

Устойчивость и бифуркации колебаний ротора на шарикоподшипниках с предварительной осевой нагрузкой

С. В. Филипповский

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Харьков, Украина

svfil@inbox.ru

Разработаны модель и методика исследования вынужденных колебаний ротора на двух радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительной осевой нагрузкой. В модели колебания возбуждаются совместным действием дисбаланса и вибрации опор. Проанализированы амплитудно-частотные характеристики, резонансы, устойчивость и бифуркации колебаний.

Ключевые слова: ротор, шарикоподшипник, нелинейные колебания, устойчивость, бифуркация.

Введение. Роторы, которые испытывают продольную нагрузку, устанавливаются на радиально-упорных подшипниках. В известных литературных источниках рассматриваются нелинейные колебания ротора на шарикоподшипниках с зазором между шариками и канавками качения [1, 2]. Роторы многих агрегатов, например гироскопических приборов, турбохолодильников самолетов, должны быть защищены от ударов, которые могут возникнуть в результате закрытия зазоров между шариками и канавками качения подшипников. Такие роторы устанавливают на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным осевым поджатием.

Уравнения для определения нелинейной жесткости предварительно поджатых подшипников представлены в работе [3], однако для выполненных в ней исследований они линеаризованы. В [4] численно и экспериментально исследованы поперечные колебания ротора на радиально-упорных поджатых шарикоподшипниках, вызванные дисбалансом диска, и показана их зависимость от нелинейных контактных сил. Параметрическая неустойчивость вала на шарикоподшипниках под действием переменной осевой силы рассмотрена в [5]. Зависимости устойчивости и бифуркаций ротора от величины силы осевого поджатия шарикоподшипников и частоты вращения изучены в работе [6].

Ранее [7] исследованы свободные колебания ротора на радиально-упорных шарикоподшипниках с предварительным поджатием и получены скелетные кривые и нелинейные нормальные формы колебаний при разных углах между линией действия контактных сил и осью подшипника.

В летательных аппаратах и морских судах опоры агрегатов подвержены воздействию вибраций планера аппарата или корпуса судна. Влияние вибрации опор на вынужденные колебания ротора необходимо исследовать. Целью настоящей работы является исследование нелинейных колебаний ротора на шарикоподшипниках с предварительным поджатием, вызванных одновременным действием дисбаланса и вибрации опор.

Расчетная схема. Ротор представляет собой вал с диском, закрепленным несимметрично относительно опор (рис. 1,а). Назначение и условия работы агрегатов с осевым поджатием шарикоподшипников таковы, что соотношение длины и диаметра вала обуславливает жесткость вала, которая на порядок больше жесткости подшипников, поэтому вал считаем недеформируемым телом. Такие модели применяют для гироскопических приборов [3], шпинделей высокооборотных станков [8], турбохоло-

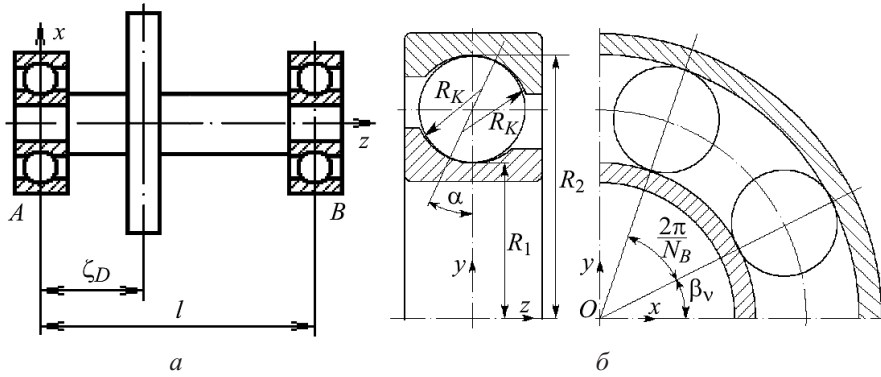


Рис. 1. Расчетные схемы ротора (а) и шарикоподшипника (б).

дильников. В настоящей работе степенями свободы являются перемещения цапф относительно внешних колец подшипников.

