УДК 537.87.537.86:519

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ К ЗАДАЧАМ РАССЕЯНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Г.И. Загинайлов, С.Н. Хижняк

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт», Харьков, Украина

Метод интегральных уравнений макроскопической электродинамики применен для решения задач рассеяния излучения шероховатой диэлектрической поверхностью с размером шероховатости много меньше длины волны излучения. С помощью теории возмущения задача сведена к системе зацепляющихся векторных интегральных уравнений с интегральным оператором таким же, как и в случае гладкой поверхности. В случае одномерных шероховатостей для ТМ-поляризации падающей волны показано, что векторное интегральное уравнение в любом порядке сводится к системе двух одномерных интегральных уравнений Винера-Хопфа. Полученная система допускает аналитическое решение, что существенно облегчает численный анализ конечных результатов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория рассеяния и поглощения электромагнитных волн шероховатой поверхностью представляет существенный общенаучный и практический интерес. Одним из наиболее важных практических аспектов этой теории является изучение эффектов поглощения и рассеяния СВЧ-излучения стенками резонаторов, ускорительных и направляющих структур и т.д. В частности, рост поглощения СВЧ-энергии в резонаторах мощных гиротронов является одним из основных технических препятствий на пути увеличения мощности и КПД гиротронов, предназначенных для нагрева плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза, в том числе в проекте ИТЭР. В соответствии с возможностями современной охлаждающей техники уровень поглощения СВЧ-излучения стенками резонатора гиротрона не должен превышать 1 кВт/см^2. Для выполнения этого условия резонаторы мощных гиротронов рассчитаны на работу на высших объемных модах, что приводит к достаточно плотному спектру резонансных частот и конкуренции мод. В результате выходная мощность и КПД генерации могут быть существенно ниже принципиально возможных. В настоящее время рекордная мощность 2,2 МВт при КПД 30% достигнута на гиротроне, работающем на моде $TE_{34,19}$ [1], что вполне приемлемо для применения в проекте ИТЭР. Однако длина импульса еще не достаточно велика (~1 мс при требуемых 10 мин). При этом мощность потерь в резонаторе в результате поглощения в стенках и образования рассеянного излучения является достаточно высокой (более 10%). Это может вызвать существенные трудности при увеличении длины импульса, необходимой для применения в ИТЭР.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов и поиска возможностей уменьшения потерь в резонаторе гиротрона необходимы надежные расчеты по рассеянию и поглощению СВЧ-энергии стенками резонатора. При этом следует отметить, что уровень поглощения СВЧ-излучения стенками резонатора может существенно зависеть от степени шероховатости поверхности [2]. Шероховатость поверхности может быть одной из причин повышенного уровня поглощения СВЧ-энергии стенками резонатора, а также повышенного уровня рассеянного излучения в резонаторе гиротрона. Согласно [3] экспериментально измеренный уровень поглощения СВЧ-энергии в резонаторе гиротрона почти в два раза превышает теоретически предсказываемый (при использовании модели гладкой импедансной поверхности).

Наиболее распространенные в настоящее время методы анализа взаимодействия излучения с шероховатой поверхностью [4,5] используют два допущения. Во-первых, высота неровностей поверхности должна быть много меньше либо много больше длины волны, во-вторых, неровности поверхности предполагаются пологими. Используя эти допущения, можно сделать переход от шероховатой поверхности к гладкой с эффективными импедансными условиями на ней путем разложения полей на шероховатой поверхности в ряд Тейлора. Это является корректным, если поля и их производные на шероховатой поверхности близки к полям и их производным на гладкой поверхности. В случае хорошо проводящей поверхности (что как раз выполняется для стенок резонатора) размер шероховатостей должен быть много больше величины скин-слоя.

В случае взаимодействия излучения со стенками резонатора гиротрона лишь первое условие выполняется, а именно, длина волны излучения много меньше глубины неровностей. В то же время условие пологости неровностей, а также условие малости глубины скин-слоя по сравнению с радиусом кривизны неровностей не выполняются. Поэтому для корректного описания такого взаимодействия необходимо развитие более совершенного подхода. Такой подход может быть основан на интегральных уравнениях макроскопической электродинамики [6]. Идея применения данного подхода к задачам рассеяния излучения диэлектрическими телами с шероховатой поверхностью была предложена в [7], однако конкретные случаи, рассмотренные в [7], основаны также на разложении полей в ряд Тейлора, и конкретные результаты получены при тех же допущениях, что и в [4,5]. При этом потенциал интегральных уравнений макроскопической электродинамики был использован не полностью.

