

Влияние места приложения вынуждающей силы на амплитудный спектр изгибных колебаний стержня с дышащей трещиной

Е. А. Синенко, А. П. Зиньковский

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Представлены результаты расчетов по определению влияния места приложения вынуждающей силы на величину вибродиагностического параметра наличия дышащей трещины при суб- и супергармоническом резонансах первой изгибной формы колебаний консольного стержня постоянного прямоугольного поперечного сечения с использованием трехмерной конечно-элементной модели. Результаты исследований сравниваются с известными данными, полученными аналитическим и численным методами.

Ключевые слова: стержень, дышащая трещина, конечноэлементная модель, изгибные колебания, суб- и супергармонический резонансы.

Введение. Большинство конструктивных элементов, в частности рабочие лопасти турбомашин, работает в условиях широкого спектра динамических нагрузок, которые являются основной причиной возникновения трещин усталости. Для обеспечения надежной эксплуатации машин необходимо своевременно обнаружить такие повреждения и оценить их размеры. Наличие трещины влияет на упругие свойства конструкции и, как следствие, на ее вибрационные характеристики, изменение которых свидетельствует о возможном наличии рассматриваемых повреждений.

Среди вибрационных методов диагностики повреждения отметим те, которые основаны на мониторинге модальных (частоты и формы колебаний) [1, 2] и диссипативных [3] характеристик объектов исследования, а также на возникновении суб- и супергармонических резонансов [4, 5]. Установлено, что первые методы мало чувствительны к наличию повреждений, требуют строгой фиксации исходного состояния объекта исследования и эффективны лишь при условии, что повреждения занимают более 20% высоты его сечения [2, 6]. Результаты аналитического [7] и численного [8] расчета вибродиагностических параметров наличия трещин в стержнях с различными граничными условиями в зависимости от места приложения вынуждающей силы и положения повреждения свидетельствуют о том, что более чувствительными являются методы, базирующиеся на анализе возникновения нелинейных резонансов.

При решении задачи обнаружения трещины этими методами используются различные подходы к ее моделированию. Так, открытые трещины представляются в виде упругих элементов [9], надрезов [10] и пазов [11]. Однако модели с открытыми трещинами не обуславливают нелинейность системы и являются актуальными при более значительных повреждениях [5]. В случае дышащей трещины, которая открыта на одном и закрыта на другом полуциклах колебаний системы, при деформировании наблюдается изменение ее жесткости, моделируемое с помощью несимметричной кусочно-линейной характеристики восстанавливающей силы [2, 8, 12–14]. Тем не менее такое предположение в достаточной мере не отображает состояние трещины, поскольку ее открытие и закрытие не происходят мгновенно. Поэтому в работах [4, 5, 15] предлагается моделировать такую трещину в виде контактного взаимодействия ее берегов, что позволяет учитывать их взаимное непроникновение, а также частичное закрытие трещины.

В [16] предложена 2D конечноэлементная (КЭ) модель консольного стержня прямоугольного поперечного сечения, позволяющая принимать во внимание контактное взаимодействие поверхностей дышащей трещины, фронт которой перпендикулярен к его оси. При сравнении результатов расчетов, определенных с использованием 2D КЭ модели и моделей в виде упругих элементов и билинейного осциллятора, получено их качественное совпадение, однако имеет место значительное количественное их различие.

Более общий подход к КЭ моделированию трещины, расположенной под определенным углом к оси стержня и в предположении контактного взаимодействия ее берегов, предложен в [15, 17]. При этом отмечается преимущество 3D модели, поскольку по сравнению с 2D моделью она позволяет учитывать все формы колебаний стержня.

Цель настоящей работы заключается в определении влияния места приложения вынуждающей силы на амплитудный спектр изгибных колебаний стержня постоянного поперечного сечения с использованием трехмерного конечноэлементного моделирования и контактного взаимодействия берегов дышащей трещины нормального отрыва при возбуждении суб- и супергармонических резонансов первой формы колебаний.

Объект исследования и его моделирование. Рассматривается консольный стержень длиной $L = 230$ мм постоянного поперечного сечения высотой $b = 4$ мм и шириной $h = 20$ мм (рис. 1). Предполагается, что его колебания происходят от гармонической поперечной силы, приложенной на расстоянии L_P от защемления. На расстоянии L_c от защемления расположена перпендикулярная к оси стержня дышащая трещина, глубина которой a при его деформировании не изменяется (4 мм). Механические характеристики стержня следующие: модуль упругости $E = 200$ ГПа, плотность материала $\rho = 7800$ кг/м³, логарифмический декремент колебаний $\delta = 0,01$. Выбор именно такого объекта исследования позволяет проводить сравнение полученных результатов расчета с приведенными в [7, 8].

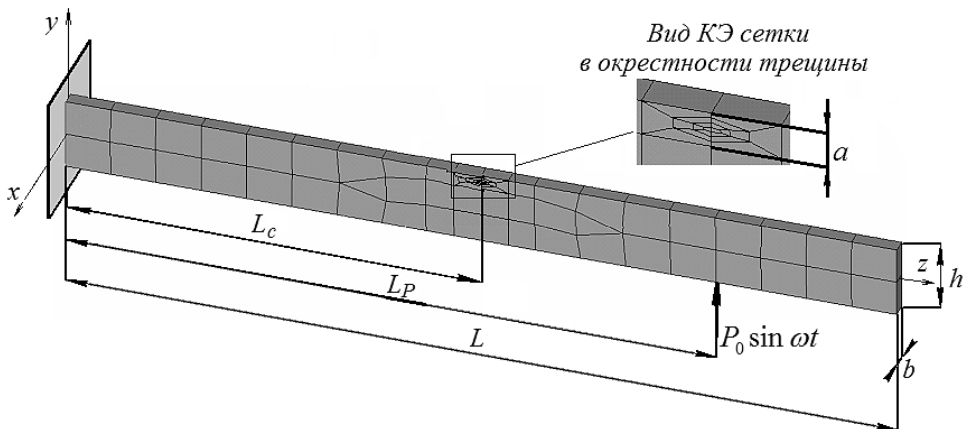


Рис. 1. Консольный стержень постоянного поперечного сечения с дышащей трещиной и нанесенной конечноэлементной сеткой.

