

## Моделювання релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарних режимів деформування

Я. В. Павлюк

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна  
slavikp406@gmail.com

*Розглядається задача розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарного деформування. Для опису процесу деформування використовується нелінійна модель повзучості з незалежною в часі нелінійністю типу моделі Работнова. Як ядро спадковості використовується дробово-експоненційна функція. Виконано експериментальну апробацію результатів розрахунку за умов одноступеневого деформування, часткового розвантаження та циклічного деформування плексигласу.*

**Ключові слова:** нелінійні в'язкопружність, повзучість та релаксація, дробово-експоненційне ядро спадковості, нелінійно-в'язкопружні матеріали, нестационарне деформування.

**Вступ.** Розв'язок задач релаксації має практичний інтерес, оскільки відображає реальні умови експлуатації багатьох матеріалів та елементів конструкцій. Для задання залежності між деформаціями, напруженнями і часом широко використовуються теорії повзучості спадкового типу з урахуванням історії навантаження [1–5]. Основна складність, яка виникає при використанні спадкової теорії, пов'язана з вибором ядра інтегрального рівняння, знаходженням відповідної резольвенти і визначенням параметрів ядра. На сьогодні однією з найбільш перспективних теорій є нелінійна теорія Работнова [1]. Визначальні рівняння теорії отримані, виходячи з умов подібності ізохронних діаграм повзучості [6, 7]. У роботах [8, 9] умова подібності ізохронних діаграм повзучості розширена за рахунок введення в умову подібності і відповідно у визначальні рівняння теорії експериментальної діаграми миттєвого деформування. Отримані в результаті визначальні рівняння апробовано на задачах розрахунку релаксації напружень за умов нестационарного деформування. Метою даної роботи є розрахунок релаксації напружень за умов одноступеневого деформування, часткового розвантаження та циклічного деформування плексигласу.

**Постановка задачі дослідження. Об'єкт дослідження.** Визначальні рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності з незалежною від часу нелінійністю задаються співвідношеннями [1]:

$$\begin{aligned}\varphi_0(\varepsilon(t)) &= \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau; \\ \sigma(t) &= \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau,\end{aligned}\tag{1}$$

де  $\varepsilon(t)$ ,  $\varepsilon(\tau)$  – повна деформація, що містить пружну компоненту  $\varepsilon^e$  і компоненту повзучості  $\varepsilon^c$  в моменти часу  $t$  і  $\tau$ ;  $\varphi_0(\cdot)$  – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально;  $\lambda$  – реологічний параметр ( $\lambda > 0$ );  $K(t-\tau)$ ,  $R(t-\tau)$  – ядра повзучості і релаксації відповідно.

Нелінійність процесів повзучості (1) визначається видом функції  $\varphi_0(\cdot)$ , яка задається за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів виду

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_e + a_{2,j}\varepsilon_e^2 + a_{3,j}\varepsilon_e^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де  $a_{0,j}, a_{1,j}, a_{2,j}, a_{3,j}$  – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу вісі деформацій.

Ядра спадковості  $K(t-\tau)$  та  $R(t-\tau)$  задаються дробово-експоненційними функціями:

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}; \quad (3)$$

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (4)$$

де  $\alpha, \beta$  – параметри ядер, що підлягають визначенню з експеримента,  $-1 < \alpha < 0, \beta > 0$ .

Із використанням процедури обернення функцій визначальні рівняння (1) записуються так:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \psi_0 \left[ \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right]; \\ \sigma(t) &= \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau) \varphi_0(\varepsilon(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут  $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$  – обернення функції  $\varphi_0(\cdot)$ , яке задається співвідношенням

$$\varphi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (6)$$

де  $b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}$  – коефіцієнти сплайну, що апроксимують обернену функцію  $\varphi_0^{-1}(\cdot)$ .

Довільний закон зміни напружень  $\sigma_t$  і деформацій  $\varepsilon_t$  в момент навантаження  $\tau$  задається у вигляді суми множин різних значень сталих напружень  $\sigma_k$  та деформацій  $\varepsilon_k$ :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \sigma_k; \\ \varepsilon(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $h(\cdot)$  – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови  $t = \tau$ ;  $t$  – момент спостереження ( $t \geq \tau$ ).