В настоящей работе развит более совершенный вариант метода интегральных уравнений макроскопической электродинамики, который справедлив при выполнении лишь одного условия, а именно, высота неровностей должна быть много меньше длины волны. В то же время профиль неровностей может быть произвольным, так же как и соотношение между глубиной скин-слоя и радиусом кривизны неровностей. Кроме этого учитываются собственные поля шероховатой поверхности (поверхностные волны). В общем случае, как и в [7], задача сводится к семейству зацепляющихся интегральных уравнений для гладкой поверхности с различными свободными членами. Однако в отличие от [7] показано, что полученные интегральные уравнения являются сильно сингулярными, т.е. содержат интегралы с неинтегрируемыми особенностями. Но для оценки таких интегралов можно использовать теорию и численные методы, развитые в [8].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Совершенствованный подход применен для анализа эффектов рассеяния и поглощения СВЧ-излучения стенками резонатора гиротрона, работающего на моде $TE_{34.19}$, параметры которого приведены в [1]. Вследствие высокого радиального индекса рабочей моды стенки резонатора моделировались плоской поверхностью. Рабочая мода резонатора моделировалась плоской волной ТМ-поляризации (отличные от нуля компоненты E_x, E_y, H_z, ось x направлена по нормали к поверхности, волновой вектор лежит в плоскости xy). Угол падения θ близок к $arctg(m/\chi)$, где m – азимутальный индекс моды; $\chi = k_\perp R_0$ – безразмерный поперечный волновой вектор, который определяется формой и размерами поперечного сечения резонатора гиротрона. Для простоты неровности предполагались одномерными. Согласно [6,7] уравнения Максвелла в этом случае могут быть эквивалентно сведены к интегральным уравнениям макроскопической электродинамики:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \hat{f}\,\vec{E}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \hat{g}\,\vec{E}, \qquad (1)$$

где $\hat{f} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left(graddiv + k^2\right)\displaystyle\int_V f(\vec{r},\vec{r}')...d\vec{r}'$;

$\hat{g} = \dfrac{ik(\varepsilon - 1)}{4\pi} rot \displaystyle\int_V f(\vec{r},\vec{r}')...d\vec{r}'$;

$\vec{H}_0 = (0,0,H_0)\exp(ik\cos\theta\, x - ik\sin\theta\, y)$;

$\vec{E}_0 = (\sin\theta, -\cos\theta, 0)\exp(ik\cos\theta\, x - ik\sin\theta\, y)$ – поле падающей волны; $k = \omega / c$ – вакуумный волновой вектор; $f(\vec{r},\vec{r}') = \dfrac{\exp(-ik|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ – функция Грина для уравнения Гельмгольца в свободном пространстве.

В случае диэлектрического полупространства с шероховатой границей интегральный оператор $\hat{f}$ целесообразно представить в виде суммы двух операторов: $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_0$,

где $\hat{f} = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left(graddiv + k^2\right)\displaystyle\int_{V_0} f(\vec{r},\vec{r}')...d\vec{r}'$ – оператор, определяющий рассеяние падающей волны диэлектрическим полупространством с гладкой границей

$$(-\infty < z < \infty, -\infty < y < \infty, x < 0).$$

Положение гладкой границы полупространства ($x = 0$) выбирается из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(y)dy = 0,$$

где $x = \xi(y)$ – уравнение, описывающее профиль неровностей шероховатой границы. Оператор $\hat{f}_1$ определяет рассеяние падающей волны на шероховатостях поверхности. Его можно представить в виде

$$\hat{f}_1\vec{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\left(graddiv + k^2\right)\int_S \int_0^{\xi(y')} f(\vec{r},\vec{r}').\vec{E}(\vec{r}')dx'ds, \qquad (2)$$

где S обозначает гладкую поверхность полупространства; $ds = dy'dz'$. В случае, когда высота неровностей много меньше длины падающей волны ($\max\xi(y) << \lambda$, где $\lambda = 2\pi / k$),

$$\left|\hat{f}_1\vec{E}\right| \sim \frac{\max\xi(y)}{\lambda}\left|\hat{f}_0\vec{E}\right|,$$

