(k)} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}k_{01} & k_{10} & \frac{1}{r^{(k)}}(B_{1r}^{(k)} - 1)k_{00} & 0 \\ B_{16}^{(k)}k_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}k_{10} & B_{66}^{(k)}k_{11} & 0 & B_{36}^{(k)}k_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}}k_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x^{(k)}(r) \\ v_\theta^{(k)}(r) \\ w^{(k)}(r) \\ \tau_x^{(k)}(r) \\ \tau_\theta^{(k)}(r) \\ \sigma^{(k)}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$k_{00} = \begin{bmatrix} a/3 & a/6 \\ a/6 & a/3 \end{bmatrix}; \quad k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad k_{11} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/a \\ -1/a & 1/a \end{bmatrix};$$

$$k_{01} = k_{10}^T; \quad v_x^{(k)T} = \{v_{x1}^{(k)}(r), v_{x2}^{(k)}(r)\}; \quad v_\theta^{(k)T} = \{v_{\theta1}^{(k)}(r), v_{\theta2}^{(k)}(r)\};$$

$$w^{(k)T} = \{w_1^{(k)}(r), w_2^{(k)}(r)\}; \quad \tau_x^{(k)T} = \{\tau_{x1}^{(k)}(r), \tau_{x2}^{(k)}(r)\};$$

$$\tau_\theta^{(k)T} = \{\tau_{\theta1}^{(k)}(r), \tau_{\theta2}^{(k)}(r)\}; \quad \sigma^{(k)T} = \{\sigma_1^{(k)}(r), \sigma_2^{(k)}(r)\}.$$

Разрешающая система уравнений для слоя с учетом граничных условий может быть записана следующим образом:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -K_{01} & 0 & B_{55}^{(k)}K_{00} & 0 & B_{45}^{(k)}K_{00} \\ -B_{13}^{(k)}K_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}}B_{23}^{(k)}K_{00} & -B_{36}^{(k)}K_{01} & 0 & B_{33}^{(k)}K_{00} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}}K_{00} & B_{45}^{(k)}K_{00} & 0 & B_{44}^{(k)}K_{00} \\ B_{11}^{(k)}K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{12}^{(k)}K_{10} & B_{16}^{(k)}K_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}}K_{00} & B_{13}^{(k)}K_{10} & 0 \\ \frac{1}{r^{(k)}}B_{21}^{(k)}K_{01} & \frac{1}{(r^{(k)})^2}B_{21}^{(k)}K_{00} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}K_{01} & K_{10} & \frac{1}{r^{(k)}}(B_{1r}^{(k)}-1)K_{00} & 0 \\ B_{16}^{(k)}K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}}B_{26}^{(k)}K_{10} & B_{66}^{(k)}K_{11} & 0 & B_{36}^{(k)}K_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}}K_{00} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_{xi}^{(k)}(r)\} \\ \{v_{\theta i}^{(k)}(r)\} \\ \{w_i^{(k)}(r)\} \\ \{\tau_{xi}^{(k)}(r)\} \\ \{\tau_{\theta i}^{(k)}(r)\} \\ \{\sigma_{3i}^{(k)}(r)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Вектор искомых функций отыскивается так:

$$\begin{bmatrix} \{v_{xi}^{(k)}\} \\ \{v_{\theta i}^{(k)}\} \\ \{w_i^{(k)}\} \\ \{\tau_{xi}^{(k)}\} \\ \{\tau_{\theta i}^{(k)}\} \\ \{\sigma_{3i}^{(k)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1), \dots, \mu_{i1}^{(k)}(j), \dots, \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1), \dots, \mu_{i2}^{(k)}(j), \dots, \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1), \dots, \mu_{i3}^{(k)}(j), \dots, \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1), \dots, \mu_{i4}^{(k)}(j), \dots, \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1), \dots, \mu_{i5}^{(k)}(j), \dots, \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1), \dots, \mu_{i6}^{(k)}(j), \dots, \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{bmatrix} [C^{(k)}], \quad (7)$$

где $[C^{(k)}]^T = [C_1^{(k)} e^{r\beta_1^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}}]$; $\beta_j^{(k)}$ – корни характеристического уравнения разрешающей системы дифференциальных уравнений, которые могут быть комплексными; $\mu_{i1}^{(k)}(j)$, $\mu_{i2}^{(k)}(j)$, $\mu_{i3}^{(k)}(j)$, $\mu_{i4}^{(k)}(j)$, $\mu_{i5}^{(k)}(j)$, $\mu_{i6}^{(k)}(j)$ – ее собственные векторы; $C_j^{(k)}$ – постоянные интегрирования, которые определяются из условий контакта слоев и условий на лицевых поверхностях в каждом узле сетки разбиения конструкции на конечные элементы; J – общее количество искомых функций в слое.

