

Упругопластическое деформирование контактно-взаимодействующих тел при воздействии импульсного электромагнитного поля

Д. В. Лавинский¹, О. К. Морачковский²

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

¹ lavinsky-d@mail.ru

² o.morachko@mail.ru

Приведены постановка и решение задачи упругопластического деформирования системы электропроводных тел при действии импульсного электромагнитного поля. Представлен численный метод решения задачи на базе метода конечных элементов. Проанализировано деформирование контактно-взаимодействующих тел при магнитно-импульсной обработке материалов. Исследовано влияние технологических и конструктивных параметров системы индуктор–заготовка на ее напряженно-деформированное состояние.

Ключевые слова: упругопластическое деформирование, метод конечных элементов, магнитно-импульсная обработка.

Введение. Условием функционирования многих контактно-взаимодействующих тел является наличие электромагнитного поля (ЭМП). Его взаимодействие с электропроводными телами приводит к их движению или деформированию. При этом уровни энергии ЭМП могут быть настолько значительными, что вызовут необратимое деформирование либо разрушение конструктивных элементов. В технологических целях материалы обрабатывают импульсным ЭМП для повышения прочности, коррозионной стойкости, снижения уровня остаточных напряжений [1–4]. Во многих технологических процессах обработки материалов давлением используется энергия импульсных магнитных полей. В работе [5] представлен обзор развития технологий магнитно-импульсной обработки материалов (МИОМ), а также рассматривается состояние проблемы моделирования, проектирования и разработки технологических операций и оборудования для такой обработки.

Отметим, что в настоящее время известно достаточное количество работ, посвященных моделированию пластического деформирования заготовок при МИОМ на основе анализа их напряженно-деформированного состояния (НДС). В работе [6] изложены результаты моделирования процесса магнитно-импульсного формоизменения тонкостенных заготовок на основе континуальной термодинамической модели. Деформирование заготовки описывается на основе вязкоупругопластического анизотропного материала. Связь между ЭМП и полями напряжений и деформаций устанавливается с помощью электромагнитных сил в уравнениях движения. В качестве примера описаны результаты упругопластического деформирования алюминиевого тонкостенного цилиндра.

В [7] приводятся результаты численного моделирования выдавливания тонколистовых заготовок силами ЭМП. Моделирование осуществляется методом конечных элементов (МКЭ) и состоит из двух этапов: моделирование распространения ЭМП в заготовке и ее последующее упругопластическое деформирование. Конечноэлементная (КЭ) модель включает заготовку, плоский многovitковый индуктор и окружающую среду (воздух). Приведены пространственно-временные распределения векторных компонент ЭМП и тензорных компонент процесса деформирования. В работе [8] представлен метод численного анализа распределения компонент ЭМП и электро-

магнитных сил при магнитно-импульсном формоизменении листовых металлов. Задача решалась в осесимметричной постановке с использованием разработанной КЭ-модели плоского многовиткового индуктора, заготовки и окружающей среды. Представлены пространственно-временные распределения электромагнитных сил, действующих на заготовку. Установлены особенности внешнего ЭМП, при которых силы притяжения к индуктору превалируют над силами отталкивания.

В то же время анализу НДС источников электромагнитного поля (индукторов) не уделяется достаточного внимания. Известно, что в процессе генерации импульса электрического тока на индуктор действуют значительные по величине электромагнитные силы, что может привести к его необратимому деформированию. С изменением формы индуктора искажается пространственная конфигурация генерируемого импульса, что отрицательно влияет на технологический процесс. Анализ НДС индуктора позволяет сформулировать рекомендации для его проектирования. Поэтому разработка эффективных методов анализа НДС составных электропроводных тел и расчетная оценка прочности являются актуальными в научном и практическом смысле.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим общую постановку задачи упругопластического деформирования системы контактно-взаимодействующих тел при наличии ЭМП. Пусть система тел задана в декартовых координатах x_i , $i = 1, 2, 3$. Тело объемом V_j имеет поверхность S_j : $S_j = S_{jp} \cup S_{ju} \cup S_{jc}$, где S_{jp} , S_{ju} и S_{jc} – части тела, на которых заданы внешние распределенные силы, условия закрепления и контактного взаимодействия.

