УДК 539.4

# Фактор поврежденности в оценке напряженно-деформированного состояния в зонах концентрации напряжений

**Н. И. Бобырь, В. В. Коваль**

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского”, Киев, Украина

mmidpm@gmail.com

*Приведены и проанализированы инженерные методы расчета напряжений и деформаций в зонах концентрации при упругопластическом деформировании конструктивных элементов. Показано, что для оценки кинетики эффективных коэффициентов концентрации напряжений и деформаций наиболее приемлемой по точности является модификация Махутовым уравнения Нойбера. Введено понятие рассеянной поврежденности. Влияние рассеянных повреждений на оценку напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов показано на примере упругопластического деформирования пластины с отверстием.*

***Ключевые слова***: концентрация напряжений и деформаций, поврежденность, методы расчета напряженно-деформированного состояния, механические свойства конструкционных материалов.

**Введение**. Повышение достоверности оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций и прогнозирования их ресурса как на стадии проектирования, так и на стадии эксплуатации в настоящее время обусловлено введением в систему определяющих уравнений параметров поврежденности, как правило, в виде кинетических уравнений [1–4]. При этом для инженерных расчетов используют феноменологический подход, который базируется на основных положениях континуальной механики повреждений (КМП). Идеи этого подхода впервые были сформулированы в работах [1, 2] применительно к разрушению в условиях одноосной ползучести.

В настоящее время модель КМП успешно применяется в качестве универсального метода решения различных задач разрушения на стадии зарождения макротрещины. Для начально-изотропного в неповрежденного материала в этом случае принимается следующее:

термосиловое эксплуатационное нагружение (деформирование) сопровождается накоплением рассеянных повреждений в виде непрерывных и необратимых микроструктурных изменений в материале;

рассеянные повреждения равномерно возникают и развиваются в каждом репрезентативном структурном элементе материала;

в качестве такого репрезентативного элемента ориентировочно принимается линейный размер зерна в поликристаллическом материале;

наличие порога поврежденности (предел пропорциональности для задач теории пластичности и предел выносливости для инженерных);

рассеянные повреждения интегрально влияют на деградацию основных механических характеристик конструкционных материалов при различных видах нагружения;

влияние первого инварианта тензора напряжений $I_1(T_\sigma)$ на кинетику процесса рассеянного разрушения;

нелинейная зависимость накопления повреждений в конструкционном материале от напряжений, деформаций, времени или числа циклов.

В качестве параметра поврежденности в первом приближении принимают скалярный параметр, основанный на деформационном или энергетическом подходе. В КМП используется, как правило, энергетический подход. Он базируется на результатах исследований в области материаловедения и механики повреждений, а также на некоторых разделах термодинамики необратимых процессов, теории инвариантов, тензорного анализа и механике твердого деформируемого тела [3, 4].

В зонах концентрации, где наблюдается существенно неоднородное распределение амплитудных значений напряжений и деформаций в процессе циклического упрочнения или разупрочнения, вероятное локальное упругопластическое деформирование сопровождается накоплением рассеянных повреждений.

Применительно к малоцикловому нагружению в настоящее время развиваются два основных направления: первое предусматривает численное моделирование процессов малоциклового нагружения (деформирования) конструкционных материалов на основе концепции обобщенной диаграммы циклического деформирования [5]; второе (менее трудоемкое) базируется на разработке приближенных инженерных методов оценки изменения в процессе термосилового нагружения эффективных коэффициентов концентрации по напряжениям $K_\sigma$ и деформациям $K_\varepsilon$ в упругопластической области исходя из известных значений теоретического коэффициента концентрации напряжений $\alpha_\sigma$ в упругой области [6–9].

Целью данной работы является определение достоверности использования современных инженерных методов оценки эффективных коэффициентов концентрации напряжений и деформаций, а также возможность уточнения расчетов путем введения параметров поврежденности.

**Методы определения эффективных коэффициентов концентрации**. Для одного вида концентратора напряжений сравним результаты расчета $K_\sigma$ и $K_\varepsilon$ по наиболее часто применяемым в настоящее время уравнениям.

