УДК 532.54

СТРУКТУРНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОДЕЛИ ПРОКТОРА-СИВАШИНСКОГО

Е.В. Белкин, И.В. Гущин, А.В. Киричок, В.М. Куклин
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина
E-mail: kuklinvm1@rambler.ru

Обсуждается характер структурных переходов в формировании пространственной структуры возмущений в модели Проктора-Сивашинского. Показано, что процесс развития возмущений состоит из последовательного возникновения и разрушения нескольких метастабильных состояний и формирования устойчивой правильной пространственной решетки. Отмечается корреляция между разными представлениями о дефектности структуры. Обсуждается возможность использования модифицированной модели для имитационного моделирования фазовых переходов второго рода в конденсированных средах и в системах типа пылевой плазмы.

1. ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении различных процессов в сплошных средах необходимо учитывать существование возмущений различного пространственно-временного масштаба. Нелинейность среды проявляется в наличии определенных механизмов взаимодействия таких возмущений. Процессы с участием большого количества возмущений разного масштаба часто называют многомодовыми или многоволновыми. Описание процессов с учетом плотного спектра возмущений позволяет обнаружить существование долгоживущих квазиустойчивых нелинейных состояний, а также корректно определить характерные времена переходных процессов – структурных переходов между этими состояниями. Ниже обсудим характер развития многомодовых режимов развития конвекции в тонком слое жидкости.

Уравнение Проктора-Сивашинского [1,2], описывающее развитие конвекции в тонком слое, позволяло без труда найти ряд стационарных решений с малым число пространственных мод, одно из которых (конвективные ячейки) оказалось устойчивым, а второе (конвективные валы) – нестабильным (см. например, [3]). Более детальное изучение модели [4] с использованием многомодового описания позволило выяснить, что сначала возникает квазиустойчивое долгоживущее состояние, которое за достаточно большое время, значительно большее обратного линейного инкремента процесса, переходит в устойчивое состояние. Причем каждой из возникающих пространственных структур (конвективные валы, модулированные в поперечном направлении конвективные валы и конвективные ячейки) отвечает определенное значение интегральной квадратичной формы.

Данная модель является достаточно привлекательной для имитационного моделирования процессов структурообразования в средах, где есть выделенный характерный размер взаимодействия между квазичастицами или элементами будущей структуры. Оказывается, наличие локальных минимумов потенциала взаимодействия определяет характер пространственных структур. Ниже на примере модели Проктора-Сивашинского обсудим механизмы структурообразования и процессы структурных переходов в подобных случаях.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Если число Релея Ra превышает критическое значение Ra_{thr}, т.е. $Ra = Ra_{thr}(1+\varepsilon)$, в слое жидкости между плохо проводящими тепло горизонтальными поверхностями (вдоль оси z) возникает трехмерная конвекция (см. например, [5]), описываемая уравнением Проктора-Сивашинского [1,2], которое определяет динамику температурного поля этого процесса в горизонтальной плоскости (x,y):

$$\dot{\Phi} = \varepsilon^2\Phi - (1-\nabla^2)^2\Phi + \frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\Phi|\Phi|^2\right) + \varepsilon^2 f, \quad (1)$$

где f – внешний аддитивный шум; ε, определяющая превышение порога развития конвекции, считается достаточно малой и положительно определенной величиной. В этих условиях решение можно искать в форме

$$\Phi = \varepsilon\sum_j a_j \exp(i\vec{k}_j\vec{r}) \quad (2)$$

с $|\vec{k}_j| = 1$. Перенормируя единицу времени $\propto \varepsilon^2$, для медленных амплитуд a_j, получаем эволюционное уравнение [3]:

$$\dot{a}_j = a_j - \sum_{i=1}^{N} V_{ij}\,|a_i|^2\,a_j + f, \quad (3)$$

где коэффициенты взаимодействия определены соотношениями:

$$V_{jj} = 1, \quad (4)$$

$$V_{ij} = (2/3)\left(1 - 2\left(\vec{k}_i\vec{k}_j\right)^2\right) = (2/3)\left(1 + 2\cos^2\vartheta\right), \quad (5)$$

где ϑ – угол между векторами $\vec{k}_i$ и $\vec{k}_j$.