Электромагнитные процессы при отсутствии свободных зарядов описываются следующей системой фундаментальных уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_c \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (1)$$

где \vec{j} , \vec{E} , \vec{H} – плотность тока и напряженность электрического и магнитного полей соответственно; μ_c , ε_c – магнитная и электрическая проницаемость материала.

Пренебрегая конвекционными токами, уравнения (1) дополним “материальными” соотношениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_c \vec{H}; \quad \vec{j} = \gamma_c \vec{E} + \gamma_c [\vec{u} \times \vec{B}], \quad (2)$$

где \vec{D} , \vec{B} – векторы индукции электрического и магнитного поля; γ_c – удельная электропроводимость

Полную систему уравнений относительно компонент тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений при заданных объемных и поверхностных силах запишем следующим образом.

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in V, \quad (3)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; f_i – компоненты вектора объемных электромагнитных сил (их определение будет рассмотрено ниже).

Геометрические соотношения Коши для малых деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (4)$$

где ε_{ij} , u_i – компоненты тензора деформаций и вектора перемещений соответственно.

Уравнения (1)–(4) дополняются граничными условиями:

$$\vec{E}_\Gamma \times \vec{n} = 0, \quad \vec{D}_\Gamma \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{H}_\Gamma \times \vec{n} = 0, \quad \vec{B}_\Gamma \cdot \vec{n} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{\sigma}_n = \vec{p}_n + \frac{\Xi}{2} \vec{E}_\Gamma + \frac{\mu_c}{2} (\Xi \dot{u}_\tau + \vec{i}) \times \vec{H}_\Gamma, \quad (6)$$

где $\vec{\sigma}_n$ – вектор механических напряжений на поверхности с нормалью \vec{n} , $\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n}$; Ξ , \vec{i} – плотности поверхностных зарядов и токов; \dot{u}_τ – проекция вектора скорости точки на плоскость, касательную к границе тела.

В случаях, когда необходимо рассматривать деформирование взаимодействующих тел, для точек их контактирования формулируются условия сопряжения для векторных характеристик ЭМП и векторно-геометрических характеристик процесса деформирования:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} = 0, \quad (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = 0; \\ (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = 0, \quad (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{0n}^m \leq 0, \quad \sigma_{nn}^m \leq 0, \quad (8)$$

где u_n^{m-1} , u_n^{m+1} – нормальные перемещения точек поверхностей тел; δ_{0n}^m – начальный зазор (натяг); σ_{nn}^m – нормальное напряжение на контактирующих поверхностях. При численном решении задачи контактное деформирование удобно учитывать введением слоев контактных элементов [9, 10].

Обобщенные уравнения состояния, которые устанавливают связь между напряжениями и деформациями в точках упругодеформирующихся тел, могут быть представлены тензорно-линейными соотношениями между компонентами тензоров деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T; \quad A_{ijkl}^e = \frac{1}{E} [(1+\nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}], \quad (9)$$

где E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона; A_{ijkl}^e , $\alpha_{ij} \Delta T$ – компоненты тензоров упругости и температурного расширения материала.

В соответствии с теорией пластичности Прандтля-Рейса соотношения между компонентами тензоров деформаций и напряжений записываем в приращениях:

$$\left\{ \begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= A_{ijkl} d\sigma_{ij} + \phi_{ij} dT; \quad A_{ijkl} = A_{ijkl}^e + A_{ijkl}^p; \quad A_{ijkl}^p = \frac{3}{2\sigma_i} F_\sigma(\sigma_i, T) s_{ij} s_{kl}; \\ \phi_{ij} &= \phi_{ij}^e + \phi_{ij}^p; \quad \phi_{ij}^e = \delta_{ij} \frac{d\varepsilon^T}{dT} - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} [(1+\nu)\sigma_{ij} - 3\nu\delta_{ij}\sigma_0] + \frac{1}{E} \frac{d\nu}{dT} (\sigma_{ij} - 3\delta_{ij}\sigma_0); \\ \phi_{ij}^p &= -F_\sigma(\sigma_i, T) \frac{\partial \sigma_T}{\partial T} s_{ij}; \quad F_\sigma(\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right), \end{aligned} \right. \quad (10)$$

где E_k – касательный модуль.