Согласно уравнению Нойбера, имеем [6]

$$K_\sigma K_\varepsilon = \alpha_\sigma^2; \tag{1}$$

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{i\,\max}}{\sigma_{i\text{н}}}; \qquad K_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{i\,\max}}{\varepsilon_{i\text{н}}}, \tag{2}$$

где $\sigma_{i\,\max}$, $\varepsilon_{i\,\max}$, $\sigma_{i\text{н}}$, $\varepsilon_{i\text{н}}$ – интенсивности максимальных и номинальных напряжений и деформаций соответственно.

Для металлических материалов согласно (1) получены завышенные значения $K_\sigma$ и $K_\varepsilon$, особенно по деформациям [5, 7].

Метод Глинки базируется на предположении, что удельная энергия деформации в основе концентратора $W_\sigma$ равна номинальной удельной энергии $W_\text{н}$ [8]:

$$W_\sigma = \alpha_\sigma^2 W_\text{н}, \tag{3}$$

где

$$W_\sigma = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i(\varepsilon_i)\,d\varepsilon_i; \qquad W_\text{н} = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_{i\text{н}}(\varepsilon_{i\text{н}})\,d\varepsilon_{i\text{н}}.$$

Модификация Махутовым уравнения Нойбера предусматривает учет вида диаграммы деформирования, в том числе и циклической. Для статического нагружения она записывается так [9]:

$$\frac{K_\sigma K_\varepsilon}{\alpha_\sigma^2} = \frac{1}{(\alpha_\sigma \bar{\sigma}_{\text{н}})^{n(1-\bar{m})\left[1-\left(\bar{\sigma}_{\text{н}} - \frac{1}{\alpha_\sigma}\right)\right]}}, \tag{4}$$

где $\bar{\sigma}_{\text{н}} = \sigma_{\text{н}} / \sigma_{\text{пц}}$ – относительное номинальное напряжение; $n$ – постоянная, определяемая из расчета или эксперимента для заданных $\alpha_\sigma$ и $\bar{\sigma}_{\text{н}}$; $\bar{m}$ – коэффициент упрочнения.

Правая часть выражения (4) для предельного упругого состояния равна единице. При увеличении упругопластических деформаций данное значение уменьшается до определенного минимума, что соответствует потере устойчивости пластической деформации в зоне концентратора.

Модификация Биргером уравнения Нойбера предусматривает, что действительная деформация в зоне концентратора имеет вид

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i\,\max} + \varepsilon_{i\,\min}); \qquad \varepsilon_{i\,\min} = \alpha_\sigma \varepsilon_{i\text{н}}; \qquad \varepsilon_{i\,\max} = \frac{\alpha_\sigma^2}{K_\sigma} \varepsilon_{i\text{н}}. \tag{5}$$

После подстановки величины $K_\varepsilon$ из (2) в (5) и последующего преобразования получим зависимость [10]

$$K_\sigma K_\varepsilon = \frac{\alpha_\sigma^2}{2}\left(1 + \frac{K_\sigma}{\alpha_\sigma}\right). \tag{6}$$

Для проверки достоверности пределов применимости уравнений (1), (3), (4) и (6) проведем расчет НДС цилиндрического образца диаметром 30 мм с кольцевой выточкой радиусом $R = 3$ мм из алюминиевого сплава АМг5М при статическом нагружении. Теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_\sigma = 2{,}77$. Образец нагружали осевой силой с напряжением в зоне выточки $\sigma_{\text{н}} = 95$ МПа. Расчет НДС в зоне концентратора выполнен с использованием программного пакета Femap with NX Nastran. Аналитические значения интенсивностей максимальных напряжений и деформаций рассчитывали по (2) с учетом уравнений (1), (3), (4) и (6).

Анализ применимости различных приближенных методов оценки концентрации напряжений показывает, что наиболее приемлемыми для инженерных расчетов являются методы Биргера и Махутова. Средняя погрешность по этим методам по сравнению с конечноэлементным расчетом составляет 4,6 и 3,3% соответственно.