У рамках рівнянь (5) розв'язується задача щодо розрахунку релаксації напружень за умов стаціонарного деформування для нестационарного деформування плексигласу. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними [10].

Задача включає експериментальне обґрунтування гіпотези подібності для досліджених матеріалів, визначення параметрів, що входять до визначальних рівнянь,

експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку релаксації напружень за умов стаціонарного та нестаціонарного деформування.

**Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування.** Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовано за умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Нелінійність моделі визначається нелінійністю діаграми миттєвого деформування і не залежить від часу. Існування єдиної ізохронної діаграми обґрунтовується експериментально.

Єдина ізохронна діаграма деформування відображає подібність ізохронних діаграм повзучості  $\varphi_t(\varepsilon)$  і діаграми миттєвого деформування  $\varphi_0(\varepsilon)$ . Подібність діаграм  $\varphi_t(\varepsilon)$  і  $\varphi_0(\varepsilon)$  встановлюється у площині  $\varphi - \varepsilon$  для кожного з фіксованих рівнів деформацій  $\varepsilon_i$  в інтервалі  $i = \overline{1, q}$  по параметру  $t_j$  в інтервалі  $j = \overline{1, l}$ . У цьому випадку умова подібності  $j$ -ї ізохронної діаграми повзучості  $\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$  і діаграми миттєвого деформування  $\varphi_0(\varepsilon_i, 0)$  записується так:

$$\varphi_0(\varepsilon_i, 0) = (1 + G(t_j)) \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (8)$$

де  $(1 + G(t_j))$  – функція подібності, що визначається для кожної  $j$ -ї ізохронної діаграми повзучості; функції  $\varphi_0(\cdot)$  і  $\varphi_t(\cdot)$  задають величини напруження  $\sigma_i$  по діаграмі миттєвого деформування і ізохронних діаграмах повзучості відповідно для кожного з моментів часу  $t_j$ .

Величина  $\overline{1 + G(t_j)}$  визначається зі співвідношення

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}^2}, \quad (9)$$

яке усереднює функції подібності  $(1 + G(t_j))$ , визначені для кожної  $j$ -ї ізохронної діаграми повзучості, і дозволяє розрахувати дискретні значення функції подібності і відповідно дискретні значення приведених ізохронних діаграм повзучості.

В умові подібності (9) функцію подібності  $(1 + G(t_j))$  замінимо на її осереднене значення  $\overline{1 + G(t_j)}$ , і для визначення приведених дискретних значень  $\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)}$  ізохронних діаграм повзучості отримаємо співвідношення

$$\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)} = \overline{(1 + G(t_j))} \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j). \quad (10)$$

Припустимо, що єдину ізохронну діаграму миттєвого деформування обґрунтовано з похибкою  $\delta$ , якщо приведені ізохронні діаграми повзучості не виходять за межі інтервалу, обмеженого цією величиною по відношенню до діаграми миттєвого деформування. Із достатньою для практичних розрахунків точністю величину  $\delta$  можна прийняти рівною  $\pm 5\%$ .

Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми миттєвого деформування для плексигласу наведено на рис. 1. Видно, що приведені ізохронні діаграми повзучості не виходять за межі інтервалу  $\pm 5\%$  від діаграми миттєвого деформування. Це свідчить, що гіпотезу єдиної ізохронної діаграми деформування обґрунтовано з похибкою  $\delta = 10\%$ .