Компоненты упругих реакций подшипника вдоль осей x, y, z получены в работе [3]:

$$\begin{cases} P_{x_i} = K \sum_{\nu=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_\nu + y_i \cos \alpha \sin \beta_\nu + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \cos \beta_\nu; \\ P_{y_i} = K \sum_{\nu=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_\nu + y_i \cos \alpha \sin \beta_\nu + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \cos \alpha \sin \beta_\nu; \\ P_{z_i} = K \sum_{\nu=1}^{N_B} [x_i \cos \alpha \cos \beta_\nu + y_i \cos \alpha \sin \beta_\nu + (z + z_0) \sin \alpha]^{3/2} \sin \alpha, \end{cases} \quad (1)$$

где $K = (3P_0/2N_B)z_0^{-3/2} \sin^{-5/2} \alpha$; $x_i, y_i, z_1 = z_2 = z$ – смещения центра внутреннего кольца относительно центра наружного кольца; $i = \overline{1, 2}$ – номера обобщенных координат цапф; углы α и β_ν приведены на рис. 1,б; ν и N_B – номер и количество шариков; P_0 – сила предварительного осевого поджатия; z_0 – осевое смещение внутреннего кольца относительно внешнего кольца от действия силы P_0 .

Уравнения колебаний ротора. Перемещения сечений вала по направлениям координатных осей u_x, u_y записываются так:

$$\begin{cases} u_x(\zeta, t) = x_1(t)(l - \zeta)/l + x_2(t)\zeta/l; \\ u_y(\zeta, t) = y_1(t)(l - \zeta)/l + y_2(t)\zeta/l, \end{cases} \quad (2)$$

где l – длина вала; ζ – координата сечения вала по оси z ; $x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$ – обобщенные координаты радиальных перемещений цапф; t – время.

Внутренние кольца шарикоподшипников совершают как радиальные, так и осевые колебания относительно наружных колец. Поскольку перемещения малы по сравнению с длиной вала, колебания ротора вдоль координатной оси z можно представить одной обобщенной координатой $u_z = z(t)$.

Для составления уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. Выражение кинетической энергии вала T_B в виде функции обобщенных координат представляется так:

$$T_B = \frac{I_{C1}}{2} \left(\frac{\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{l} \right)^2 + \frac{I_{C1}}{2} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \right)^2 + \frac{I_{C0}}{2} \Omega^2 + I_{C0} \Omega \frac{(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)(x_2 - x_1)}{l^2} + \frac{m_B}{2} \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2} \right)^2 + \frac{m_B}{2} \left(\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2} \right)^2 + \frac{m_B}{2} \dot{z}^2, \quad (3)$$

где m_B – масса вала; I_{C0} и I_{C1} – центральные моменты инерции вала относительно оси вращения и поперечных осей; Ω – угловая скорость вращения ротора.

Выражение кинетической энергии диска T_D , который закреплен на валу с эксцентриситетом a , в виде функции обобщенных координат имеет вид

$$T_D = \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{l} \right)^2 + \frac{I_1}{2} \left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l} \right)^2 + \frac{I_0}{2} \Omega^2 + I_0 \Omega \frac{(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)(x_2 - x_1)}{l^2} + \frac{m_0}{2} \left[\dot{x}_1 \left(1 - \frac{\xi_D}{l} \right) + \dot{x}_2 \frac{\xi_D}{l} - a \Omega \sin \Omega t \right]^2 + \frac{m_0}{2} \left[\dot{y}_1 \left(1 - \frac{\xi_D}{l} \right) + \dot{y}_2 \frac{\xi_D}{l} + a \Omega \cos \Omega t \right]^2 + \frac{m_0}{2} \dot{z}^2, \quad (4)$$

где m_0 – масса диска; I_0 и I_1 – полярный и экваториальный моменты инерции диска; ξ_D – координата диска по оси z .

Из допущения, что вал недеформируемый, следует, что потенциальная энергия деформации системы представлена только энергией деформации подшипников $\Pi = \Pi_{\Pi}(x_1, y_1, x_2, y_2, z)$. Производные потенциальной энергии по обобщенным координатам представляют собой выражения (1).

Демпфирование колебаний, обусловленное смазкой опор, обычно описывают моделью вязкого трения [9, 10]. В этом случае диссипативная функция Рэлея Φ имеет вид

$$\Phi = C(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}^2)/2, \quad (5)$$

где C – коэффициент демпфирования.

