

# ИСТОКООБРАЗНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПОЛЯ КРУГЛОГО РЕЗОНАТОРА

С.Д. Прийменко

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
Харьков, Украина

E-mail: [sprijmenko@kipt.kharkov.ua](mailto:sprijmenko@kipt.kharkov.ua)

В явном виде выделена сингулярная часть электрической функции Грина для поля круглого резонатора в форме функции Грина неограниченного пространства. Задача построения функции Грина для поля решена как задача дифракции тензорных расходящихся сферической и квазисферической волн на стенках круглого резонатора. Приведены аналитические соотношения для сингулярной и регулярной частей тензорной функции Грина, а также результаты расчета одного из ее компонент.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Эффективным аппаратом математической физики есть интегральные уравнения, в частности сингулярные и гиперсингулярные уравнения [1], с ядром в виде функции Грина. Данные уравнения применяются для анализа нагруженных цилиндрических волноводов [2], при расчете электромагнитного поля в коаксиальном гиротроне [3] и накопителях пучков заряженных частиц [4].

Преимущества сингулярных и гиперсингулярных уравнений связаны с использованием хорошо обусловленных матриц, которые обеспечивают высокую точность и стабильность вычислений. Однако при этом необходимо вычислять электрическую функцию Грина для поля  $\vec{G}_e(k, r', r)$  на малых расстояниях между точками источника и наблюдения. Наличие границ резонатора порождает дискретный спектр пространственных частот и разложение  $\vec{G}_e(k, r', r)$  в ряды по системе собственных функций, которые плохо сходятся в области источника. Это обусловлено тем, что  $\vec{G}_e(k, r', r)$  в неявном виде включает электрическую функцию Грина неограниченного пространства для поля  $\vec{G}_e^S(k, r', r)$ , которая имеет особенности  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ ,  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|^2$ ,  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$ ,  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ .

Задача построения функции Грина для поля решена как задача дифракции тензорных расходящихся сферической и квазисферической волн на стенках круглого резонатора. Сферическая и квазисферическая волны определяются соответственно векторным и скалярным потенциалами, причем квазисферическая волна соответствует потенциальной составляющей напряженности электрического поля.

Это позволило выделить в явном виде особенности функции Грина для поля и создать эффективный алгоритм ее вычисления при произвольном расстоянии между точками источника и наблюдения.

Использование функции Грина в виде

$$\vec{G}_e(k, r', r) = \vec{G}_e^S(k, r', r) + \vec{G}_e^R(k, r', r),$$

где  $\vec{G}_e^R(k, r', r)$  есть регулярная функция Грина, учитывающая влияние стенок резонатора, дает возможность выделить особенность источника в явном

виде и обеспечить численное решение двумерных гиперсингулярных интегральных уравнений вместо трехмерных уравнений.

По вышеуказанной методике в [5] получена одна из компонент  $\vec{G}_e(k, r', r)$  и вычислена ее составляющая, соответствующая векторному потенциалу. В настоящей публикации построены все компоненты и рассчитывается вклад как векторного, так и скалярного потенциалов в электрическую функцию Грина  $\vec{G}_e(k, r', r)$  круглого резонатора.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Электрическая функция Грина для поля является решением тензорной краевой задачи

$$[\text{rot}_r, \text{rot}_r - k^2] \vec{G}_e(k, r', r) = \vec{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (1)$$

$$\vec{n}(r_s) \times \vec{G}_e(k, r', r_s) = 0 \quad (2)$$

и определяется соотношением

$$\vec{G}_e(k, r', r) = [\vec{I} + (1/k^2) \text{grad}_r \text{div}_r] \vec{G}_E(k, r', r), \quad (3)$$

где  $\vec{G}_E(k, r', r)$  есть функция Грина для векторного потенциала. Соотношение (3) совпадает с выражением в [6] и может быть переписано в виде:

$$\vec{G}_e(k, r', r) = \vec{G}_e^P(k, r', r) + \vec{G}_e^A(k, r', r); \quad (4)$$

$$\vec{G}_e^P(k, r', r) = (1/k^2) \text{grad}_r \text{div}_r \vec{G}_E(k, r', r); \quad (5)$$

$$\vec{G}_e^A(k, r', r) = \vec{G}_E(k, r', r), \quad (6)$$

при этом  $\vec{G}_e^P(k, r', r)$  – потенциальная составляющая функции Грина для поля, соответствующая скалярному потенциалу;  $\vec{G}_e^A(k, r', r)$  – составляющая функции Грина для поля, соответствующая векторному потенциалу, которая включает как потенциальную, так и вихревую части.

## 3. ИСТОКООБРАЗНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В соответствии с (7) [7]

$$\vec{G}_E(k, r', r) = \vec{G}_E^S(k, r', r) + \vec{G}_E^R(k, r', r). \quad (7)$$

Откуда с учетом (4)-(6) имеем:

$$\vec{G}_e^P(k, r', r) = \vec{G}_e^{Sp}(k, r', r) + \vec{G}_e^{Rp}(k, r', r); \quad (8)$$

$$\vec{G}_e^A(k, r', r) = \vec{G}_e^{Sa}(k, r', r) + \vec{G}_e^{Ra}(k, r', r); \quad (9)$$

$$\vec{G}_e(k, r', r) = \vec{G}_e^S(k, r', r) + \vec{G}_e^R(k, r', r), \quad (10)$$

где

$$\vec{G}_e^S(k, r', r) = \vec{G}_e^{Sp}(k, r', r) + \vec{G}_e^{Sa}(k, r', r); \quad (11)$$

$$\vec{G}_e^R(k, r', r) = \vec{G}_e^{Rp}(k, r', r) + \vec{G}_e^{Ra}(k, r', r); \quad (12)$$

$$\vec{G}_e^{Sp}(k, r', r) = (1/k^2) \text{grad}_r \text{div}_r \vec{G}_E^S(k, r', r) \quad (13)$$

$$\vec{G}_e^{Sa}(k, r', r) = \vec{G}_E^S(k, r', r); \quad (14)$$

$$\vec{G}_e^{Rp}(k, r', r) = (1/k^2) \text{grad}_r \text{div}_r \vec{G}_E^R(k, r', r); \quad (15)$$

$$\vec{G}_e^{Ra}(k, r', r) = \vec{G}_E^R(k, r', r). \quad (16)$$

При этом  $\vec{G}_E^S(k, r', r)$  и  $\vec{G}_E^R(k, r', r)$  – сингулярная и регулярная составляющие функции Грина для векторного потенциала круглого резонатора;  $\vec{G}_e^S(k, r', r)$  и  $\vec{G}_e^R(k, r', r)$  соответствуют напряжениям электрического поля в неограниченном пространстве и электрического поля, отраженного от стенок круглого резонатора, для точечного источника тока;  $\vec{G}_e^{Sp}(k, r', r)$  и  $\vec{G}_e^{Sa}(k, r', r)$  обусловлены вкладом соответственно скалярного и векторного потенциалов в напряженность электрического поля точечного источника тока в неограниченном пространстве;  $\vec{G}_e^{Rp}(k, r', r)$  и  $\vec{G}_e^{Ra}(k, r', r)$  обусловлены вкладом соответственно скалярного и векторного потенциалов в напряженность электрического поля точечного источника тока, отраженного от стенок резонатора.

Функция Грина  $\vec{G}_e^S(k, r', r)$  для поля неограниченного пространства содержит особенности в явном виде. Сингулярные компоненты  $G_{e_y}^{Sp}(k, r', r)$  и  $G_{e_y}^{Sa}(k, r', r)$  описываются соответственно (18), (A.2)-(A.15) и (19), (A.16)-(A.20) [7], ( $G_{e_y}^{Sp}(k, r', r)$  и  $G_{e_y}^{Sa}(k, r', r)$  из [7] необходимо доумножить на  $1/k^2$ .