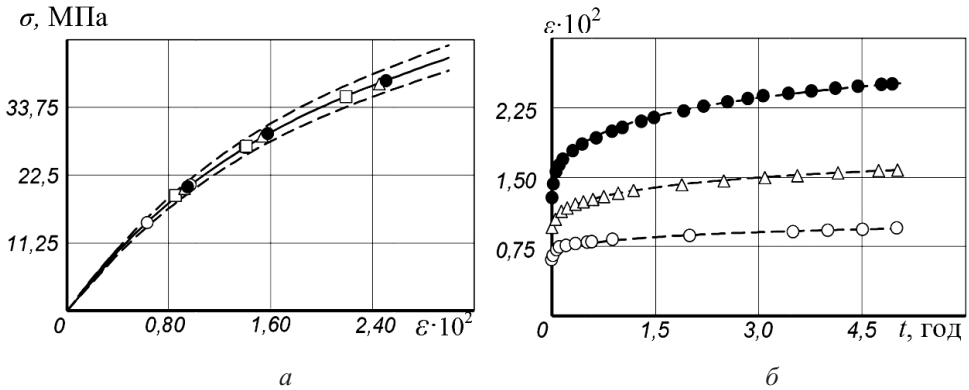


Рис. 1. Єдина ізохронна діаграма миттєвого деформування: *a* – діаграма миттєвого деформування (суцільна лінія), граничне значення єдиної ізохронної діаграми (штрихові лінії), дискретні значення приведених ізохронних кривих (точки) ( $t = 0,01$  (○),  $1,77$  (□),  $4,0$  (△),  $4,93$  год (●)); *b* – розрахункові (лінії) та експериментальні (точки) значення деформацій стаціонарної повзучості плексигласу (○ –  $\sigma_k = 13,7$  МПа; △ –  $\sigma_k = 19,6$  МПа; ● –  $\sigma_k = 25,5$  МПа).

**Визначення параметрів моделі.** Параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , що відповідають за нелінійне-в'язкопружне деформування у визначальних рівняннях нелінійної повзучості та релаксації, визначаються за умови існування єдиної ізохронної діаграми миттєвого деформування за усередненою функцією подібності  $1+G(t_j)$  з використанням експериментальних даних випробувань на повзучість при постійних напруженнях.

За критерій найкращого узгодження функції подібності (9) з експериментальними значеннями усередненої функції подібності  $(1+G(t_j))_{exp}$  прийнято мінімум квадратичного відхилення розрахункових від експериментальних значень усередненої функції подібності  $(1+G(t_j))_{exp}$ . Задача зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{i=1}^l \left\{ \overline{(1+G(t_j))_{exp}} - \left[ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha)]} \right] \right\}^2. \quad (11)$$

Мінімізація функціонала (11) здійснюється з використанням ітераційного методу Лівенберга–Маркардта [11]. Значення параметрів ядра  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , що розраховані згідно з (11), для плексигласу такі:  $\alpha = -0,60$ ;  $\beta = 0,4673 \text{ год}^{-(1+\alpha)}$ ;  $\lambda = 0,441 \text{ год}^{-(1+\alpha)}$ . Порівняння розрахункових даних з експериментальними свідчить про їх задовільне узгодження.

Значення коефіцієнтів сплайн-апроксимації (6), які задають зворотню діаграму миттєвого деформування  $\varphi_0(\cdot)$  у рівнянні (5), для плексигласу такі:  $b_0 = 0$ ;  $b_1 = 4,225046 \cdot 10^{-3} \text{ МПа}^{-1}$ ;  $b_2 = -2,903116 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-2}$ ;  $b_3 = 2,343273 \cdot 10^{-7} \text{ МПа}^{-3}$ .

**Повзучість за умов стаціонарного навантаження.** Умова навантаження постійними у часі напруженнями при варіюванні величини напруження  $\sigma_k$  задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (12)$$

отриманим із (7) за умови  $t_{k+1} > t$ .

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умови постійних напружень на основі (5) з урахуванням (12) записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_{0,j} + b_{1,j}h(t)\sigma_k \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + \\ & + b_{2,j}h(t)\sigma_k \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ & + b_{3,j}h(t)\sigma_k \left( 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right)^3, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (13)$$

де коефіцієнти  $b_{0,j}$ ,  $b_{1,j}$ ,  $b_{2,j}$ ,  $b_{3,j}$  визначаються за результатами апроксимації функції  $\psi_0(\cdot)$  згладжуючим кубічним сплайном (6). Значення коефіцієнтів сплайн-апроксимації (2), які задають діаграму миттєвого деформування у рівнянні (5), такі:  $a_0 = 0$ ;  $a_1 = 2716,491$  МПа;  $a_2 = -65884,8$  МПа;  $a_3 = 733806,0$  МПа.