С использованием выражений (1) и (3)–(5) получим уравнения колебаний в матричном виде:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{Q(t)\}, \quad (6)$$

где $[M]$ – матрица масс; $[G]$ – матрица гироскопических сил; $[C]$ – матрица демпфирования; $\{K(X)\}$ – вектор, компонентами которого являются нелинейные функции (1); $\{X\}$ – вектор обобщенных координат, $\{Q(t)\}$ – вектор правой части.

Поскольку колебания возбуждаются совместным действием дисбаланса диска и вибрации опор, получим

$$\{Q(t)\} = \{Q_D(\Omega, t)\} + \{Q_{\Pi}(\omega, t)\}.$$

Здесь $\{Q_D(\Omega, t)\}$ – вектор сил, обусловленных дисбалансом диска,

$$\{Q_D(\Omega, t)\} = m_0 a \Omega^2 \left[\left(1 - \frac{\xi_D}{l} \right) \cos \Omega t \quad \left(1 - \frac{\xi_D}{l} \right) \sin \Omega t \quad \frac{\xi_D}{l} \cos \Omega t \quad \frac{\xi_D}{l} \sin \Omega t \quad 0 \right]^T;$$

$\{Q_{\Pi}(\omega, t)\}$ – вектор сил кинематического возбуждения колебаний, который следует записать так [11]:

$$\{Q_{\Pi}(\omega, t)\} = -[M]\{A_{\Pi}(\omega, t)\},$$

где $\{A_{\Pi}(\omega, t)\}$ – вектор виброускорений опор,

$$\{A_{\Pi}(\omega, t)\} = [A_{\Pi x1} \quad A_{\Pi y1} \quad A_{\Pi x2} \quad A_{\Pi y2} \quad A_{\Pi z}]^T \sin \omega t,$$

ω – круговая частота колебаний опор; $A_{\Pi x1}, \dots, A_{\Pi z}$ – амплитуды виброускорений.

Построение амплитудно-частотной характеристики методом продолжения по параметру. Под амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) следует понимать зависимость полуразмаха колебаний от частоты колебаний ω , при этом Ω считаем фиксированной. Определим безразмерные параметры следующим образом: $x_A = x_1/z_0$; $y_A = y_1/z_0$; $x_B = x_2/z_0$; $y_B = y_2/z_0$; $z_A = z/z_0$; $\bar{\omega} = \omega/\omega_l$; $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_l$; $\tau = t\omega_l$, где ω_l – основная резонансная частота линеаризованной системы при $\alpha = 15^\circ$.

Уравнение (6) можно представить в виде

$$\{\dot{Y}\} = \{\varphi(\{Y\}, \tau)\}, \quad (7)$$

где $\{\varphi\}$ – вектор-функция фазовых координат.

Условие периодичности решений уравнения (7) можно записать следующим образом:

$$\{Y(0)\} = \{Y(T)\}, \quad (8)$$

где T – период.

Если ввести в рассмотрение векторы $\{Y\}_0 = \{Y(0)\}$ и $\{Y\}_T = \{Y(T)\}$, определяющие состояние системы (7) в моменты времени $\tau = 0$ и $\tau = T$, то задачу Коши (7) с краевыми условиями (8) можно свести к решению неявного уравнения

$$\{Y(\{Y\}_0)\}_T = \{Y\}_0. \quad (9)$$

Чтобы определить функцию $\{Y(\{Y\}_0)\}_T$, систему (7) интегрируем численным методом. Для построения первого приближения начальной точки АЧХ решаем уравнение колебаний линеаризованной системы вдали от резонанса и уточняем его итерационным методом. Следующие точки находим, выполняя определенные шаги по параметру продолжения вблизи резонансной области. Параметром продолжения для первых точек АЧХ является частота.

Вблизи резонанса на АЧХ могут появиться особые точки, в которых касательная к кривой перпендикулярна оси абсцисс. При подходе к этой точке необходимо менять параметр продолжения АЧХ с частоты на одну из фазовых координат, т.е. решать инвертированную задачу [12].

Решения как прямой, так и инвертированной задачи уточняем методом Ньютона. Уравнения этого метода для решения прямой задачи (9) записываются следующим образом [12]:

$$\begin{cases} [J(\{Y\}_0) - E]\{h_Y\}^\kappa = \{Y(\{Y\}_0^\kappa)\}_T - \{Y\}_0^\kappa; \\ \{Y\}_0^{\kappa+1} = \{Y\}_0^\kappa - \{h_Y\}^\kappa, \end{cases} \quad (10)$$

где $[J(\{Y\}_0)] = [\partial\{Y\}_T/\partial\{Y\}_{0,1} \dots \partial\{Y\}_T/\partial\{Y\}_{0,2n}]$ – матрица Якоби; $[E]$ – единичная матрица; κ – номер итерации; $\{h_Y\}^\kappa$ – вектор шага итерации.