Закон пластического течения для изотропного материала с трансляционным линейным упрочнением принимаем ассоциированным с условием пластичности вида

$$\frac{3}{2} \left[s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] \times \left[s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] - \sigma_T^2 = 0; \quad (11)$$

$$d(\varepsilon_{ij})_p = \frac{1}{2G} \left[d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_0 \right] + \frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{3}{2}} d(\varepsilon_{ij})_p d(\varepsilon_{ij})_p (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0),$$

где s_{ij} – девиатор напряжений; E_T – модуль упрочнения; σ_T – предел текучести материала; $\sigma_0 = 1/3 \sigma_{kl} \delta_{kl}$; $\varepsilon_0 = 1/3 \varepsilon_{kl} \delta_{kl}$; σ_i – интенсивность напряжений как функция интенсивности деформаций и температуры, $\sigma_i = H(\int d\varepsilon_i^p, T)$.

Одним из наиболее эффективных методов решения поставленной задачи является метод конечных элементов. В основу его конкретного применения может быть положен метод переменных параметров упругости совместно с пошаговым решением задачи уравновешенного состояния вариационным методом, который сводит решение поставленной задачи к вариационному равенству

$$\delta E^{k+1} = 0, \quad E^{k+1} = U^k + W, \quad (12)$$

где U^k – энергия “упругого” деформирования, которую рассчитывают по НДС на предыдущем k -м шаге определения параметров упругости; W – энергия ЭМП, которую рассчитывают по значениям векторов ЭМП на k -м шаге. В случае пренебрежения влиянием электрического поля энергия ЭМП может быть определена только через параметры магнитного поля:

$$W = \int_V \left(\int_0^B \vec{H} d\vec{B} \right) dV. \quad (13)$$

В первом приближении можно пренебречь переменностью магнитной проницаемости материала и считать ее постоянной. Тогда введем в рассмотрение так называемый векторный магнитный потенциал \vec{A} , который связан с вектором магнитной индукции следующим образом:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (14)$$

Энергию ЭМП можно записать в векторно-матричном виде:

$$W = \frac{1}{2} \{A\}^T [M] \{A\}, \quad (15)$$

где $[M]$ – матрица “магнитных свойств” материала, элементы которой зависят от свойств материала, геометрии тела и определяются с помощью фундаментальных уравнений Максвелла (1) с учетом соотношения (14).

Энергию упругого деформирования можно представить аналогичным векторно-матричным уравнением:

$$U^k = \frac{1}{2} \{u\}^T [K]^k \{u\}, \quad (16)$$

где $\{u\}$ – вектор-столбец узловых перемещений; $[K]^k$ – матрица жесткости.

Тогда вариационное уравнение (12) с учетом (15) и (16) запишем так:

$$\delta E^{k+1} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E^{k+1}}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial E^{k+1}}{\partial u} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [M]\{A\} + [M_k]\{u\} = 0; \\ [K^k]\{u\} + [K_m]\{A\} = 0; \end{array} \right. \quad (17)$$

$$[M_k] = \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{A\}}; \quad [K_m] = \frac{1}{2} \{A\}^T \frac{\partial [M]}{\partial \{u\}}.$$

Матрицы $[M_k]$, $[K_m]$ определяют влияние изменения компонентов ЭМП на механические характеристики материала. Кроме того, они характеризуют связь между ЭМП и механическими полями. В пренебрежении эффектами магнитострикции определение компонент ЭМП и НДС можно рассматривать как отдельные задачи. При этом произведение $[K_m]\{A\}$ с обратным знаком имеет смысл вектора-столбца узловых электромагнитных сил. Действительно, если для определения сил, которые действуют на точки деформируемого электропроводного тела при наличии ЭМП, применить принцип виртуальной работы, то получим

$$F_{em} = -\frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\int_V \left(\int_0^B \bar{H} d\bar{B} \right) dV \right) = -\int_V \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial u} dV - \int_V \int_0^B \bar{H} \frac{\partial V}{\partial u} d\bar{B}. \quad (18)$$