У режимі стаціонарного навантаження (12) на підставі рівняння (13) розраховано й експериментально апробовано деформації повзучості нелінійно-в'язкопружних композитів та їх компонентів для декількох рівнів постійних напружень  $\sigma_k$ . Результати розрахунків наведено на рис. 1,б (лінії), а експериментальні дані (точки) отримано за різних напружень  $\sigma_k$ .

Як видно з рис. 1,б, результати розрахунку деформацій стаціонарної повзучості за рівнянням (13) достатньо задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

**Розрахунок релаксації напружень за умов одноступеневого деформування.** Найбільш обґрунтовану експериментальну перевірку застосування дробово-експоненційного ядра (3) і параметрів ядра, отриманих за даними випробувань на повзучість, проведено при розрахунку релаксації напружень.

Умова навантаження (7) для режиму однократного ступеневого деформування  $m = 2$  конкретизується у вигляді

$$\varepsilon(t) = h(t - t_1)\varepsilon_1 + h(t - t_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (14)$$

де  $\varepsilon_1$  – початкові деформації в момент часу  $\tau = 0$ ;  $\varepsilon_2$  – деформація в момент часу  $\tau = t_1$ .

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одноступеневого деформування на основі (5) з урахуванням (14) записується так:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sum_{i=0}^3 a_{1,j} \left( \varepsilon(t)^i - \lambda \left[ (\varepsilon_1)^i \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + (\varepsilon_2)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right] \right). \end{aligned} \quad (15)$$

На рис. 2,а наведено розрахункові та експериментальні дані. Розрахунки проведено з використанням вищевказаних значень коефіцієнтів  $a_i$  та параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ . Експериментальні дані взято з роботи [10].

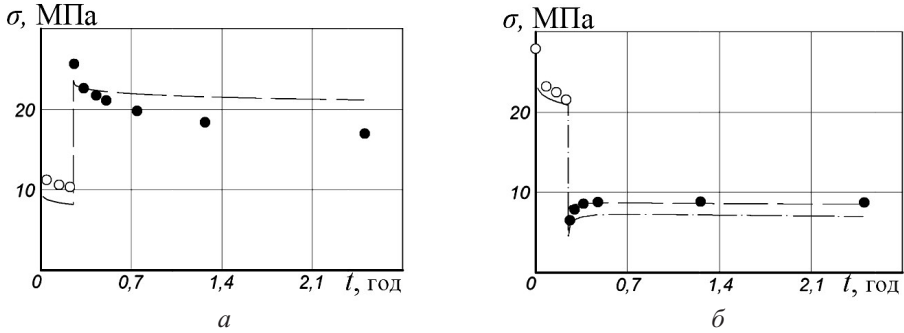


Рис. 2. Розрахункові (лінії) й експериментальні (точки) значення релаксації напружень за умов одноступеневого деформування (а) та часткового розвантаження (б): а –  $\varepsilon_k = 0,004$  (○), 0,012 (●); б –  $\varepsilon_k = 0,012$  (○), 0,004 (●).

На рис. 2,б наведено результати перевірки принципу суперпозиції для нелінійних матеріалів (штрихпунктирна лінія). Як видно із зіставлення розрахункових даних з експериментальними, принцип суперпозиції не працює для нелінійних матеріалів.

**Розрахунок релаксації напружень за умов циклічного деформування.** Умова навантаження (7) для режиму циклічного деформування, що задається програмами навантаження, наведеними на рис. 3,а,в, конкретизується у вигляді

$$\varepsilon(t) = h(t - t_1) \varepsilon_1 \pm \sum_{k=1}^{2\nu-1} h(t - t_{k+1}) |\Delta \varepsilon_k|, \quad (16)$$

де  $\varepsilon_1$  – початкове значення деформації в момент часу  $t_1$ ;  $\Delta \varepsilon_k$  – амплітуда напруження у циклі,  $\Delta \varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$  – приріст ( $\varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k$ ) або зменшення ( $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ ) деформації в момент часу  $t_k$ ;  $\nu$  – число циклів деформування.