На основании (7) i -й столбец матрицы Якоби представим:

$$\frac{\partial \{Y\}_T}{\partial Y_{0,i}} = \frac{\partial}{\partial Y_{0,i}} \int_0^T \{\varphi(\{Y\}, \tau)\} d\tau = \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial Y_k} \frac{\partial Y_k}{\partial Y_{0,i}} \right\} d\tau. \quad (11)$$

В (11) производные $\partial \{\varphi\} / \partial Y_k$ можно определить аналитически, так как известны уравнения колебаний. Производные $\partial Y_k / \partial Y_{0,i} = \delta_{k,i}$ являются новыми переменными. Таким образом, вычисление i -го столбца матрицы Якоби сводится к интегрированию следующей системы с вектором новых переменных $\{\delta_k\}_i$:

$$\frac{\partial \{Y\}_T}{\partial Y_{0,i}} = \int_0^T \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial Y_k} \delta_{k,i} \right\} d\tau. \quad (12)$$

Начальные условия этих переменных: $\delta_{k,i} = 0$, если $k \neq i$, и $\delta_{k,i} = 1$, если $k = i$. Для вычисления вектора $\{Y\}$, входящего в выражения производных $\partial \{\varphi\} / \partial Y_k$, совместно интегрируются уравнения (7) и (12).

В матрице Якоби инвертированной задачи (10) столбец производных $\partial \{Y\}_T / \partial Y_{0,j}$, соответствующий новому параметру продолжения Y_j , заменяется столбцом $\partial \{Y\}_T / \partial \bar{\omega}$; в матрице $[E]$ элемент, соответствующий j -й координате, заменяется нулем; в векторе $\{h_Y\}^K$ на j -й позиции будет находится шаг по частоте $\Delta \bar{\omega}^K$ [12]. При вычислении этого столбца появляются новые переменные $\partial Y_k / \omega = \delta_{k,j}$, начальные условия всех переменных $\delta_{k,j} = 0$, j – номер столбца параметра продолжения инвертированной задачи. Таким образом, вычисление j -го столбца матрицы Якоби сводится к интегрированию следующей системы с вектором новых переменных $\{\delta_k\}_j$:

$$\frac{\partial \{Y\}_T}{\partial \bar{\omega}} = \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \left\{ \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial Y_k} \delta_{k,j} + \frac{\partial \{\varphi\}}{\partial \bar{\omega}} \right\} d\tau - \frac{2\pi}{\bar{\omega}^2} \left\{ \varphi(\{Y\}_T, \bar{\omega}, \frac{2\pi}{\bar{\omega}}) \right\}. \quad (13)$$

По окончании итераций еще раз выполняем интегрирование по алгоритму (12). Полученная матрица будет тождественна матрице монодромии уравнения в вариациях [12], ее мультипликаторы $\lambda = \xi \pm i\psi$ определяют устойчивость и характер бифуркаций рассматриваемой точки АЧХ [13].

Результаты численных исследований. Рассмотрены колебания недеформируемого ротора с одним диском и следующими параметрами: $l = 0,5$ м; $\xi_D = 0,125$ м; $m_B = 1,963$ кг; $I_{C1} = 0,04098$ кг·м²; $I_{C0} = 0,00015$ кг·м²; $m_0 = 10$ кг; $I_1 = 0,1$ кг·м²; $I_0 = 0,2$ кг·м², который вращается на радиально-упорных подшипниках средней серии по ГОСТ 831-75. Параметры подшипника таковы: радиусы внешней канавки качения R_2 для углов $\alpha = 12, 15, 26, 36$ и 40° соответственно равны 27,5125; 27,5167; 27,5399; 27,5709 и 27,5858 мм. Радиус внутренней канавки качения $R_1 = 16,0$ мм; радиус поперечного сечения канавок качения $R_K = 5,930$ мм; диаметр шарика $d_B = 11,510$ мм; количество шариков $N_B = 7$; модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

В результате расчета определены формы и частоты свободных колебаний ротора, опишем их в порядке возрастания частот: первая форма с низшей частотой ω_1 – ротор колеблется вдоль продольной оси; вторая форма с частотой ω_2 – цапфы вала находятся с одной стороны от оси подшипников и движутся по кругу навстречу вращению ротора; третья форма с частотой ω_3 – цапфы расположены также и

движутся по кругу в сторону вращения ротора; четвертая форма с частотой ω_4 – цапфы вала находятся с разных сторон от оси подшипников и движутся по кругу навстречу вращению ротора; пятая форма с частотой ω_5 – цапфы расположены также и движутся по кругу в сторону вращения ротора.