Вообще говоря, ширина интервала неустойчивости в k-пространстве представляет собой кольцо, средний радиус которого равен единице, а ширина – порядка величины относительной надпороговости ε, т.е. много меньше единицы. Во время развития неустойчивости из-за роста нелинейных членов эффективный инкремент мод, лежащих вне весьма малой окрестности вблизи единичной окружности, будет убывать и может изменить знак. Наибольший интерес будут представлять моды, находящиеся именно на данной единичной окружности, т.е. рассмотрим упрощенную модель явления, полагая, что спектр колебаний уже располагается на единичной окружности в k-пространстве.

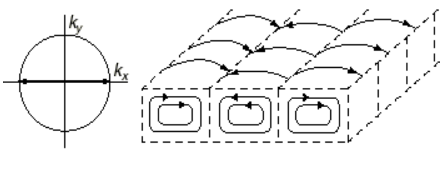
ВОПРОСЫ АТОМНОЙ НАУКИ И ТЕХНИКИ. 2010. № 4.
Серия: Плазменная электроника и новые методы ускорения (7), с.296-298.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Развитие возмущений в системе, как показывает численный анализ уравнения (3), происходит следующим образом [4,6]. Из начальных флуктуаций быстро возбуждается широкий спектр по ϑ. Значение квадратичной формы этого спектра $I = \sum_j a_j^2$ можно оценить, приравняв правую часть (3) нулю, при этом получим значение, близкое к 0,75.

В работах [4,7] показано, что в случае большого числа мод при высокой точности расчетов система задерживается в своем развитии, оставаясь в динамическом равновесии. Для дальнейшего развития – «кристаллизации», одна из мод должна получить порцию энергии, превышающую некоторый порог, т.е. в этих условиях необходимо наличие определенного уровня шума – флуктуаций. Это достигается при конечном значении шума $f \neq 0$ или при уменьшении точности расчетов, что, как отмечается в [7], эквивалентно. Подобные случаи, когда шум способен спровоцировать или ускорить процесс неустойчивости, собраны в книге [8].

Если одна из мод получает нужную порцию энергии, развивается процесс формирования простейшей конвективной структуры – валов (Рис.1,а). Величина I при этом достигает значений, близких к единице ($I \to 1$). Однако это состояние не является устойчивым и наблюдается структурный переход: конвективные валы испытывают модуляцию вдоль оси вращения жидкости, характерный размер которой сокращается. В этом переходном состоянии система находится достаточно большое время (которое незначительно растет в определенных пределах при увеличении числа мод), причем при этом сохраняется значение $I \approx 1.07$. Спустя достаточно большое время, в десятки раз превосходящее обратный инкремент начальной линейной неустойчивости, из вновь образованного "бокового" спектра "выживает" лишь одна мода, амплитуда которой сравнивается с амплитудой первоначальной лидирующей моды. В конечном итоге формируется устойчивая конвективная структура – квадратные ячейки (см. Рис.1,б), при которой квадратичная форма системы достигает значения $I = 1.2$.



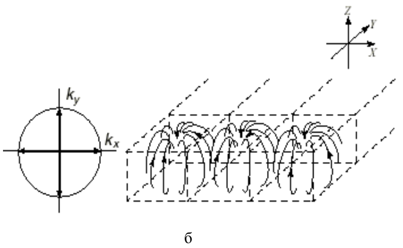


Рис.1. Конвективные структуры: валы (а) и квадратные ячейки (б)

Дальнейшие исследования процесса обнаружили следующую динамику изменения интегральной квадратичной формы $I = \sum_j a_j^2$ со временем (Рис.2). Именно после первого всплеска производной формируется метастабильная структура – система конвективных валов, причем, вплоть до второго всплеска величина $I \approx 1$ не изменяется. Следующий всплеск $\partial I / \partial t$ сигнализирует о появлении вторичной метастабильной структуры с новым значением $I \approx 1.07$. После второго всплеска производной квадратичной формы начинает формироваться стабильная структура конвективных ячеек. Подобное поведение системы убеждает в существовании структурно-фазовых переходов в данной системе.