В истокообразной форме  $G_{e_{11}}^R(k, r', r)$  потенциальная составляющая, обусловленная скалярным потенциалом  $G_{e_{11}}^{Rp}(k, r', r)$ , и составляющая, обусловленная векторным потенциалом  $G_{e_{11}}^{Ra}(k, r', r)$  круглого резонатора, есть

$$G_{e_{11}}^R(k, r', r) = G_{e_{11}}^{Rp}(k, r', r) + G_{e_{11}}^{Ra}(k, r', r); \quad (17)$$

$$G_{e_{11}}^{Rp}(k, r', r) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e_{11}}^{Sp}(k; \vec{\rho}', z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e_{11}}^{Sp}(k; \vec{\rho}', -z'+2Lp; \vec{\rho}, z) + \frac{i}{2Lk^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') v^2 \left(\frac{p\pi}{L}\right) \sin \frac{p\pi z}{L} \times \sin \frac{p\pi z'}{L} J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) \rho'\right) J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) \rho\right) \frac{H_m^{(1)} \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) R\right)}{J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) R\right)}; \quad (18)$$

$$G_{e_{11}}^{Ra}(k, r', r) = G_{e_{11}}^R(k, r', r) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e_{11}}^S(k; \vec{\rho}', z'+2Lp; \vec{\rho}, z) -$$

$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e_{11}}^S(k; \vec{\rho}', -z'+2Lp; \vec{\rho}, z) -$$

$$\frac{i}{2L} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z}{L} \sin \frac{p\pi z'}{L} \left[ \frac{m^2}{v^2 \left(\frac{p\pi}{L}\right) \rho \rho'} \times \right.$$

$$\times J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) \rho'\right) J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) \rho\right) \frac{H_m^{(1)} \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) R\right)}{J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) R\right)} + \left. \right] \quad (19)$$

$$+ J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) \rho'\right) J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) \rho\right) \frac{H_m^{(1)} \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) R\right)}{J_m \left(v \left(\frac{p\pi}{L}\right) R\right)},$$

где  $\varepsilon_m$  – множитель Неймана,

$$v \left(\frac{p\pi}{L}\right) = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}, & k > \frac{p\pi}{L} \\ i \sqrt{\left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 - k^2}, & k < \frac{p\pi}{L} \end{cases}. \quad (20)$$

В области резонанса  $k \rightarrow \frac{p\pi}{L}$  необходимо под знаком двойной суммы в (21) и (22) использовать соответственно соотношения (21) и (22) из [7], выполняя интегрирование по контуру в пространстве комплексных волновых чисел в окрестности  $k = \frac{p\pi}{L}$ .

Слагаемые, определяемые в (19), (20) одинарными и двойными суммами, описывают напряженность электрического поля, обусловленного переотражениями расходящейся сферической волны только от торцевых стенок и от боковых и торцевых стенок резонатора соответственно.

Компоненты  $G_{e_{ij}}^R(k, r', r)$ , которые отвечают регулярной функции Грина для поля, отраженного от стенок резонатора, определяются в Приложении (П1). Потенциальные составляющие  $G_{e_{ij}}^{Rp}(k, r', r)$  и составляющие, обусловленные векторным потенциалом  $G_{e_{ij}}^{Ra}(k, r', r)$ , описываются (П2)-(П9) и (П10)-(П14) соответственно.

Задача построения  $\vec{G}_e(k, r', r)$  решена как задача дифракции тензорных расходящихся сферической и квазисферической волн на стенках круглого резонатора. Сферическая и квазисферическая волны соответствуют векторному и скалярному потенциалам. Сферическая волна является поперечной волной электромагнитного поля, а квазисферическая волна включает продольную электромагнитную волну, для которой электрическое поле направлено вдоль волнового вектора.

Потенциальная часть функции Грина неограниченного пространства  $\vec{G}_e^{Sp}(k, r', r)$  имеет минимальную особенность вида  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  [8]. Это означает, что

потенциальная составляющая напряженности электрического поля уравнения Гельмгольца, соответствующая продольной волне, убывает на бесконечности обратно пропорционально первой степени расстояния между точками источника и наблюдения. Последнее обусловлено эффектом запаздывания в отличие от кулоновского поля, являющегося решением уравнения Пуассона и убывающего обратно пропорционально квадрату расстояния между точками источника и наблюдения.