В рамках общего термодинамического подхода к описанию внутренних необратимых процессов в твердом деформируемом теле в работе [10] предложена феноменологическая модель кинетики накопления рассеянных повреждений:

$$\frac{dD}{dt} = \left\{\frac{\sigma_i^2}{2EB}\left[\frac{2}{3}(1+\mu)\left(\chi + (1-\chi)\frac{\sigma_1}{\sigma_i}\right)^2 + 3(1-2\mu)Q_\sigma^2\right]\right\}^c \xi_i^{(p)}, \tag{7}$$

где $B$, $c$ – параметры материала; $\mu$ – коэффициент Пуассона; $Q_\sigma$ – параметр жесткости нагружения, $Q_\sigma = \sigma_0 / \sigma_i$; $\xi_i^{(p)}$ – интенсивность скорости пластической деформации, $\xi_i^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}\xi_{ij}^{(p)}\xi_{ij}^{(p)}}$.

Поскольку введение в зависимость (7) эквивалентного напряжения типа Писаренко–Лебедева ($\sigma_{\text{экв}} = \chi\sigma_i + (1-\chi)\sigma_1$) [11] позволяет учитывать два механизма разрушения: отрыв и срез, ее можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{dD}{dt} = \left[\frac{\sigma_i^2}{2EB} R_\sigma\right]^c \xi_i^{(p)}, \tag{8}$$

где $R_\sigma$ – функция вида напряженного состояния,

$$R_\sigma = \frac{2}{3}(1+\mu)\left[\chi + (1-\chi)\frac{\sigma_1}{\sigma_i}\right]^2 + 3(1-2\mu)Q_\sigma^2.$$

Данная функция может принимать такие значения: $R_\sigma = 1$ (при растяжении); $R_\sigma = \frac{2}{3}\chi^2(1+\mu) + \frac{1}{3}(1-2\mu)$ (при сжатии) и $R_\sigma = \frac{2}{9}(1+\mu)(1+\sqrt{3}\chi - \chi)^2$ (при кручении).

Параметры $B$ и $c$ определяются при испытании на растяжение образцов.

Зависимость (8) для степенного закона упрочнения $\sigma_i = A(\varepsilon_i^{(p)})^m$ после интегрирования принимает вид

$$D = \left[\frac{A^2}{2EB}\right]^c \frac{1}{S}[(\varepsilon^{(p)})^S - (\varepsilon_m^{(p)})^S], \tag{9}$$

где $S$ – параметр материала, $S = 2mc + 1$; $\varepsilon^{(p)}$ и $\varepsilon_{\text{т}}^{(p)}$ – текущее и пороговое (на уровне предела текучести) значение пластической деформации соответственно.

Уравнения (8) и (9) записаны для решения задач теории пластичности. Для решения задач прогнозирования ресурса элементов конструкций необходимо учитывать, что локальная пластическая деформация возникает в репрезентативном элементе еще на уровне предела выносливости материала [12]. Это видно из рис. 1, где показан начальный участок кривой накопления рассеянных повреждений в материале, который получен согласно методике [13]. Исследование проводили при температуре $T = 293$ К.

С учетом кинетики накопления рассеянных повреждений на начальном участке уравнение (9) принимает вид

$$D_R = D_{\text{т}} + \left[\frac{A^2}{2EB}\right]^c \frac{(\varepsilon^{(p)})^S}{S}, \tag{10}$$

где $D_{\text{т}}$ – предельная поврежденность материала на уровне предела пропорциональности (текучести).

Зависимость $D_{\text{т}}$ от уровня предельной пластичности материала показана на рис. 2.