Колебания, вызванные дисбалансом без вибрации опор, осуществляются по третьей форме. Амплитудно-частотные характеристики перемещения y_B этих колебаний представлены на рис. 2,а. В этом случае скорость вращения ротора Ω является переменной. При совместном действии дисбаланса и вибрации опор проявляются резонансы всех форм колебаний ротора, а также субрезонансы с частотами, относящимися как целые числа. Частота вибрации опор ω будет переменной, скорость вращения ротора Ω фиксирована и находится в диапазоне резонансных частот колебаний ротора. Участки резонансов АЧХ с наибольшими размахами перемещения y_B , вызванного совместным действием дисбаланса и вибрации опор, при тех же углах контакта представлены на рис. 2,б. Эти колебания происходят также по третьей форме.

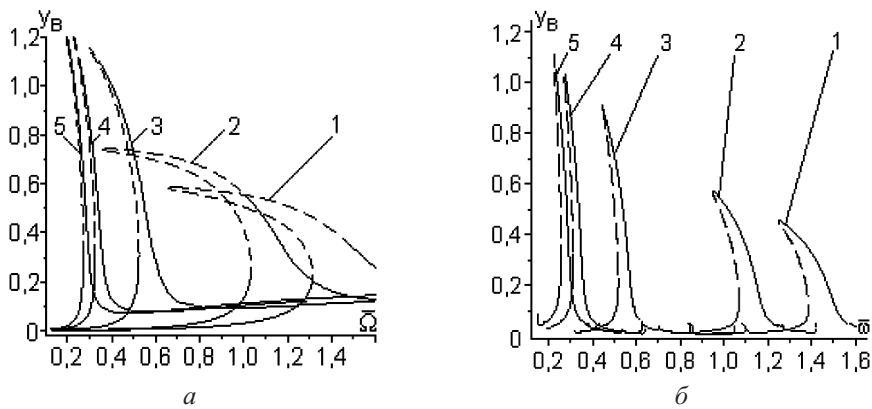


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики ротора при разных углах контакта: 1 – $\alpha = 12^\circ$; 2 – $\alpha = 15^\circ$; 3 – $\alpha = 26^\circ$; 4 – $\alpha = 36^\circ$; 5 – $\alpha = 40^\circ$. (Здесь и на рис. 3, 4: штриховые линии – неустойчивые режимы.)

При любых углах α АЧХ имеет области потери устойчивости. На левых ветвях наибольший мультипликатор матрицы монодромии λ_1 становится действительным числом больше единицы, это седло-узловая бифуркация [13]. На правых ветвях модули наибольших комплексно-сопряженных мультипликаторов $|\lambda_{1,2}|$ становятся больше единицы, это бифуркация двухмерного тора [13].

На рис. 3,а представлена АЧХ ротора на подшипниках с углом контакта $\alpha = 15^\circ$. Частота вращения ротора $f_\Omega = \Omega/2\pi = 250$ Гц, основная резонансная частота линеаризованной системы $f_\omega = \omega_1/2\pi = 199$ Гц. Резонансы и субрезонансы по четвертой форме колебаний имеют наименьшие амплитуды, по третьей форме – наибольшие. Резонансы по первой и второй формам колебаний не возбуждаются. На рис. 3,б представлен низкочастотный диапазон АЧХ этого ротора. Частоты на субрезонансах относятся к частоте ω_3 как целые числа. В этом диапазоне есть субрезонансы с малыми размахами по пятой форме колебаний.

Траектории центров цапф на основных резонансах каждой формы колебаний близки к окружностям. На субрезонансных частотах за каждый период цапфа описывает столько круговых петель, во сколько раз частота ниже основной частоты этой формы.

С увеличением угла контакта амплитуды пятой и четвертой форм колебаний уменьшаются, амплитуды третьей формы увеличиваются (рис. 4).