#### 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ВИДЕ ТЕ-, ТН-ВОЛН

В соответствии с (4)-(6) найдено 9 компонент  $\tilde{G}_e(k, r', r)$  в форме ТЕ- и ТН-волн круглого резонатора. В частности,  $G_{e_{1r}}(k, r', r)$  по системе ТЕ- и ТН-волн есть

$$G_{e_{1r}}(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') [A_{mn} (1 - (k_{mn}^h)^2) / k^2 \cdot J'_m(k_{mn}^h \rho') J'_m(k_{mn}^h \rho) f_{mn}(z', z) + B_{mn} (m^2 / (k_{mn}^e)^2 \rho' \rho) J_m(k_{mn}^e \rho') J_m(k_{mn}^e \rho) l_{mn}(z', z)], \quad (21)$$

где

$$A_{mn} = \frac{1}{\pi J_{m+1}^2(k_{mn}^e R) R^2}; \quad k_{mn}^h = \frac{\nu_{mn}}{R}; \quad k_{mn}^e = \frac{\mu_{mn}}{R};$$

$$B_{mn} = 1 / (\pi J_m^2(k_{mn}^e R) R^2 (1 - m^2 / (k_{mn}^e R)^2));$$

$$f_{mn}(z', z) = \frac{1}{\beta_{mn} sh \beta_{mn} L} \begin{cases} sh \beta_{mn} z \cdot sh \beta_{mn} (L - z'), & z < z' \\ sh \beta_{mn} z' \cdot sh \beta_{mn} (L - z), & z' < z \end{cases}$$

$$l_{mn}(z', z) = \frac{1}{\gamma_{mn} sh \gamma_{mn} L} \begin{cases} sh \gamma_{mn} z \cdot sh \gamma_{mn} (L - z'), & z < z' \\ sh \gamma_{mn} z' \cdot sh \gamma_{mn} (L - z), & z' < z \end{cases}$$

$$\gamma_{mn} = \sqrt{(k_{mn}^e)^2 - k^2}, \quad \beta_{mn} = \sqrt{(k_{mn}^h)^2 - k^2};$$

$\nu_{mn}, \mu_{mn}$  – корни уравнений  $J_m(z) = 0$  и  $J'_m(z) = 0$  соответственно.

Остальные компоненты  $\tilde{G}_e(k, r', r)$  по системе ТЕ- и ТН-волн круглого резонатора приведены в соотношениях (П15)-(П22) Приложения.

#### 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разработан алгоритм вычисления  $\tilde{G}_e(k, r', r)$  в виде ТЕ-и ТН-волн круглого резонатора и в истокообразном представлении, где в последнем случае особенности тензорной функции Грина выделены в явном виде. Эффективность вычисления  $\tilde{G}_e(k, r', r)$  в истокообразном представлении проиллюстрирована графиками Рис.1-2.

Рассчитывалась действительная часть компоненты  $Re G_{e_{1r}}(k, r', r)$  функции Грина закрытого круглого резонатора от номера азимутальной гармоники  $m$  для  $k=12.56$  1/м,  $R=0.0755$  м,  $L=0.81$  м.

Влияние смещения точки наблюдения относительно точки источника в радиальном и азимутальном, а также только в радиальном направлениях представлены на Рис.1-2 соответственно.

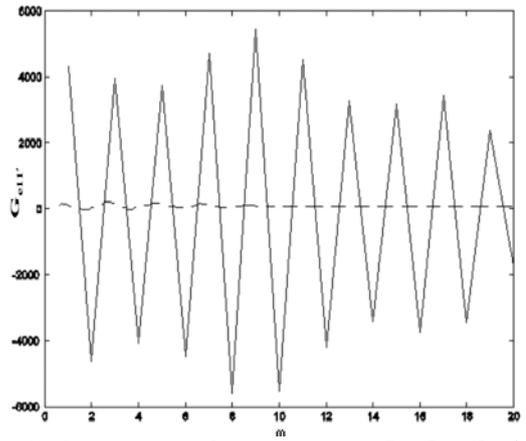


Рис.1. Компонента функции Грина  $Re G_{e_{1r}}(k, r', r)$  круглого резонатора ( $k=12.56$  1/м,  $R=0.0755$  м,  $L=0.81$  м,  $\rho=0.06$  м,  $\rho'=0.055$  м,  $\varphi=0$ ,  $\varphi'=\pi$ ,  $z=z'=0.0825$  м,  $|\vec{r}-\vec{r}'|/\lambda=0.23$ )