Полученные экспериментальные результаты описываются следующей зависимостью:

$$D_{\text{т}} = K_1\left(\frac{\psi_R}{\delta}\right)^2 + K_2\left(\frac{\psi_R}{\delta}\right), \tag{11}$$

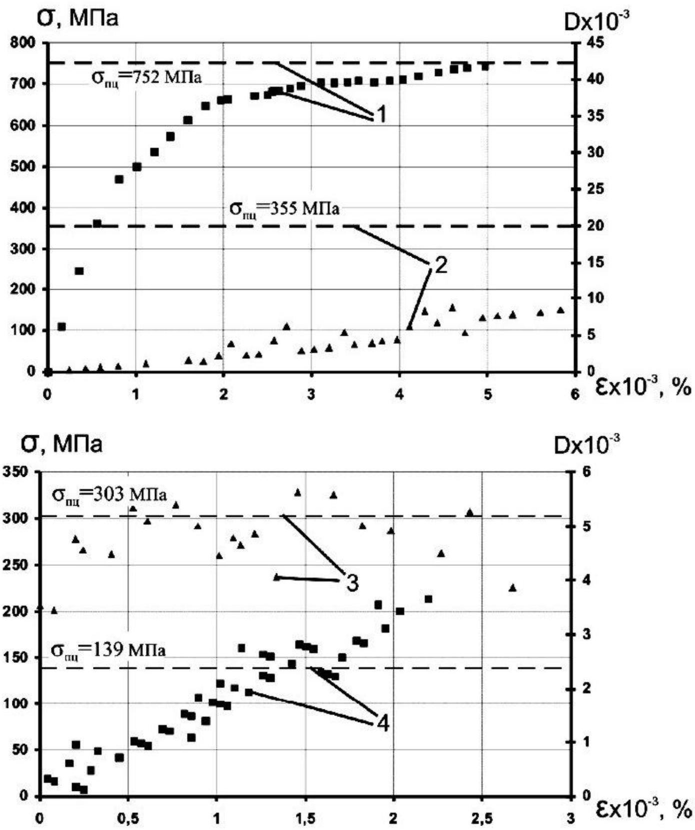


Рис. 1. Закономерности накопления повреждений на начальном участке диаграммы деформирования при одноосном растяжении образцов из сталей 18Х2Н4ВА (*1*), 15ХСНД (*3*), 12Х18Н10Т (*4*) и сплава Д16Т (*2*).

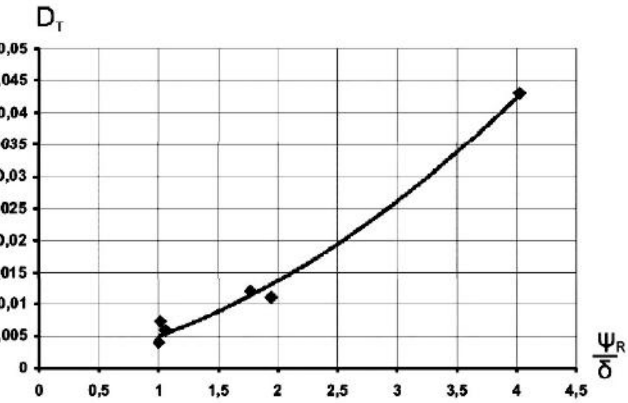


Рис. 2. Зависимость параметра поврежденности на уровне предела текучести от пластических свойств металлических материалов.

где $\delta$ – относительное удлинение; $\psi_R$ – относительное сужение после разрыва; $K_1$ и $K_2$ – коэффициенты, $K_1 = 19 \cdot 10^{-4}$, $K_2 = 31 \cdot 10^{-4}$.

Согласно рис. 3 предельное значение параметра поврежденности $D_R$ линейно зависит от пластических свойств металлических материалов, $D_R = 0{,}0078\psi_R$.