и эффекты рассеяния на шероховатостях можно учесть по теории возмущений [7]. В рассматриваемом частном случае достаточно лишь построить теорию возмущения для электрического поля (так как только оно входит под интегралы в (1)), а магнитное поле может быть определено с помощью второго уравнения (1). Таким образом, электрическое поле ищем в виде

$$\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \dots .$$

Подставляя $\vec{E}$ в таком виде в первое из уравнений (1), имеем:

$$\begin{aligned} &\vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \dots = \\ &= \vec{E}_0 + \hat{f}_1\left(\vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \dots\right) + \\ &+ \hat{f}_0\left(\vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} + \dots\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

Далее приравнивая члены одного порядка, получаем цепочку зацепляющихся интегральных уравнений. В каждом порядке интегральные уравнения определяются интегральным оператором для гладкого полупространства. Однако свободные члены зависят от порядка приближения и для данного порядка выражаются через поля предыдущих порядков:

$$\vec{E}^{(0)} = \vec{E}_0 + \hat{f}_0\left(\vec{E}^{(0)}\right);$$
$$\vec{E}^{(1)} = \hat{f}_1\left(\vec{E}^{(0)}\right) + \hat{f}_0\left(\vec{E}^{(1)}\right); \qquad (4)$$
$$\vec{E}^{(n)} = \hat{f}_1\left(\vec{E}^{(n-1)}\right) + \hat{f}_0\left(\vec{E}^{(n)}\right).$$

Решение интегральных уравнений в каждом порядке может быть построено численными методами с использованием квадратурных формул для сильно сингулярных интегралов (см., например, [8]).

В частности, в рассматриваемом случае при рассеянии волны ТМ-поляризации поверхностью с одномерными неровностями оператор $\hat{f}_1$ может быть представлен в виде:

$$\hat{f}_1 = -\frac{i(\varepsilon-1)}{4}\left(graddiv + k^2\right)\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\xi(y')} H_0^2\left(k\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2}\right)...dx'dy'.$$

3. СВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА-ХОПФА

Система зацепляющихся уравнений (4) допускает аналитическое решение в квадратурах в любом порядке, если считать поля в предыдущем порядке известными.

С помощью преобразования Фурье $\vec{E}^{(n)}$ вдоль y векторные интегральные уравнения (4) в любом порядке могут быть сведены к системе из двух уравнений Винера-Хопфа для фурье-преобразований компонент электрического поля:

$$\psi_1(x,\beta) = g_1(x,\beta) + \frac{i(\varepsilon-1)\beta}{2}\times$$
$$\times\left[\int_{-\infty}^{0} G_1(x-x',\beta)\psi_1(x',\beta)dx' + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta}{\gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{0} G_2(x-x',\beta)\psi_2(x',\beta)dx'\right]; \qquad (5)$$

$$\psi_2(x,\beta) = g_2(x,\beta) - \frac{i(\varepsilon-1)}{2}\times$$
$$\times\left[\gamma(\beta)\int_{-\infty}^{0} G_2(x-x',\beta)\psi_1(x',\beta)dx' - \right.$$
$$\left. -\beta\int_{-\infty}^{0} G_1(x-x',\beta)\psi_2(x',\beta)dx'\right]; \qquad (6)$$

$-\infty < x < \infty$,

где $\gamma(\beta) = \sqrt{k^2-\beta^2}$, $G_1(x,\beta) = \exp\left(-i\gamma(\beta)|x|\right)$;

$$G_2(x,\beta) = sign(x)\exp\left(-i\gamma(\beta)|x|\right);$$

$$\psi_1(x,\beta) = \begin{cases} E_x^{(n)}(x,\beta), & x>0 \\ \varepsilon E_x^{(n)}(x,\beta), & x<0 \end{cases};$$

$$\psi_2(x,\beta) = E_y^{(n)}(x,\beta);$$

$$\vec{E}^{(n)}(x,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}^{(n)}(x,y)\exp(i\beta y)dy;$$

$$g_1(x,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{f}_1(\vec{E}^{(n-1)})\right)_x \exp(i\beta y)dy;$$

$$g_2(x,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{f}_1(\vec{E}^{(n-1)})\right)_y \exp(i\beta y)dy.$$