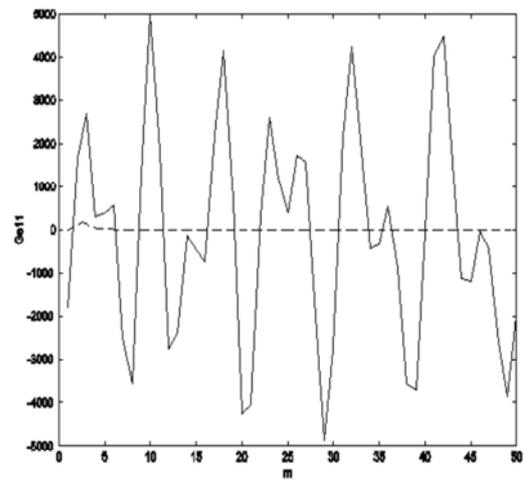


Рис.2. Компонента функции Грина  $Re G_{e_{1r}}(k, r', r)$  круглого резонатора ( $k=12.56$  1/м,  $R=0.0755$  м,  $L=0.81$  м,  $\rho=0.06$  м,  $\rho'=0.01$  м,  $\varphi=\varphi'=0$ ,  $z=z'=0.0825$  м,  $|\vec{r}-\vec{r}'|/\lambda=0.1$ )

Расчету  $Re G_{e_{1r}}(k, r', r)$  в виде ТЕ-, ТН-волн и в истокообразном представлении отвечают сплошные и пунктирные кривые. Расчетные значения в истокообразном представлении составили  $Re G_{e_{1r}}(k, r', r) = 0.525$  1/м и  $Re G_{e_{1r}}(k, r', r) = 9.58$  1/м соответственно (см. Рис. 1,2).

#### ВЫВОДЫ

Задача построения функции Грина для поля решена как задача дифракции тензорных расходящихся сферической и квазисферической волн на стенках круглого резонатора. Сферическая и квазисферическая волны соответствуют векторному и скалярному потенциалам. Сферическая волна является поперечной волной электромагнитного поля, а квазисферическая волна включает продольную электромагнитную волну, для которой электрическое поле направлено вдоль волнового вектора.

Продольная волна, соответствующая потенциальной составляющей напряженности электрического поля, в силу эффекта запаздывания убывает на

бесконечности обратно пропорционально первой степени расстояния между точками источника и наблюдения в отличие от кулоновского поля.

Выделение в явном виде особенности функции Грина для поля позволило создать эффективный алгоритм ее вычисления при произвольном расстоянии между точками источника и наблюдения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### РЕГУЛЯРНАЯ ЧАСТЬ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПОЛЯ КРУГЛОГО РЕЗОНАТОРА

Регулярная часть функции Грина для поля круглого резонатора представляет собой функцию Грина для поля, отраженного от стенок резонатора. Она определяется (12) и может быть записана в смешанном диадном базисе:

$$G_{eij}^{Rr}(k, r', r) = G_{eij}^{Rp}(k, r', r) + G_{eij}^{Rr}(k, r', r), \quad (П1)$$

где  $i = 1-3$ ,  $j' = 1-3$ . Компонента  $G_{e1j'}^{Rr}(k, r', r)$  приведена в (18)–(20), а остальные компоненты описываются ниже приведенными соотношениями.

Потенциальные составляющие имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{e12'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e12'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e12'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) + \frac{i}{2Lk^2 \rho'} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m m \sin m(\varphi - \varphi') v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \sin \frac{p\pi z'}{L} \sin \frac{p\pi z}{L} \\ &\times J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J'_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}; \end{aligned} \quad (П2)$$

$$\begin{aligned} G_{e13'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e13'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e13'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) + \frac{i}{2Lk^2} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \cos m(\varphi - \varphi') \cos \frac{p\pi z'}{L} \sin \frac{p\pi z}{L} \times \\ &\times \frac{p\pi}{L} J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J'_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}; \end{aligned} \quad (П3)$$

$$\begin{aligned} G_{e21'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e21'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e21'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) - \frac{i}{2Lk^2} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \sin m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z'}{L} \sin \frac{p\pi z}{L} \times \\ &\times \frac{m}{\rho} J'_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}; \end{aligned} \quad (П4)$$