В месте расслоения напряжения $\sigma_{xr}^{(k)}$, $\sigma_{xr}^{(k+1)}$ и $\sigma_{\theta r}^{(k)}$, $\sigma_{\theta r}^{(k+1)}$ направлены противоположно соответствующим перемещениям,

$$\sigma_{xr}^{(k)}(x, a_k) = k_{тр} \sigma_{rr}^{(k)}(x, a_k); \quad \sigma_{xr}^{(k+1)}(x, a_k) = k_{тр} \sigma_{rr}^{(k+1)}(x, a_k);$$

$$\sigma_{\theta r}^{(k)}(x, a_k) = k_{тр} \sigma_{rr}^{(k)}(x, a_k); \quad \sigma_{\theta r}^{(k+1)}(x, a_k) = k_{тр} \sigma_{rr}^{(k+1)}(x, a_k).$$

Числовые исследования. В качестве примера рассмотрим двухслойную анизотропную оболочку со следующими физико-механическими характеристиками: $E_x^{(1)}/E_\theta^{(1)} = 25/1$; $E_\theta^{(1)} = E_r^{(1)}$; $G_{x\theta}^{(1)}/E_r^{(1)} = 0,5/1$; $G_{\theta r}^{(1)}/E_r^{(1)} = 0,2/1$; $G_{xr}^{(1)} = G_{x\theta}^{(1)}$; $\nu_{x\theta}^{(1)} = \nu_{xr}^{(1)} = \nu_{\theta r}^{(1)} = 0,25$; $L/h = 10$; $h/R = 1/5$. Первый слой повернут на 45° , второй – на -45° . На торцах оболочки запрещены вертикальные перемещения $U_r = 0$. Варьировалось отношение толщины оболочки к ее радиусу: $h/R = 1/50$ и $1/5$. Рассматривались такие контакты слоев: жесткий, скользящий и с трением. Расчеты проводились для половины оболочки, которая делилась на 50 элементов. Равномерно распределенная нагрузка q_3 прикладывалась на внутренней поверхности оболочки.

На рис. 2 и 3 приведено распределение перемещений $\bar{U}_x = U_x E_r / q_3$ и $\bar{U}_\theta = U_\theta E_r / q_3$ на поверхностях раздела слоев для трех вариантов их контакта при $h/R = 1/50$ и $1/5$ соответственно. В табл. 1 и 2 представлены результаты расчета $\bar{U}_x = U_x E_r / q_3$; $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} / q_3$; $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / q_3$; $\bar{\sigma}_{x\theta} = \sigma_{x\theta} / q_3$ в центре оболочки на границах ее слоев при вышеуказанных отношениях толщины стенки оболочки к ее радиусу.

Т а б л и ц а 1

Значения \bar{U}_r , $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$, $\bar{\sigma}_{x\theta}$ в центре оболочки на границах ее слоев при $h/R = 1/50$

Контакт слоев	№ слоя	\bar{U}_r	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{x\theta}$
Жесткий	1	429,5225	-83,1965	-48,1593	-51,0925
		430,1211	54,3253	70,2051	64,9227
	2	430,1211	-52,9120	-37,0319	49,0168
		428,5577	81,6528	78,0881	-63,4695
Скользящий	1	664,3760	-106,6613	-73,9254	-89,5282
		662,7791	106,2822	108,4437	88,8435
	2	662,7791	-106,4944	-73,9180	89,3920
		661,4415	106,1194	108,1857	-88,7150
При $k_{тр} = 1$	1	586,4510	-96,1155	-61,8146	-72,5820
		585,7585	85,0850	95,4428	82,4120
	2	585,7585	-82,0112	-54,1963	67,6695
		584,5672	95,1368	97,2461	-80,2851

Т а б л и ц а 2

Значения $\bar{U}_r, \bar{\sigma}_{xx}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}, \bar{\sigma}_{x\theta}$ в центре оболочки на границах ее слоев при $h/R = 1/5$

Контакт слоев	№ слоя	\bar{U}_r	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$	$\bar{\sigma}_{x\theta}$
Жесткий	1	13,7914	0,3303	5,9129	3,0179
		13,3958	0,0418	5,0088	2,3887
	2	13,3958	-0,0482	4,9188	-2,2931
		13,2397	-0,0052	4,4440	-1,9777
Скользящий	1	19,6096	1,6088	7,2823	1,8257
		18,9193	-1,3949	3,4732	-1,5942
	2	18,9193	0,9301	5,9508	-1,1162
		18,5107	-0,7999	3,5715	0,9856
При $k_{тр} = 0,4$	1	16,3220	0,7370	6,5812	2,6899
		15,8346	0,0290	5,4604	2,0847
	2	15,8346	0,7921	6,2236	-2,8956
		15,5919	-0,3289	4,2143	-0,8906