Если пренебречь влиянием электрического поля и не учитывать переменность магнитной проницаемости материала, то с учетом векторно-матричных обозначений имеем

$$\{F_{em}\} = -\frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} \{A\}^T [M] \{A\} \right) = -\frac{1}{2} \{A\}^T \frac{\partial [M]}{\partial u} \{A\} = -[K_m] \{A\}. \quad (19)$$

Таким образом, в данном случае задача определения векторных характеристик ЭМП и тензорных характеристик процесса деформирования сводится к системе двух уравнений, которые могут быть решены последовательно:

$$\left\{ \begin{array}{l} [M]\{A\} = 0; \\ [K]\{u\} = \{F_{em}\}, \quad \{F_{em}\} = -[K_m]\{A\}. \end{array} \right. \quad (20)$$

Отметим, что данный подход к определению электромагнитных сил встречается также в других работах, например в [11]. Приведенная система уравнений (20) дополняется условиями для векторного магнитного потенциала и перемещений на поверхности тел. В качестве источника ЭМП может рассматриваться электрический ток, который задается по замкнутому контуру одного или нескольких тел системы.

Пример расчета. Рассмотрим приложение предложенного метода к анализу деформирования системы индуктор-заготовка при применении технологии МИОМ, целью которой является выравнивание вмятин на тонких листовых заготовках. Принципиальные возможности проведения подобной технологической операции подробно изложены в работах [12–15], где в качестве источника, генерирующего импульс, предложено использовать массивный одновитковый индуктор с бандажом (рис. 1).

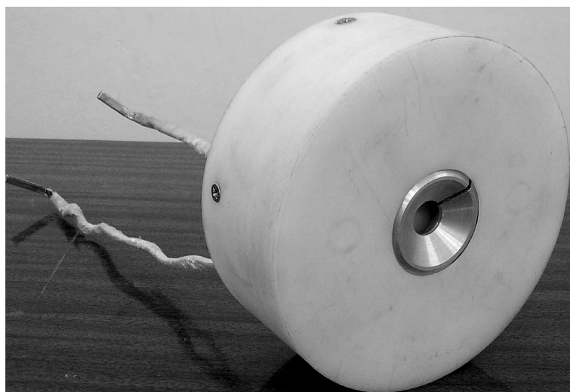


Рис. 1. Индукторная система для притяжения тонких листовых заготовок.

Из-за особенностей геометрии индуктора генерируемый электрический ток концентрируется в области конического рабочего окна, что подтверждается экспериментальными исследованиями. Такие индукторы успешно могут использоваться для притяжения металлов с относительной магнитной проницаемостью, большей единицы.

В работах [16–18] приведены результаты применения предложенного метода численного определения распределения ЭМП и деформированного состояния системы индуктор–заготовка к упрощенным расчетным схемам, аналогичных тем, для которых получены аналитические решения [12–14].

Сравнение численных результатов с данными аналитических и экспериментальных исследований свидетельствует о возможности применения предложенного метода для определения компонент ЭМП и анализа их распределения в технологических системах МИОМ. Также был проведен анализ НДС системы индуктор (без бандажа) – заготовка, который показывает, что с повышением силы тока в индукторе значительно увеличиваются компоненты тензора напряжений, что может привести к его необратимому деформированию и разрушению. Данный факт также нашел подтверждение при тестовых испытаниях прототипов. Разработчики предложили использовать бандаж для улучшения прочностных характеристик.

Рассмотрим расчетную схему системы бандажированный индуктор–заготовка в соответствии с осесимметричной постановкой задачи (рис. 2,а). Решение проводилось при следующих геометрических параметрах системы: внешний диаметр индуктора 100 мм; толщина индуктора 15 мм; угол наклона конической поверхности 60°; внешний диаметр бандажа 130 мм; толщина бандажа 45 мм; толщина пластины (заготовки) 2 мм. Исследовалось также деформирование пластины с вмятиной, диаметр которой выбирался равным диаметру рабочего окна индуктора, большим и меньшим его (рис. 2,б,в,г). Физико-механические свойства элементов расчетной схемы принимались следующими: индуктор – материал медь: относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1$, модуль упругости $E = 180$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$, предел текучести $\sigma_T = 200...210$ МПа; бандаж – материал стеклотекстолит: относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1$, модуль упругости $E = 35$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$; заготовка – материал сталь: относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1,3$, модуль упругости $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$, предел текучести $\sigma_T = 300...380$ МПа; воздух: относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1$. Задача решалась в квазистационарной постановке, в качестве источника поля рассматривался ток, равномерно распределенный по линии Γ_2 ($I_m = 50$ кА) – рис. 2,а.