$$\begin{aligned} G_{e22'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e22'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e22'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) + \frac{i}{2Lk^2} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z'}{L} \sin \frac{p\pi z}{L} \times \\ &\times \frac{m^2}{\rho' \rho} J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}; \end{aligned} \quad (П5)$$

$$\begin{aligned} G_{e23'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e23'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e23'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) - \frac{i}{2Lk^2} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{p\pi}{L} \sin m(\varphi - \varphi') \cos \frac{p\pi z'}{L} \sin \frac{p\pi z}{L} \times \\ &\times \frac{m}{\rho} J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}; \end{aligned} \quad (П6)$$

$$\begin{aligned} G_{e31'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e31'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e31'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) + \frac{i}{2Lk^2} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{p\pi}{L} \cos m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z'}{L} \cos \frac{p\pi z}{L} \times \\ &\times v \left( \frac{p\pi}{L} \right) J'_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}; \end{aligned} \quad (П7)$$

$$\begin{aligned} G_{e32'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e32'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e32'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) + \frac{i}{2Lk^2} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{p\pi}{L} \sin m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z'}{L} \cos \frac{p\pi z}{L}, \\ &\times \frac{m}{\rho'} J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}; \end{aligned} \quad (П8)$$

$$\begin{aligned} G_{e33'}^{Rp}(k, r', r) &= \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} G_{e33'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', z'+2Lp; \bar{\rho}, z) - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{e33'}^{Sp}(k; \bar{\rho}', -z'+2Lp; \bar{\rho}', z) + \frac{i}{2Lk^2} \times \\ &\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \left( \frac{p\pi}{L} \right)^2 \cos m(\varphi - \varphi') \cos \frac{p\pi z'}{L} \cos \frac{p\pi z}{L} \times \\ &\times J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho' \right) J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) \rho \right) \frac{H_m^{(1)} \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}{J_m \left( v \left( \frac{p\pi}{L} \right) R \right)}. \end{aligned} \quad (П9)$$

Компоненты  $G_{e_j'}^{Sp}(k, r', r)$  ( $i=1-3, j'=1-3$ ) в (21), (П.2)-(П.9) определяются соотношениями (18), (A.2)-(A.15) из [7].

Компонента  $G_{e_{11}'}^{Ra}(k, r, r')$ , обусловленная векторным потенциалом, приведена в (22), а остальные компоненты описываются соотношениями:

$$G_{e_{12}'}^{Ra}(k, r', r) = G_{E_{12}'}^R(k, r', r) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \approx 0}}^{+\infty} G_{E_{12}'}^S(k, \vec{\rho}', z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{E_{12}'}^S(k, \vec{\rho}', -z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \frac{i}{2L} \times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m m \sin m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z}{L} \sin \frac{p\pi z'}{L} \left[ \frac{J_m'(v(\frac{p\pi}{L})\rho')}{v(\frac{p\pi}{L})\rho} \times J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)} + \frac{1}{v(\frac{p\pi}{L})\rho'} \times J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho') J_m'(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)} \right]; \quad (\text{П10})$$

$$G_{e_{21}'}^{Ra}(k, r', r) = G_{E_{21}'}^R(k, r', r) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \approx 0}}^{+\infty} G_{E_{21}'}^S(k, \vec{\rho}', z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{E_{21}'}^S(k, \vec{\rho}', -z'+2Lp; \vec{\rho}, z) + \frac{i}{2L} \times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m m \sin m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z}{L} \sin \frac{p\pi z'}{L} \left[ \frac{J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho')}{v(\frac{p\pi}{L})\rho'} \times J_m'(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)} + \frac{1}{v(\frac{p\pi}{L})\rho} \times J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)} \right]; \quad (\text{П11})$$

$$G_{e_{22}'}^{Ra}(k, r', r) = G_{E_{22}'}^R(k, r', r) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \approx 0}}^{+\infty} G_{E_{22}'}^S(k, \vec{\rho}', z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{E_{22}'}^S(k, \vec{\rho}', -z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \frac{i}{2L} \times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \sin \frac{p\pi z}{L} \sin \frac{p\pi z'}{L} \left[ J_m'(v(\frac{p\pi}{L})\rho') \times J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)} + \frac{m^2}{v^2(\frac{p\pi}{L})\rho\rho'} \times J_m'(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)} + \frac{m^2}{v^2(\frac{p\pi}{L})\rho\rho'} \right]; \quad (\text{П12})$$