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов циклічного деформування на основі (5) з урахуванням (16) записується так:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \sum_{i=1}^3 a_{i,j} \left\{ \left( h(t - t_1) \varepsilon_1 (0) \pm \sum_{k=1}^{2\nu-1} h(t - t_{k+1}) |\Delta \varepsilon_k| \right)^i - \right. \\ \left. - \lambda \left[ \sum_{k=1}^{2\nu-1} (\varepsilon_k)^i \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_k)^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(n+1)]} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_{k+1})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(n+1)]} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\varepsilon_{2\nu})^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_{2\nu})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(n+1)]} \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Розрахункові та експериментальні дані наведено на рис. 3,б,г. Розрахунки проведено з використанням вищевказаних значень коефіцієнтів  $a_i$  і параметрів  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ . Експериментальні дані взято з роботи [10].

Результати розрахунку (рис. 3,б,г) свідчать, що структура запропонованої моделі дозволяє якісно описати процеси нестационарної релаксації. Варто відмітити, що розрахунки проводились із використанням параметрів, отриманих із базового експерименту на повзучість.

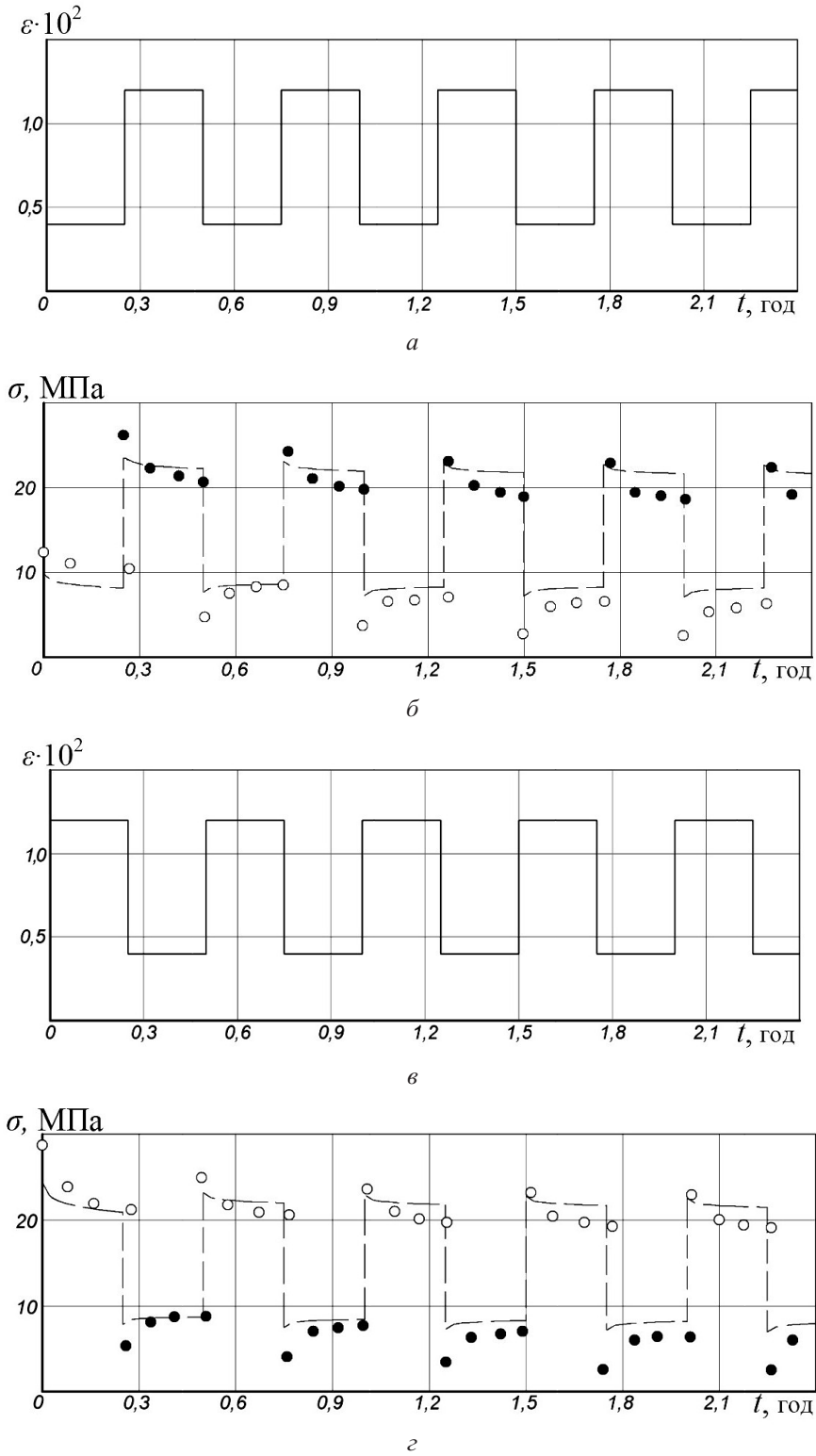


Рис. 3. Програма навантаження (а, в) та розрахункові (лінії) й експериментальні (точки) значення релаксації напружень плексигласу (б, г):  $\circ$  –  $\varepsilon_k = 0,004$ ;  $\bullet$  –  $\varepsilon_k = 0,012$ .

Найбільша похибка одержана в режимі циклічного навантаження (рис. 3,б), що зумовлено виникненням у процесі деформування незворотних деформацій, які моделлю не враховуються.

## Висновки

1. Задача з побудови системи розв'язувальних рівнянь для прогнозування деформацій повзучості і релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних конструкційних матеріалів за умов нестационарного одновісного розтягу та стиску залишається однією з найбільш актуальних у механіці твердого деформівного тіла і має велике теоретичне і прикладне значення. Успішний розв'язок цієї задачі зумовлений необхідністю створення надійних методів розрахунку напружено-деформованого стану композитних матеріалів і конструкцій з них у нелінійній області довготривалого в'язкопружного деформування за умов нестационарного навантаження і прогнозування на цій основі довготривалої міцності елементів конструкцій.