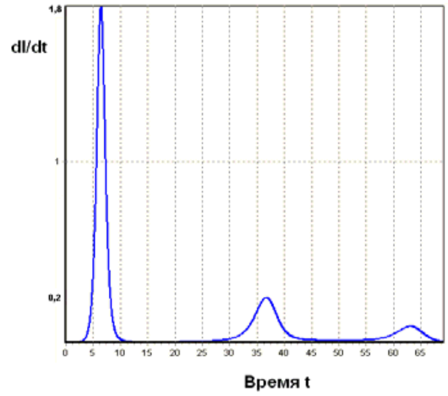


Рис.2. Поведение производной $\partial I / \partial t$ интегральной квадратичной формы $I = \sum_j a_j^2$

Рассмотрим более подробно формирование стабильной структуры конвективных ячеек. Обозначим амплитуды мод, формирующих в каждой реализации пространственную структуру квадратных конвективных ячеек, как a_1 и a_2. На интервале между вторым и третьим всплесками производной квадратичной формы (см. Рис.2) изучим динамику «спектральной дефектности» структуры $D = \sum_{j \neq 1,2} a_j^2 / \sum_j a_j^2$, основанной на отношении квадратов амплитуд мод спектра, не отвечающего системе квадратных ячеек, к полной сумме квадратов мод, а также так называемую «визуальную дефектность» $d = N_{def} / N$, где N_{def} – число дефектных пространственных ячеек (площадь структуры, занятая нерегулярными ячейками) и N – число ячеек в идеальной регулярной структуре (полная площадь структуры).

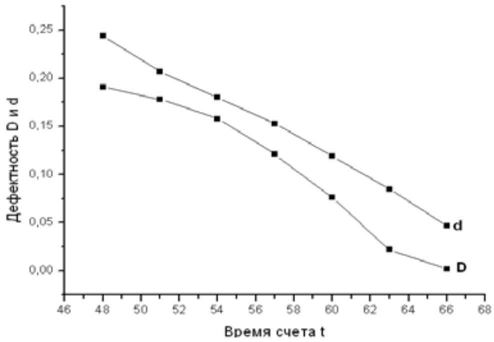


Рис.3. Сравнительный анализ спектральной и визуальной дефектности. Число мод - 50

Критерии, по каким считать ячейку правильной, и метод, позволяющий подсчитать число этих ячеек, следующие. Полученная картина для поля переводится в режим 8-битного изображения, т.е. максимальное количество отображаемых цветов уменьшается до 256. Тем самым сформировавшаяся структура становится более явно различимой. При увеличении подобного изображения можно достаточно явно различить, какая из структурных единиц является необходимой нам правильной ячейкой, а какая – нет. Правильная ячейка имеет правильную геометрическую форму с равномерно темным центром и соизмеримыми с центром по размеру четырьмя возвышенностями более светлого равномерного окраса.

Несмотря на качественный характер описания величин, характеризующих спектральную и визуальную дефектность структуры, можно отметить подобное их поведение (Рис.3) при приближении к завершению структурного перехода.

ВЫВОДЫ

Особенностью этой модели описания конвекции является наличие трех состояний. Времена структурных переходов между метастабильными состояниями меньше времени их существования.

Характерный размер конвективных образований в режиме развитой неустойчивости и принятых единицах измерения порядка $2\pi/k \propto 2\pi$, а длина волновых векторов порядка единицы. Потенциал взаимодействия пространственных мод $V_{ij} = (2/3)(1 + 2\cos^2 \vartheta_{ij})$ имеет глубокий минимум для углов $\vartheta_{ij} = \vartheta_l - \vartheta_j$ между векторами $\vec{k}_i$ и $\vec{k}_j$ двух пространственных мод $\vartheta_{ij} = \pm\pi/2$. Именно эти минимумы порождают неустойчивость структуры валов [3]. Ибо существование минимума V_{ij} для мод с относительно небольшими амплитудами позволяет им продолжать свой рост, подавляя при этом возникшие прежде возмущения.