$$\times J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho') J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)}]; \quad (\text{П12})$$

$$G_{e_{33}'}^{Ra}(k, r', r) = G_{E_{33}'}^R(k, r', r) = \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \approx 0}}^{+\infty} G_{E_{33}'}^S(k, \vec{\rho}', z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} G_{E_{33}'}^S(k, \vec{\rho}', -z'+2Lp; \vec{\rho}, z) - \frac{i}{2L} \times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \cos \frac{p\pi z}{L} \cos \frac{p\pi z'}{L} J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho') \times J_m(v(\frac{p\pi}{L})\rho) \frac{H_m^{(1)}(v(\frac{p\pi}{L})R)}{J_m(v(\frac{p\pi}{L})R)}; \quad (\text{П13})$$

$$G_{e_{13}'}^{Ra}(k, r', r) = G_{e_{23}'}^{Ra}(k, r', r) = G_{e_{31}'}^{Ra}(k, r', r) = G_{e_{32}'}^{Ra}(k, r', r) = 0. \quad (\text{П14})$$

Компоненты  $G_{E_{ij}'}^S(k, r', r)$  ( $i=1-3, j'=1-3$ ) в (22), (П.0)-(П.13) определяются соотношениями (19), (A.16)-(A.20) из [7].

#### ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ПОЛЯ КРУГЛОГО РЕЗОНАТОРА В ВИДЕ ТЕ- И ТН-ВОЛН

$$G_{e_{12}'}(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_m m \sin m(\varphi - \varphi') [(A_{mn} / k_{mn}^h \rho') (1 - (k_{mn}^h)^2 / k^2) \cdot J_m(k_{mn}^h \rho') J_m'(k_{mn}^h \rho) f_{mn}(z', z) + (B_{mn} / k_{mn}^e \rho) J_m'(k_{mn}^e \rho') J_m(k_{mn}^e \rho) l_{mn}(z', z)]; \quad (\text{П15})$$

$$G_{e_{13}'}(k, r', r) = G_{e_{13}'}(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \times A_{mn} (k_{mn}^h / k^2) J_m(k_{mn}^h \rho') J_m'(k_{mn}^h \rho) \tilde{g}_{mn}(z', z); \quad (\text{П16})$$

$$G_{e_{21}'}(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} -\varepsilon_m m \sin m(\varphi - \varphi') [(A_{mn} / k_{mn}^h \rho) \times (1 - (k_{mn}^h)^2 / k^2) \cdot J_m'(k_{mn}^h \rho') J_m(k_{mn}^h \rho) f_{mn}(z', z) + (B_{mn} / k_{mn}^e \rho) J_m(k_{mn}^e \rho') J_m'(k_{mn}^e \rho) l_{mn}(z', z)]; \quad (\text{П17})$$

$$G_{e_{22}'}(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') [A_{mn} (m^2 / (k_{mn}^h)^2 \rho' \rho) (1 - (k_{mn}^h)^2 / k^2) \cdot J_m(k_{mn}^h \rho') J_m(k_{mn}^h \rho) \times f_{mn}(z, z') + B_{mn} J_m'(k_{mn}^e \rho') J_m(k_{mn}^e \rho) l_{mn}(z, z')]; \quad (\text{П18})$$

$$G_{e_{23}'}(k, r', r) = G_{e_{23}'}^p(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} -\varepsilon_m m \sin m(\varphi - \varphi') \times (A_{mn} / k^2 \rho) J_m(k_{mn}^h \rho') J_m(k_{mn}^h \rho) \tilde{g}_{mn}(z', z); \quad (\text{П19})$$

$$G_{e_{31}'}(k, r', r) = G_{e_{31}'}^p(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} -\varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') \times A_{mn} (k_{mn}^h / k) J_m'(k_{mn}^h \rho') J_m(k_{mn}^h \rho) \tilde{f}_{mn}(z', z); \quad (\text{П20})$$

$$G_{\varepsilon_{32}}(k, r', r) = G_{\varepsilon_{32}}^p(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} -\varepsilon_m m \sin m(\varphi - \varphi') \times \\ \times (A_{mn} / k^2 \rho') J_m(k_{mn}^h \rho') J_m(k_{mn}^h \rho) \tilde{f}_{mn}(z', z); \quad (\text{П21})$$

$$G_{\varepsilon_{33}}(k, r', r) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_m \cos m(\varphi - \varphi') A_{mn} \times \\ \times (1 + (\beta_{mn}^2 / k^2)) J_m(k_{mn}^h \rho') J_m(k_{mn}^h \rho) g_{mn}(z', z), \quad (\text{П22})$$