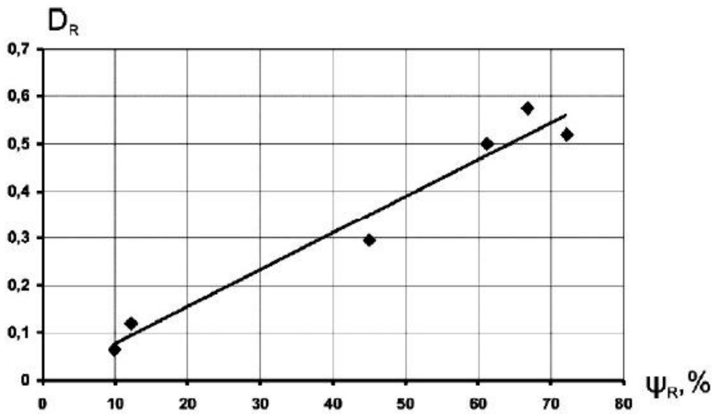


Рис. 3. Зависимость предельного значения параметра поврежденности от величины максимального относительного поперечного сужения металлических материалов.

Конкретизация параметра поврежденности позволяет использовать понятие эффективных напряжений $\sigma_{\text{эф}}$ в диаграмме деформирования материала. Согласно этому подходу принимается гипотеза об инвариантности деформаций в поврежденном и неповрежденном материале, а эффективные напряжения определяются через действительное значение напряжений $\sigma_{\text{д}}$ и соответствующее ему значение повреждения $D(\varepsilon)$:

$$\sigma_{\text{эф}} = \frac{\sigma_{\text{д}}}{1 - D(\varepsilon)}. \tag{12}$$

Для степенной аппроксимации диаграммы деформирования в относительных величинах имеем

$$\overline{\sigma} = \begin{cases} \overline{\varepsilon}^{\overline{m}} & \text{для} \quad \sigma > \sigma_{\text{т}}; \\ \overline{\varepsilon} & \text{для} \quad \sigma \le \sigma_{\text{т}}, \end{cases} \tag{13}$$

где $\overline{\sigma}$, $\overline{\varepsilon}$ – относительные напряжения и деформации соответственно, $\overline{\sigma} = \sigma/\sigma_{\text{т}}$, $\overline{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_{\text{т}}$; $\sigma_{\text{т}}$ и $\varepsilon_{\text{т}}$ – предел текучести (пропорциональности) по напряжениям и деформациям соответственно.

Если действительную и эффективную диаграммы деформирования в упругопластической области описать зависимостью типа (13), то с учетом уравнения (12) получим зависимость коэффициента упрочнения для эффективной диаграммы $\overline{m}_{\text{эф}}$ от соответствующего коэффициента для действительной $\overline{m}_{\text{д}}$:

$$\overline{m}_{\text{эф}} = \overline{m}_{\text{д}} + \log_{\overline{\varepsilon}} \left( \frac{1 - D_{\text{т}}}{1 - D(\overline{\varepsilon})} \right). \tag{14}$$

Таким образом, оценка параметра поврежденности и эффективного коэффициента упрочнения диаграммы деформирования согласно (10)–(12), (14) позволяет модернизировать расчетный метод Махутова путем уточнения правой части зависимости (4).

Значения пределов текучести $\sigma_{\text{т}}$ и пределов прочности $\sigma_{\text{в}}$ для диаграмм деформирования некоторых металлических материалов, а также величины параметров рассеянных повреждений приведены в таблице.

**Механические свойства материалов и параметры рассеянных повреждений**

| Материал | $\sigma_т$, МПа | | $\sigma_в$, МПа | | Повреждение | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $D_т$ | $D_R$ |
| Д16Т | $\frac{398}{399}$ | (402) | $\frac{532}{558}$ | (582) | 0,0075 | 0,12 |
| 18Х2Н4ВА | $\frac{960}{1014}$ | (1056) | $\frac{1343}{1516}$ | (1649) | 0,043 | 0,575 |
| 15ХСНД | $\frac{349}{352}$ | (359) | $\frac{515}{600}$ | (633) | 0,012 | 0,50 |
| 12Х18Н10Т | $\frac{248}{249}$ | (252) | $\frac{627}{1061}$ | (1171) | 0,006 | 0,52 |
| ВТ22 | $\frac{1236}{1253}$ | (1264) | $\frac{1414}{1590}$ | (1672) | 0,011 | 0,065 |
| 07Х16Н6 | $\frac{710}{736}$ | (740) | $\frac{951}{1298}$ | (1534) | 0,004 | 0,295 |

**Примечание**. Над чертой приведены значения для условной диаграммы, под чертой – для действительной, в скобках – для эффективной.