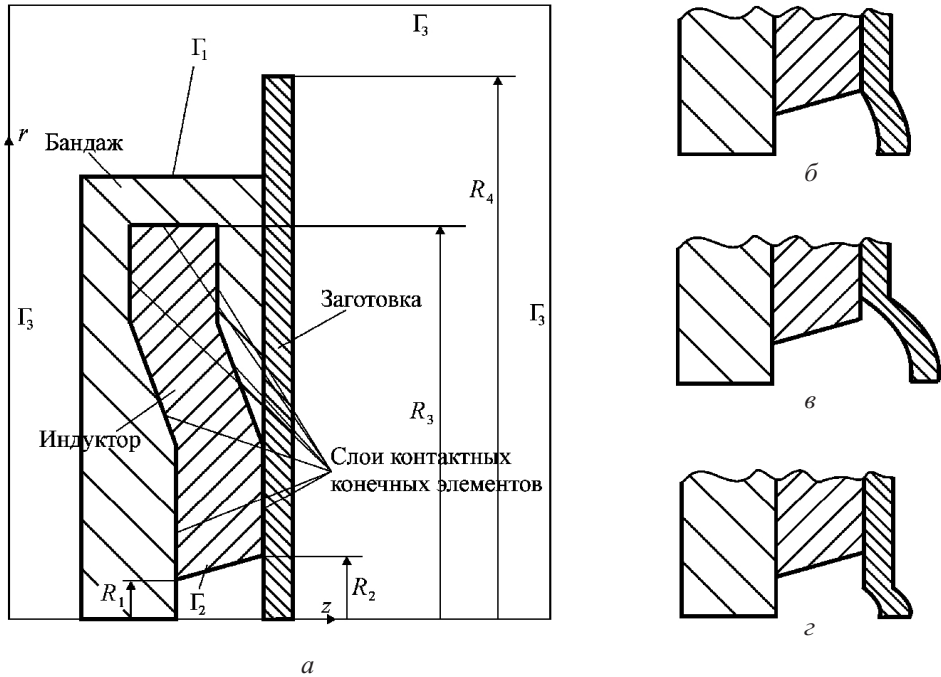


Рис. 2. Расчетная схема для системы бандажированный индуктор–заготовка.

Между индуктором, бандажом и заготовкой вводились слои контактных конечных элементов (ККЭ), которые объединили отдельные элементы в единую систему. Кроме того, с помощью ККЭ между бандажом и индуктором моделировался натяг. На линии Γ_1 (рис. 2,а) задавались условия закрепления ($u_r = u_z = 0$). На первом этапе решения задачи получено распределение векторных компонент ЭМП. Также обеспечивалось удовлетворение условия затухания ЭМП на удалении от источника, что эквивалентно $A|_{\Gamma_3} = 0$.

На втором этапе анализировалось деформирование системы. Основные результаты анализа таковы. Максимальные значения интенсивности напряжений в индукторе наблюдаются в непосредственной близости к рабочему окну, в заготовке – напротив рабочего окна, причем в материале заготовки величина интенсивности напряжений выше предела текучести. На рис. 3 представлены распределение интенсивности напряжений в непосредственной близости к рабочему окну и деформированное состояние системы.

Сравнение результатов, полученных для вмятины, обладающей разным диаметром, показывает, что в случае если он меньше диаметра рабочего окна индуктора, цель рассматриваемой технологии не достигнута.

Были проведены также расчеты, в которых при заданной величине силы тока варьировались глубина вмятины (рис. 2,а) и величина натяга между бандажом и индуктором (рис. 4). Из рис. 4 видно, что при глубине вмятины больше 3 мм предел текучести материала заготовки при заданном значении силы тока не достигается. С увеличением натяга бандажа напряжения в индукторе значительно снижаются. Сравнение полученных данных с приведенными в [17, 18] показывает, что интенсивность напряжений в индукторе существенно зависит от величины натяга. Таким образом, использование бандажей для индукторов подобного класса позволяет увеличивать силу тока в импульсе без значительного повышения напряжений в индукторе.