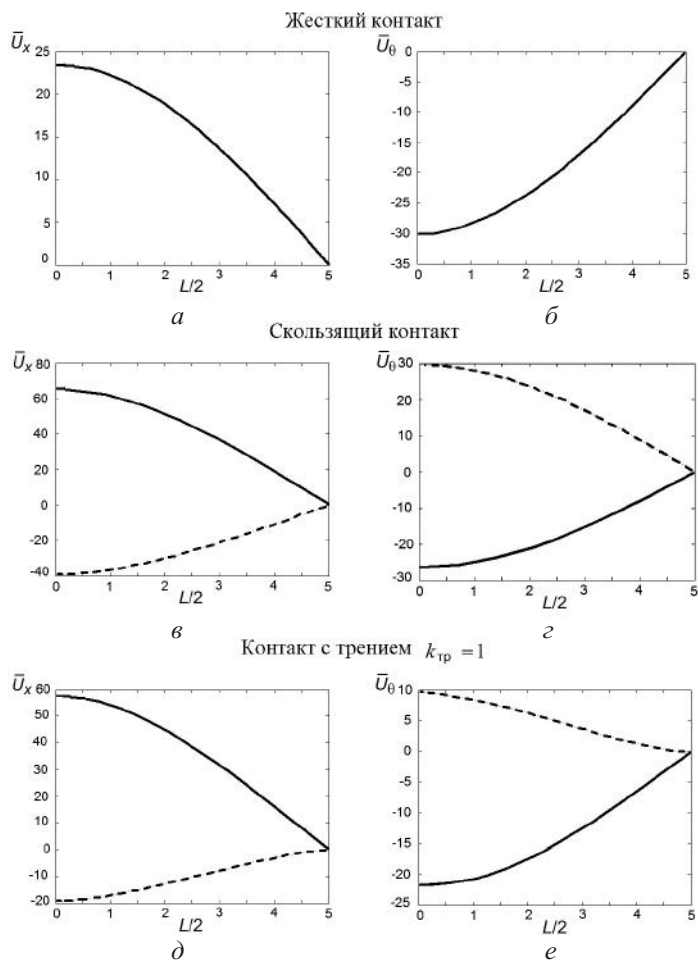


Рис. 2. Распределение перемещений $\bar{U}_x = U_x E_r / q_3$ (а, в, д) и $\bar{U}_\theta = U_\theta E_r / q_3$ (б, г, е) на поверхностях раздела слоев при $h/R = 1/50$. (Здесь и на рис. 3: штриховые линии – внутренний слой, сплошные – внешний слой.)

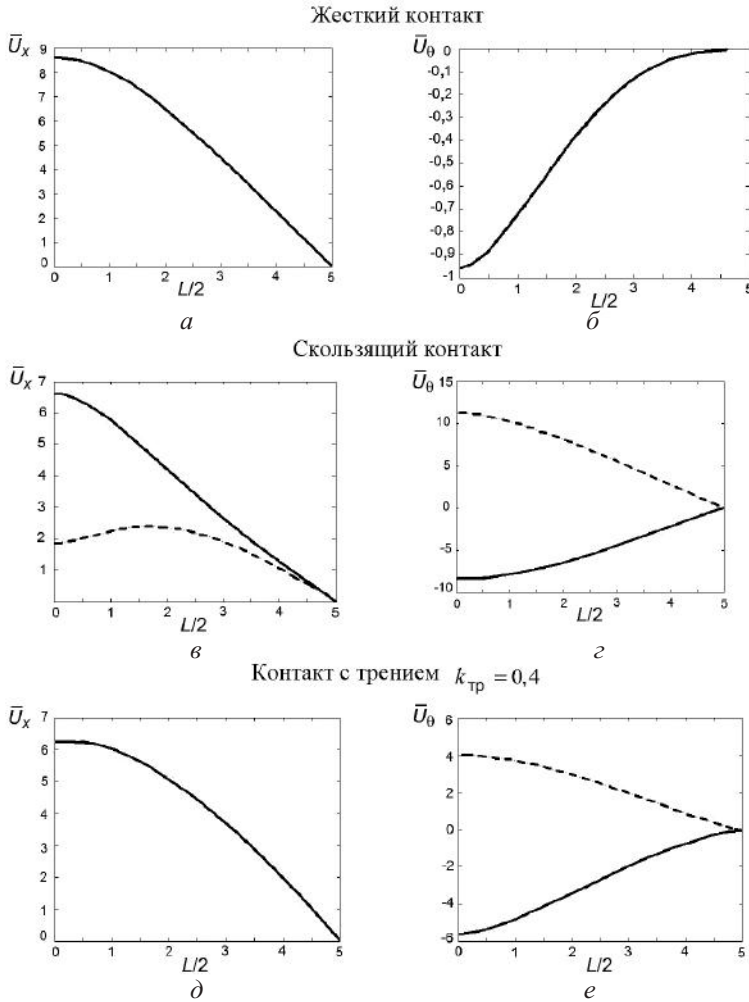


Рис. 3. Распределение перемещений $\bar{U}_x = U_x E_r / q_3$ (а, в, д) и $\bar{U}_\theta = U_\theta E_r / q_3$ (б, г, е) на поверхностях раздела слоев при $h/R = 1/5$.