2. Задовільне узгодження результатів розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів з експериментальними даними зумовлено перш за все використанням нелінійної моделі в'язкопружності з незалежною від часу нелінійністю зі згладжуючими кубічними сплайнами, прийнятими як апроксимації нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі, та дробово-експоненційних функцій, що задають ядра спадковості.

## Резюме

Рассматривается задача расчета релаксации напряжений нелинейно-вязкоупругих материалов в условиях нестационарного деформирования. Для описания процесса деформирования используется нелинейная модель ползучести с независимой во времени нелинейностью типа модели Работнова. В качестве ядра наследственности используется дробно-экспоненциальная функция. Выполнена экспериментальная апробация результатов расчета при одноступенчатом деформировании, частичной разгрузке и циклическом деформировании плексигласа.

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Работнов Ю. Н., Паперник А. Х., Степанычев Е. И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. – 1971. – № 1. – С. 74–87.
3. Брызгалин Г. И. К проверке теории наследственного возврата // Ползучесть и длительная прочность. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1963. – С. 145–147.
4. Брызгалин Г. И. О ползучести при переменных напряжениях // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1962. – № 3. – С. 73–77.
5. Голуб В. П., Павлюк Я. В., Фернати П. В. Нестационарная ползучесть линейных вязкоупругих материалов при одноосном растяжении и сжатии // Теорет. и прикл. механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 40–49.
6. Суворова Ю. В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // Механика полимеров. – 1977. – № 6. – С. 976–980.
7. Суворова Ю. В., Васильев А. Е., Машинская Г. П., Финогенов Г. Н. Исследование процессов деформирования органотекстолитов // Механика композитных материалов. – 1980. – № 3. – С. 538–556.



8. Фернати П. В., Павлюк Я. В., Рагуліна В. С. Повзучість нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарного одновісного навантаження // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2012. – № 6. – С. 103–109.
9. Павлюк Я. В., Романов А. В., Фернати П. В. Модифікація метода определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – № 7 (53). – С. 65–72.
10. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. – М.: Наука, 1973. – 287 с.
11. Moré J. J., Garbow B. S., and Hillstom K. E. Users Guide for MINPACK-1 // Argonne National Laboratory Report ANL-80-74, Argonne, IL, 1980. – P. 640–650.

Поступила 07. 04. 2016