При приближении к стабильному состоянию пространственная структура избавляется от множества дефектов, причем наблюдается корреляция между относительной долей наблюдаемых визуально (геометрически) дефектов структуры и величиной дефектности, определяемой как отношение квадратов амплитуд мод спектра, не отвечающего системе квадратных ячеек к полной сумме квадратов мод.

Данная модель при достаточно небольшой модификации представляет интерес для широкого применения для целей имитационного моделирования процессов формирования структур и фазовых переходов второго рода. Наличие большего числа минимумов на периоде изменения угла ϑ (например, шести) приведет в конечном итоге к появлению пространственной структуры в виде вписанного в единичный круг многогранника с большим числом ребер (шестигранника). Изменяя пространственную структуру локальных минимумов потенциала и их величину, можно добиться формирования любой симметричной пространственной структуры, причем, наблюдая последовательно формирование метастабильных состояний и все стадии структурных переходов. Это позволяет применять модифицированную подобным образом модель для качественного описания процессов формирования как минимум двумерных пространственных структур в системах, где есть один выделенный масштаб, в частности, в конденсированных средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Chapman, M.R.E. Proctor. Nonlinear Rayleigh-Benard convection between poorly conducting boundaries // *J. Fluid Mech.,* 1980, №101, p.759-765.
2. V. Gertsberg and G.E. Sivashinsky. Large cells in nonlinear Rayleigh-Benard convection // *Prog. Theor. Phys.* 1981, №66, p.1219-1229.
3. Б.А. Маломед, А.А. Непомнящий, М.П. Трибельский. Двумерные квазипериодические структуры в неравновесных системах // *ЖЭТФ*. 1989, т.96, с.684-699.
4. A.V. Kirichok and V.M. Kuklin. Allocated Imperfections of Developed Convective Structures // *Physics and Chemistry of the Earth Part A.* 1999, №6, p.533-538.
5. S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Third printing of the Clarendon Press Oxford University Press edition, Dover Publication, Inc. New York, 1970, 704p.
6. В.М. Куклин. Роль поглощения и диссипации энергии в формировании пространственных нелинейных структур в неравновесных средах // *УФЖ. Обзоры.* 2004, т.1, №1, с.49-81.
7. Е.В. Белкин, И.В. Гущин. *Математическая модель конвекции слоя жидкости с градиентом температуры.* Харьков: ХНУ, КМНТ, 2010, т.1, с.39-40.
8. В. Хорстхемке, Р. Лефевр. *Индуцированные шумом переходы* / Пер с англ. М.: «Мир», 1987, 400с.

Статья поступила в редакцию 16.06.2010 г.

STRUCTURAL TRANSITIONS IN THE MODEL OF PROCTOR-SIVASHINSKY

E.V. Belkin, I.V. Gushchin, A.V. Kirichok, V.M. Kuklin

The structural transitions appearing during the formation of spatial convective structures are discussed within framework of the Proctor-Sivashinsky model. It is shown that dynamics of perturbations consists of successive formation and destruction of several metastable states and the formation of a stable regular spatial convective lattice. The correlation between the different concepts of structural defects is noted. We discuss the possibility of using the modified model for simulation of phase transitions in condensed matter.

СТРУКТУРНІ ПЕРЕХОДИ У МОДЕЛІ ПРОКТОРА-СІВАШИНСЬКОГО

Є.В. Бєлкін, І.В. Гущин, О.В. Киричок, В.М. Куклін

Обговорюється характер структурних переходів у формуванні просторової структури збурень в моделі Проктора-Сівашинського. Показано, що процес розвитку збурень складається з послідовного виникнення і руйнування декількох метастабільних станів і формування стійкої правильної просторової решітки. Відзначається кореляція між різними уявленнями про дефектності структури. Обговорюється можливість використання модифікованої моделі для імітаційного моделювання фазових переходів другого роду в конденсованих середовищах та в моделях запорошеної плазми.