В случае скользящего контакта при отношении $h/R = 1/50$ по сравнению с жестким НДС оболочки существенно повышается. Влияние трения в зоне расслоения на НДС является незначительным даже при больших значениях коэффициентов трения ($k_{тр} = 1$).

При отношении $h/R = 1/5$, как и при $h/R = 1/50$, влияние трения в зоне расслоения существенно влияет на НДС. Для скользящего контакта напряженно-деформированное состояние будет выше. При этом значительно возрастает влияние трения. При коэффициенте трения $k_{тр} = 0,4$ слои в направлении координаты x не проскальзывают, удерживаются трением, проскальзывание наблюдается только в окружном направлении. В этом случае влияние трения на НДС оказывается весьма значительным.

Выводы

1. Напряженно-деформированное состояние расслоившихся многослойных оболочек существенно выше, чем таких же оболочек с жестким контактом слоев.

2. Влияние трения на напряженно-деформированное состояние оболочки увеличивается с ростом ее кривизны и может быть весьма значительным.

Резюме

У рамках просторової теорії пружності побудовано підхід до дослідження напружено-деформованого стану вісесиметричних циліндричних оболонок за наявності розшарування шарів з урахуванням тертя між ними. Підхід базується на розділенні оболонок на ряд складових оболонок по товщині з фіксованою кривизною кожного шару на рівні його серединної поверхні. Для апроксимації шуканих функцій в плані використано лінійні поліноми, а їх розподіл по товщині визначається на основі аналітичного розв'язку відповідної системи диференціальних рівнянь. Запропонований підхід можна віднести до напіваналітичного методу скінченних елементів. Проаналізовано вплив розшарування на напружено-деформований стан оболонки.

1. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 216 с.
2. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472 с.
3. Bakaiyan H., Hosseini H., and Ameri E. Analysis of multi-layered filament-wound composite pipes under combined internal pressure and thermomechanical loading with thermal variations // *Compos. Struct.* – 2009. – **88**, No. 4. – P. 532–541.
4. Григоренко А. Я., Яремченко С. Н. Расчет напряженно-деформированного состояния неоднородных полых цилиндров // *Прикл. механика.* – 2016. – **52**, № 4. – С. 16–25.
5. Grigorenko Ya. M. and Grigorenko A. Ya. Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, No. 2. – P. 123–193.
6. Grigorenko Ya. M. and Rozhok L. S. Application of the Fourier discrete series to solving of problem on the stress state of hollow cylinder with noncircular cross section // *Ibid.* – 2014. – **50**, No. 2. – P. 105–127.
7. Hosine A., Chapelle D., Baubakar M. L., et al. Experimental and analytical investigation of the cylindrical part of a metallic vessel reinforced by filament winding while submitted to internal pressure // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2009. – **86**. – P. 649–655.
8. Лепихин П. П., Ромащенко В. А. Методы и результаты анализа напряженно-деформированного состояния и прочности многослойных толстостенных анизотропных цилиндров при динамическом нагружении (обзор). Сообщ. 2. Теоретические методы // *Пробл. прочности.* – 2013. – № 2. – С. 31–45.
9. Noor A. K., Burton W. S., and Peter J. M. Assessment of computational models for multilayered composite cylinders // *Int. J. Solids Struct.* – 1991. – **27**, No. 10. – P. 1269–1286.
10. Nzengwa R. and Tagne Simo B. H. A two-dimensional model for linear elastic thick shells // *Ibid.* – 1999. – **36**, No. 34. – P. 5141–5176.
11. Sheng H. Y. and Ye J. Q. A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comput. Method. Appl. M.* – 2003. – **192**. – P. 2441–2459.

12. *Shuvalov A. I. and Soldatos K. P.* On the successive approximation method for three-dimension analysis of radially inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vib.* – 2003. – **259**, No. 1. – P. 233–239.
13. *Баженов В. А., Гуляев О. И., Сахаров О. С., Колодей И. И.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. – Київ: КНУБА, 2012. – 248 с.
14. *Marchuk A. V. and Piskunov V. G.* Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // *Mech. Compos. Mater.* – 1997. – **33**, No. 6. – P. 553–556.
15. *Марчук А. В., Гнедаш С. В.* Анализ локальных воздействий на толстые цилиндрические оболочки при различных условиях закрепления контура // *Прикл. механика.* – 2016. – **52**, № 4. – С. 47–57.

Поступила 26. 10. 2016