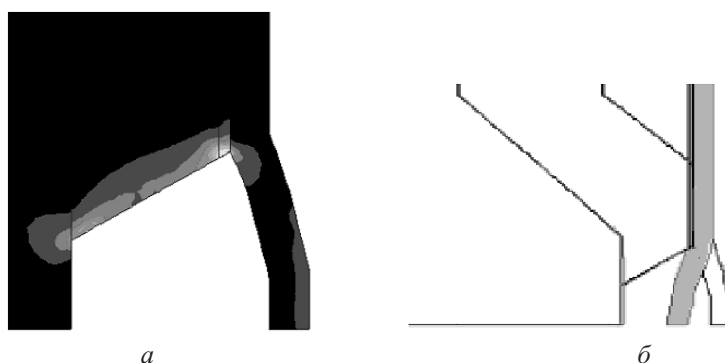


Рис. 3. Напряженно-деформированное состояние индуктора, бандажа и заготовки (с вмятиной): *a* – распределение интенсивности напряжений в непосредственной близости к рабочему окну; *б* – деформированное состояние системы. (Затемненная часть – деформированная заготовка.)

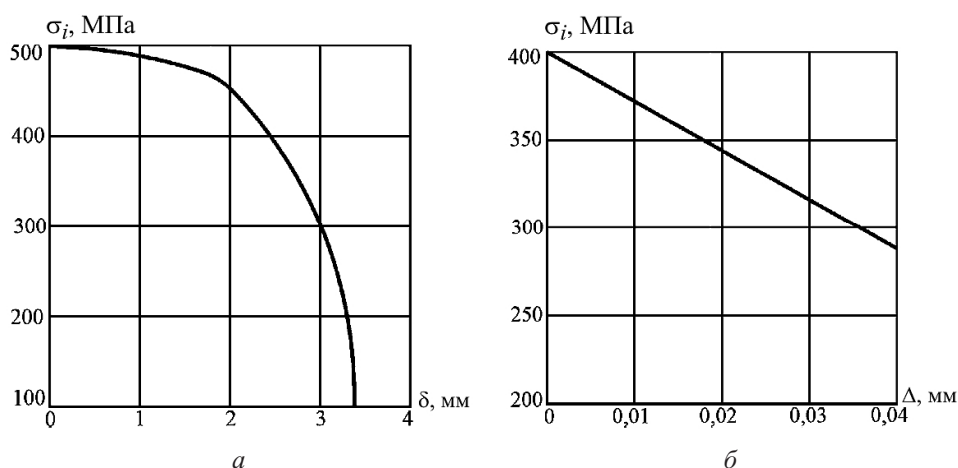


Рис. 4. Зависимость максимальной интенсивности напряжений в матрице от глубины вмятины δ (*a*) и в индукторе от величины натяга бандажа Δ (*б*).

Выводы

1. Представлены математическая постановка и метод анализа упругопластического деформирования системы электропроводных тел при действии электромагнитного поля. Численная реализация метода базируется на методе конечных элементов и методе переменных параметров упругости совместно с пошаговым решением задачи уравновешенного состояния вариационным методом.

2. Для контактно-взаимодействующих тел при магнитно-импульсной обработке материалов, предназначенных для выравнивания вмятин на тонкостенных элементах конструкций, разработана расчетная схема, включающая индуктор, бандаж и заготовку, и проанализировано напряженно-деформированное состояние, что впервые позволило оценить характеристики кратковременной прочности индуктора.

3. Проанализировано влияние технологических и конструктивных параметров на распределение компонент напряженно-деформированного состояния в индукторе и заготовке. Выявлено, что использование бандажа, который соединен с индуктором с натягом, позволяет значительно снизить величину интенсивности напряжений в индукторе. Установлена также степень влияния размеров вмятины на обрабатываемой заготовке на ее напряженно-деформированное состояние.