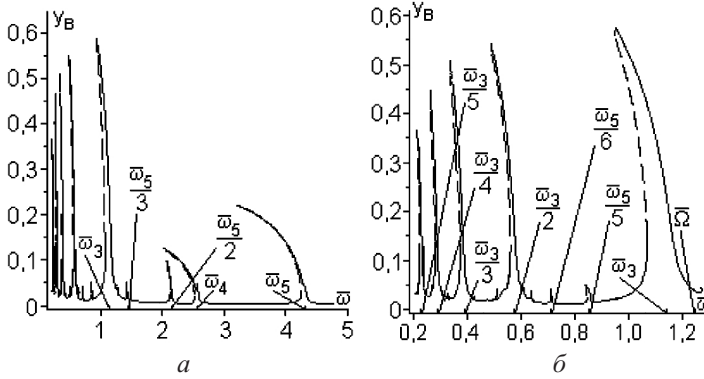


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики ротора при совместном действии дисбаланса и вибрации опор при $\alpha = 15^\circ$.

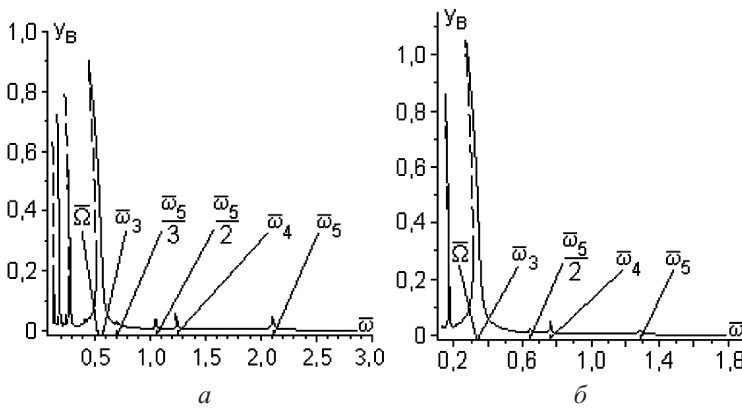


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики ротора при совместном действии дисбаланса и вибрации опор при $\alpha = 26^\circ$ (a) и 36° (b).

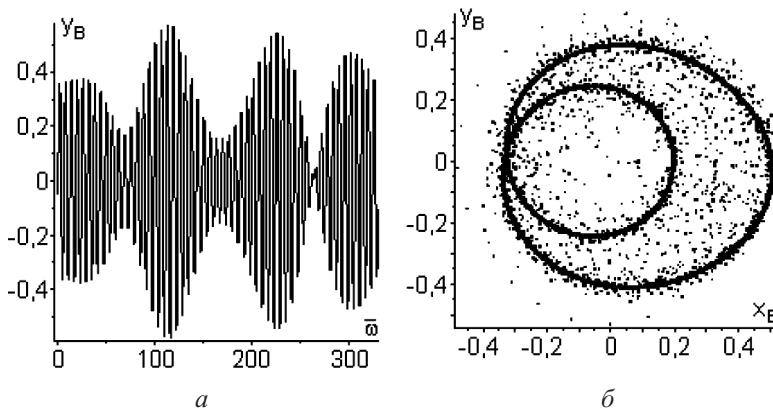


Рис. 5. Переходный процесс (a) и отображение Пуанкаре (b) на левой ветви АЧХ, $\bar{\omega} = 1,033$.

Для анализа динамики ротора на неустойчивых режимах, когда мультипликаторы матрицы монодромии выходят за единичный круг, построены зависимости обобщенных координат от времени. На левых ветвях АЧХ наблюдаются колебания с переменным размахом (рис. 5, a). По отображению Пуанкаре для этого режима из

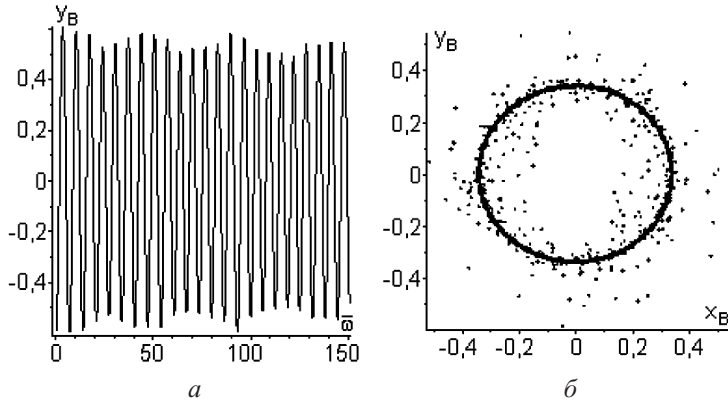


Рис. 6. Переходный процесс (а) и отображение Пуанкаре (б) на правой ветви АЧХ, $\bar{\omega} = 0,453$.