Система уравнений (4),(5) сводится к двум связанным функциональным уравнениям Винера-Хопфа с дробно-линейными коэффициентами. Она допускает аналитическое решение в квадратурах [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рассматриваемом частном случае показано, что система зацепляющихся интегральных уравнений для рассеяния излучения шероховатой поверхностью, полученная с помощью теории возмущений по малому параметру $\frac{\max\xi(y)}{\lambda} << 1$, допускает аналитическое решение в каждом порядке, что дает возможность найти аналитическое выражение для полей в каждом последующем приближении, если известны поля в предыдущем приближении. Рассмотрение другой поляризации падающего поля (ТЕ) может быть проведено таким же образом. Обобщение данного рассмотрения на случай двумерных неровностей, который является значительно более распространенным и практически интересным, вполне возможно, что будет являться предметом дальнейших исследований. При этом следует отметить, что примененный подход, связанный с использованием интегральных уравнений макроскопической электродинамики и с разделением интегрального оператора на интегральный оператор для полупространства с гладкой поверхностью и интегральный оператор, обусловленный шероховатостью поверхности, может быть успешным и в более общем случае, когда размер шероховатостей порядка длины волны. Аналитически обращая интегральный оператор по бесконечному полупространству (который неудобен для численного обращения), можно получить интегральное уравнение по объему шероховатостей. Так как линейный размер шероховатостей порядка длины волны, полученное интегральное уравнение допускает эффективное численное решение.

Кроме этого, вследствие универсальности метода интегральных уравнений макроскопической электродинамики рассмотренный подход может быть применен к большому классу задач рассеяния, излучения анизотропными диэлектриками, искусственными диэлектриками, нелинейными диэлектриками, а также средами с высокой проводимостью и магнетиками.

Развитая теория может быть использована для расчетов рассеяния и поглощения электромагнитных волн как шероховатой детерминированной поверхностью, так и статистически неровными поверхностями, а также фрактальными поверхностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Rzesnicki, B. Piosczyk, S. Kern, et al. 2.2-MW Record power of the 170-GHz European Preprototype Coaxial-Cavity Gyrotron for ITER // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2010 [in press].
2. А.С. Ильинский, Г.Я. Слепян. *Колебания и волны в электродинамических системах с потерями*. М.: Изд-во МГУ, 1988, с.232.
3. B. Piosczyk, G. Dammertz, O. Dumbrajs, et al. 165-GHz Coaxial Cavity Gyrotron // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2004, v.32, №3, p.853-860.
4. Ф.Г. Басс, И.М. Фукс. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности*. М.: «Наука», 1972, 424с.
5. А. Исимару. *Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах*. М.: «Мир», 1981, т.2, с.280.
6. Н.А. Хижняк. *Интегральные уравнения макроскопической электродинамики*. Киев: «Наукова думка», 1986, с.279.
7. С.Н. Хижняк. Интегральные уравнения рассеяния электромагнитных волн на диэлектрических поверхностях // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1984, т.27, №12, с.1505-1514.
8. И.К. Лифанов. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент*. М.: ТОО «Янус», 1995, с.520.
9. Б. Нобл. *Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных*. М.: Изд-во иностр. лит., 1962, с.279.

Статья поступила в редакцию 28.05.2010 г.

ON APPLICATION OF INTEGRAL EQUATIONS OF MACROSCOPIC ELECTRODYNAMICS TO PROBLEMS OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING AND ABSORPTION FROM RANDOM ROUGH DIELECTRIC SURFACE

G.I. Zaginailov, S.N. Khizhnyak

Method of integral equations of macroscopic electrodynamics is applied for solution of problems of electromagnetic scattering from random rough dielectric surface with the size of roughness much less than the wavelength. By means of perturbation theory the problem is reduced to the system of coupling integral equations with the integral operator to be the same as for the case of smooth dielectric surface. In the case of one-dimensional roughness for TM polarization of the incident wave it is shown that the vector integral equation in an arbitrary order is reduced to the system of two one-dimensional Viener-Hopf integral equations. The obtained system allows us to get analytical solution what significantly promotes the numerical analysis of final results.

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАКРОСКОПІЧНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ ДО ЗАДАЧ РОЗСІЮВАННЯ ТА ПОГЛИНАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ ШОРСТКОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Г.І. Загинайлов, С.М. Хижняк

Метод інтегральних рівнянь макроскопічної електродинаміки було застосовано для розв'язку задач розсіювання випромінювання шорсткою діелектричною поверхнею з розміром шорсткості набагато меншим за довжину хвилі випромінювання. За допомогою теорії збурень задачу було зведено до системи зачіпних векторних інтегральних рівнянь з таким самим інтегральним оператором, як і у випадку гладкої поверхні. У випадку одновимірної шорсткості для ТМ-поляризації падної хвилі показано, що векторне інтегральне рівняння у будь-якому порядку зводиться до системи двох одновимірних інтегральних рівнянь Вінера-Хопфа. Отримана система допускає аналітичне розв'язання, що істотно полегшує чисельний аналіз кінцевих результатів.