Относительно незначительное влияние рассеянных повреждений на величину предела текучести при статическом нагружении дает существенный результат при расчете ресурса на мало- и многоцикловую усталость при использовании деформационных или энергетических критериев.

Рассмотрим влияние поврежденности на напряженно-деформированное состояние в условиях концентрации напряжений на примере пластины с отверстием.

Экспериментальная диаграмма деформирования конструкционных материалов в численных расчетах задавалась с помощью функции Multilinear Isotropic Herdening. Конечноэлементная сетка моделировалась путем разбиения пластины на отдельные зоны. В зоне концентрации напряжений сетка соответствующим образом сгущалась для повышения точности оценки НДС. Эта процедура выполнялась до тех пор, пока разница между двумя последовательными решениями не составляла менее 2%. Величина теоретического коэффициента концентрации напряжений $\alpha_\sigma$ определялась из упругого решения. Уровень повреждений при упругопластическом деформировании пластины определялся в соответствии с (10).

При расчете НДС с помощью пакета ANSYS использовались конечные элементы типа PLANE 82, поскольку они обеспечивают более точную аппроксимацию геометрии концентратора. Модель поврежденности вводилась в качестве подпрограммы пользователя. Это позволяет получать поля распределения рассеянных повреждений в зоне концентрации напряжений, а также оценить предельное состояние конструктивного элемента.

Пример результатов численного расчета полей распределения повреждений в зоне отверстия при одноосном активном растяжении пластины при величине внешней растягивающей нагрузки 200 МПа приведен на рис. 4.

Видно, что с увеличением диаметра отверстия растут зона повреждений в области концентратора и максимальное значение поврежденности.

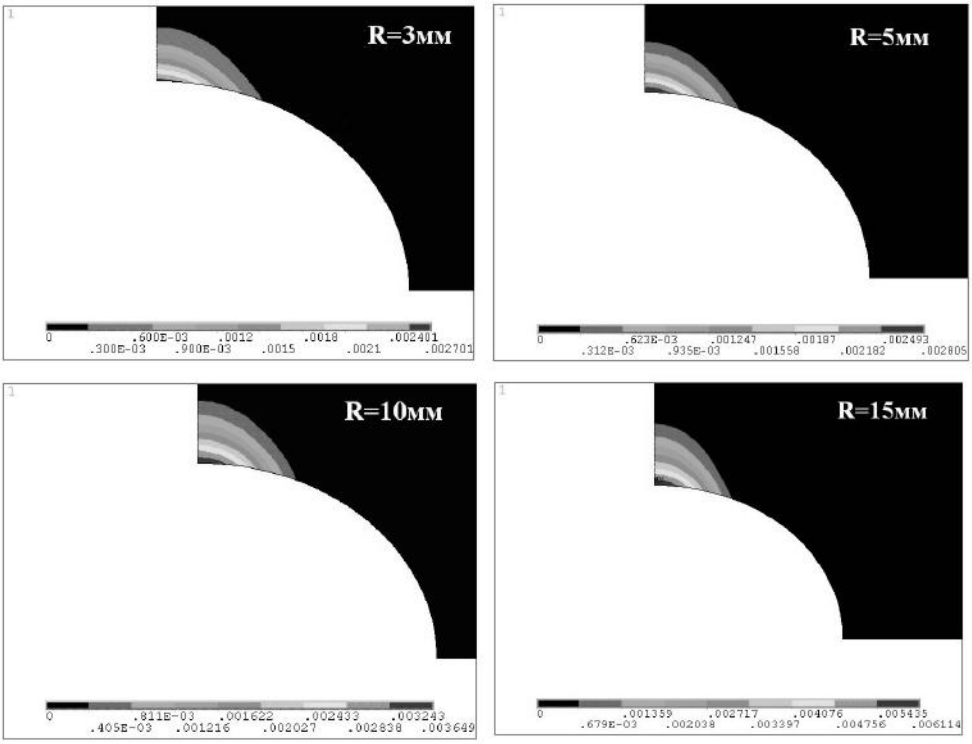


Рис. 4. Поля поврежденности для пластины с отверстием разного диаметра из сплава Д16Т.