рис. 5,б следует, что колебательный процесс приводит к биениям. На правых ветвях АЧХ переходный процесс короче и также приводит к биениям (рис. 6).

Заключение. Кривизна канавок качения в шарикоподшипнике является переменной и минимальной на дне канавок. При движении точки контакта шарика от дна к боковой поверхности кривизна поверхности увеличивается и соответственно жесткость зоны контакта уменьшается. Чем больше амплитуда, тем значительнее изменение жесткости зоны контакта за цикл колебаний, поэтому характеристика системы мягкая. Чем больше угол контакта, тем больше кривизна поверхности канавок качения в зоне контакта и тем меньше жесткость зоны контакта и соответственно частота колебаний, поэтому АЧХ роторов с большими углами α на рис. 2 расположены левее.

При совместном действии дисбаланса и вибрации опор возбуждаются все формы колебаний ротора. При этом колебания возникают не только на основных резонансных частотах, но и на частотах, относящихся как целые числа. Такое поведение системы обусловлено тем, что частота вибрации опор и частоты свободных колебаний одного порядка. Наложение возмущающих воздействий, обусловленных дисбалансом и вибрацией опор, порождает биения колебаний, которые вызывают все рассмотренные резонансы.

Резюме

Розроблено модель і методику дослідження змусених коливань ротора на двох радіально-упорних шарикопідшипниках із попереднім осьовим навантаженням. У моделі коливання збуджуються спільною дією дисбалансу і вібрації опор. Проаналізовано амплітудно-частотні характеристики, резонанси, стійкість і біфуркації коливань.

1. *Tiwari M., Gupta K., and Prakash O.* Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor // *J. Sound Vib.* – 2000. – **238**, No. 5. – P. 723–756.
2. *Harsha S. P.* Nonlinear dynamic analysis of an unbalanced rotor supported by roller bearing // *Chaos Soliton. Fract.* – 2005. – **26**, No. 1. – P. 47–66.
3. *Новиков Л. З.* Определение собственных частот колебаний электродвигателя, связанных с нелинейной упругостью подшипников // *Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностроение.* – 1961. – № 6. – С. 84–91.

4. Bai C., Zhang H., and Xu Q. Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system // *Int. J. Nonlin. Mech.* – 2013. – **50**. – P. 1–10.
5. Young T. H., Shiau T. N., and Kuo Z. H. Dynamic stability of rotor-bearing systems subjected to random axial forces // *J. Sound Vib.* – 2007. – **305**, No. 3. – P. 467–480.
6. Bai C., Zhang H., and Xu Q. Effects of axial preload of ball bearing on the nonlinear dynamic characteristics of a rotor-bearing system // *Nonlinear Dynam.* – 2008. – **53**. – P. 173–190.
7. Филипповский С. В., Аврамов К. В. Свободные нелинейные колебания многодисковых роторов на шарикоподшипниках // *Пробл. прочности.* – 2013. – № 3. – С. 86–96.
8. Aini R., Rahnejat H., and Gohar R. A five degrees of freedom analysis of vibrations in precision spindles // *Int. J. Mach. Tool. Manu.* – 1990. – **30**, No. 1. – P. 1–18.
9. Бальмонт В. Б., Дубовецкий Б. О., Авдеев А. М., Селезнев Г. В. О колебаниях момента сопротивления вращению шарикоподшипника // *Машиноведение.* – 1988. – № 3. – С. 73–81.
10. Позняк Э. Л., Гладышева Т. Н., Ковалев В. Б. Маятниковые колебания несимметричного жесткого ротора в подшипниках с зазорами // *Пробл. машиностроения и надежности машин.* – 1990. – № 4. – С. 33–40.
11. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
12. Беломытцев А. С., Карабан В. Н. Алгоритм решения нелинейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в области многозначности // *Журн. вычисл. математики и математ. физики.* – 1986. – № 7. – С. 1099–1102.
13. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.

Поступила 08. 12. 2015