Резюме

Наведено постановку і розв'язок задачі пружно-пластичного деформування системи електропровідних тіл при дії імпульсного електромагнітного поля. Представлено чисельний метод розв'язку задачі на базі методу скінченних елементів. Проаналізовано деформування контактної-взаємодіючих тіл при магнітно-імпульсній обробці матеріалів. Досліджено вплив технологічних та конструктивних параметрів системи індуктор–заготовка на її напружено-деформований стан.

1. *Kruszka L., Stepanov G. V., Zubov V. I., and Babutskii A. I.* Pulse current treatment effect on the strength of reinforcing steel and its weld joint under impact loading // Пробл. прочности. – 2009. – № 3. – С. 89–96.
2. *Бабуцкий А. И.* Влияние обработки импульсным электрическим током на скорость коррозии и прочность образцов из стали 45 // Там же. – 2010. – № 4. – С. 96–104.
3. *Степанов Г. В., Бабуцкий А. И., Мамеев И. А. и др.* Перераспределение остаточных сварочных напряжений при обработке импульсным электромагнитным полем // Там же. – 2011. – № 3. – С. 123–131.
4. *Стрижало В. А., Новогрудский Л. С., Оправхата Н. Я.* Влияние электрического тока на механические характеристики рельсовой стали // Там же. – 2010. – № 4. – С. 145–153.
5. *Psyk V., Rich D., Kinsey B. L., et al.* Electromagnetic forming – a review // J. Mater. Process. Tech. – 2011. – **211**, No. 5. – P. 787–829.
6. *Svendsen B. and Chanda T.* Continuum thermodynamic modeling and simulation of electromagnetic metal forming // Technische Mechanik. – 2003. – **23**. – P. 103–112.
7. *Cui X., Mo J., Xiao S., et al.* Numerical simulation of electromagnetic sheet bulging based on FEM // Int. J. Adv. Manuf. Tech. – 2011. – 57. – P. 127–134.
8. *Deng J., Li C., Zhao Z., et al.* Numerical simulation of magnetic flux and force in electromagnetic forming with attractive force // J. Mater. Process. Tech. – 2007. – **184**. – P. 190–194.
9. *Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Куркач Б. Н. и др.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.
10. *Бондарь С. В., Лавинский Д. В.* Исследование термоупругопластического контактного деформирования составных конструкций технологической оснастки // Пробл. прочности. – 2011. – № 4. – С. 114–123.
11. *Ren Z., Besbes M., and Boukhtache S.* Calculation of local magnetic forces in magnetized materials // Proc. of the First Int. Workshop on Electric and Magnetic Fields. – Liege, 1992. – P. 64.1–64.6.
12. *Туренко А. Н., Батыгин Ю. В., Гнатов А. В.* Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Т. 3: Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями. – Харьков: ХНАДУ, 2009. – 240 с.
13. *Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., and Gnatov A. V.* Pulsed electromagnetic attraction of sheet metals – fundamentals and perspective applications // J. Mater. Process. Tech. – 2013. – **213**. – P. 444–452.
14. *Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., and Gnatov A. V.* Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals // Ibid. – 2014. – **214**. – P. 390–401.

15. *Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V., and Chaplygin E. A.* Pulsed electromagnetic attraction processes for sheet metal components // High Speed Forming 2014 (Proc. of the 6th Int. Conf., May 26–29, 2014, Daejeon, Korea). – 2014. – P. 253–260.
16. *Morachkovsky O. K. and Lavinsky D. V.* Nonlinear dynamics of a thin plate in a nonstationary electromagnetic field of the inductor // Тез. доп. IV Міжнар. конф. (19–22 червня 2013 р., Севастополь). – Харків: Точка, 2013. – С. 299–304.
17. *Лавинский Д. В.* Анализ напряженно-деформированного состояния систем для обработки материалов силами импульсных электромагнитных полей // Вісн. НТУ “ХПІ”. Серія: Динаміка і міцність машин. – 2013. – № 58 (1031). – С. 92–98.
18. *Лавінський Д. В., Морачковський О. К.* Нестационарне деформування елементів конструкцій під дією електромагнітного поля // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 4 (76). – С. 19–23.

Поступила 10. 11. 2015