где

$$\tilde{g}_{mn}(z', z) = (1 / sh \beta_{mn} L) \begin{cases} sh \beta_{mn} z' \cdot ch \beta_{mn} (L - z'), z < z' \\ -ch \beta_{mn} z' \cdot sh \beta_{mn} (L - z), z' < z, \end{cases}$$

$$\tilde{f}_{mn}(z', z) = (1 / sh \beta_{mn} L) \begin{cases} ch \beta_{mn} z' \cdot sh \beta_{mn} (L - z'), z < z' \\ -sh \beta_{mn} z' \cdot ch \beta_{mn} (L - z), z' < z, \end{cases}$$

$$g_{mn}(z', z) = \frac{1}{\beta_{mn} sh \beta_{mn} L} \begin{cases} ch \beta_{mn} z' \cdot ch \beta_{mn} (L - z'), z < z' \\ ch \beta_{mn} z' \cdot ch \beta_{mn} (L - z), z' < z. \end{cases}$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. С.О. Довгий, І.К. Ліфанов. *Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування*. Київ: "Наукова думка", 2004, 500 с.
2. В.Н. Остроушко. *К расчету нагруженных цилиндрических волноводов методом граничных интегральных уравнений*: Препринт ХФТИ 90-13. Харьков: ХФТИ, 1990, 6 с.
3. Ю.В. Гандель, Г.И. Загинайлов, С.А. Стешенко. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов // *Журнал технической физики*. 2004, т.74, №7, с.81-89.
4. Р.С. Диканский, Д.В. Петриков. *Физика интенсивных пучков в накопителях*. Новосибирск: "Наука", 1989, 336 с.
5. С.Д. Прийменко, Л.А. Бондаренко. Истокообразная функция Грина круглого резонатора // *Радиотехника*. 2007, т.149, с.22-26.
6. Н. Levin, J. Schwinger. On the theory of electromagnetic wave diffraction by an aperture in an infinite plane conducting screen // *Communication on Pure and Appl. Mathematics*. 1950, v.3, p.355-368.
7. S.D. Prijmenko. Sourwise representation of the field Green's function of a circular waveguide // *Telecommunications and Radio Engineering*. 2009, v.68, №19, p.1687-1701.
8. В. Пановский, М. Филипс. *Классическая электродинамика*. М.: "Гос. изд. физ.-мат. лит.", 1963, 432 с.

Статья поступила в редакцию 13.05.2010 г.

## SOURWISE REPRESENTATION OF THE FIELD ELECTRIC GREEN'S FUNCTION OF THE CIRCULAR CAVITY

S.D. Prijmenko

The singularity part of the electrical Green's function for a circular cavity field is singled out in an explicit form as a Green's function for the infinite space. The problem of the Green's function construction for a field is solved as a problem of a diffraction of tensor divergent spherical and quasispherical waves on the circular cavity walls. The analytical expressions for singular and regular parts of the tensor Green's function and the calculation results of one of its component are given.

### ДЖЕРЕЛООБРАЗНЕ ПОДАННЯ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ФУНКЦІї ГРИНА ДЛЯ ПОЛЯ КРУГЛОГО РЕЗОНАТОРА

С.Д. Прийменко

У явному вигляді виділена сингулярна частина електричної функції Гріна для поля круглого резонатора у формі функції Гріна необмеженого простору. Задачу побудови функції Гріна для поля розв'язано як задачу дифракції тензорних розбіжних сферичної й квазісферичної хвиль на стінках круглого резонатора. Наведено аналітичні співвідношення для сингулярної й регулярної частин тензорної функції Гріна, а також результати розрахунку одного з її компонентів.