## Выводы

1. Анализ пределов применимости современных инженерных методов оценки эффективных коэффициентов концентрации напряжений и деформаций в упруго-пластической области показывает преимущества использования уравнения Махутова для элементов с концентраторами напряжений (деформаций).

2. Экспериментально подтверждено, что введение параметра поврежденности в систему определяющих уравнений существенно уточняет расчет НДС элементов конструкций при упругопластическом деформировании. При решении задач теории пластичности за пороговое значение параметра поврежденности необходимо принимать предел пропорциональности, а при оценке ресурса – предел выносливости конструкционного материала.

3. Показано, что использование в инженерных расчетах показателя предельного значения рассеянного повреждения $D_R = 1$ завышает реальную несущую способность металлических материалов на уровне предела прочности.

4. Разработанная методика в виде подпрограммы пользователя позволяет определять поля накопленных рассеянных повреждений и конкретизировать зоны вероятного возникновения макротрещины в элементах конструкций с учетом основных термосиловых параметров нагружения.

## Резюме

Наведено і проаналізовано інженерні методи розрахунку напружень і деформацій у зонах концентрації при пружно-пластичному деформуванні конструктивних елементів. Показано, що для оцінки кінетики ефективних коефіцієнтів концентрації напружень і деформацій найбільш прийнятною за точністю є модифікація Махутовим рівняння Нойбера. Введено поняття розсіяної пошкодженості. Установлено ефективність використання параметра пошкодженості для оцінки вірогідності механічних властивостей ряда металічних матеріалів. Вплив розсіяних пошкоджень на оцінку напружено-деформованого стану конструктивних елементів показано на прикладі пружно-пластичного деформування пластини з отвором.

1. *Kachanov L. M.* Introduction to Continuum Damage Mechanics. – Boston; Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1986. – 148 p.
2. *Работнов Ю. Н.* Введение в механику разрушения. – М.: Наука, 1987. – 80 с.
3. *Lemaitre J. and Desmorat R.* Engineering Damage Mechanics. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. – 380 p.
4. *Bobyr' N. I.*, *Grabovskii A. P.*, *Timoshenko A. V.*, *and Khalimon A. P.* Procedure for the evaluation of the accumulation of defects in metallic structural materials under complex elastoplastic loading // Strength Mater. – 2006. – **38**, No. 1. – P. 92–98.
5. *Серенсон С. В.*, *Шнейдерович Р. М.*, *Махутов Н. А. и др.* Поля деформаций при малоцикловом нагружении. – М.: Наука, 1979. – 278 с.
6. *Neuber H.* Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law // J. Appl. Mech. – 1961. – **28**. – P. 544–550.
7. *Биргер И. А.* Прогнозирование ресурса при малоцикловой усталости // Пробл. прочности. – 1985. – № 10. – С. 39–44.
8. *Glinka G.* Energy density approach to calculation of inelastic strain-stress near notches and cracks // Eng. Fract. Mech. – 1985. – **22**, No. 3. – P. 485–508.
9. *Махутов Н. А.* Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – 271 с.
10. *Бобырь Н. И.*, *Бабенко А. Е.*, *Халимон А. П.* Континуальная механика поврежденности и ее использование в задачах сложного малоциклового нагружения // Техн. диагностика и неразрушающий контроль. – 2008. – № 4. – С. 25–34.
11. *Писаренко Г. С.*, *Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 416 с.
12. *Трощенко В. Т.* Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
13. *Тимошенко О. В.*, *Коваль В. В.*, *Кравчук Р. В.* Вплив виду напруженого стану на критичне значення пошкоджуваності для конструкційних матеріалів при пружно-пластичному деформуванні // Вісн. НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування. – 2011. – № 63. – С. 103–107.

Поступила 10. 04. 2017