Конечноэлементное моделирование рассматриваемого стержня происходит в два этапа: создание КЭ модели и задание контактных условий между поверхностями трещины.

Для построения КЭ сетки стержня (рис. 1) используется линейный 8-узловой конечный элемент Solid45 и его модификации (рис. 2), что позволяет при сравнительно большой скорости расчета получить достаточную точность решения.

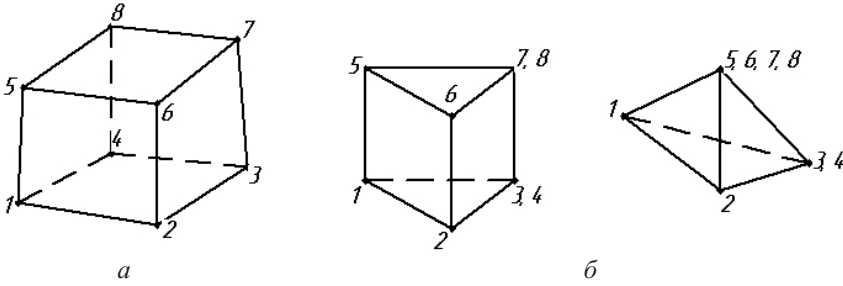


Рис. 2. Линейный 8-узловой конечный элемент Solid45 (а) и его модификации (б).

Стержень разбивается на равномерные конечные элементы (рис. 2,а), в окрестности трещины, как видно из рис. 1, по аналогии с [17] КЭ сетка сгущается. Для перехода к более мелкой сетке используются модификации выбранного конечного элемента (рис. 2,б).

Дышащая трещина представляется как математический разрез, а взаимное не-проникновение ее берегов обеспечивается с помощью решения контактной задачи с использованием поверхностных 4-узловых контактных элементов Conta174 [18]. Они применяются для отслеживания относительных положений контактирующих поверхностей (рис. 3). При этом исключается соударение берегов трещины.

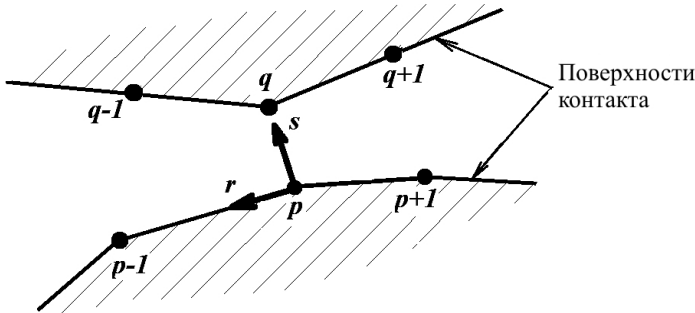


Рис. 3. Схема взаимодействия узлов контактирующих поверхностей.

Методика расчета. Матричное уравнение, описывающее изгибные колебания предложенной КЭ модели стержня с дышащей трещиной (рис. 1), имеет вид

$$[M]\{\ddot{u}\} + [D]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}, \quad (1)$$

где $[M]$, $[D]$, $[K]$ – инерционная, диссипативная и упругая матрицы системы соответственно; $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{\ddot{u}\}$ – вектор-столбцы перемещений, скорости и ускорения соответственно; $\{P(t)\}$ – вектор-столбец внешних нагрузок, действующих на систему.

Рассматриваемая система является нелинейной, так как упругая матрица $[K]$ изменяется во времени в зависимости от контактного взаимодействия берегов трещины. Для ее определения используется процедура Ньютона–Рафсона [19], в основе которой лежит решение нелинейной контактной задачи, описываемой в данном случае уравнением

$$[K]\{u\} = \{P(t)\}, \quad (2)$$

в результате чего определяются узлы контактирующих поверхностей p и q (рис. 3), которые взаимодействуют между собой.

Диссипативная матрица $[D]$ в общем случае имеет вид

$$[D] = \alpha_1[M] + \alpha_2[K], \quad (3)$$

т.е. рассеяние энергии в системе обусловлено внешним и внутренним трением. В данном случае предполагается наличие только потерь энергии вследствие взаимодействия с внешней средой стержня, что не ограничивает общности решения задачи. Поэтому было принято, что $\alpha_1 \equiv 0$, а α_2 выбиралось таким образом, чтобы $\delta = 0,01$.

Отмеченная нелинейность динамического поведения рассматриваемого стержня, даже при моногармоническом возбуждении установившегося режима колебаний при основном резонансе какой-либо j -й собственной формы, позволяет с помощью Фурье-анализа выявить наличие высших гармоник и возможность возникновения суб- и супергармонического резонансов.

Решение нелинейного уравнения (1) осуществляется интегрированием по времени с использованием схемы Ньюмарка. Основная суть схемы заключается в том, что время рассматриваемого решения T разбивается на N шагов с временным шагом $\Delta t = T/N$. Далее для каждого момента времени $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ находится приближенное решение с учетом на каждом подшаге решения для предыдущего значения времени:

$$\begin{aligned} \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{u}\}_t + [(1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}]\Delta t; \\ \{u\}_{t+\Delta t} &= \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}\}_t + \beta \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где β и γ – параметры интегрирования Ньюмарка, определяющие точность и устойчивость интегрирования. При этом начальные условия были приняты такие: $\{u\}_0 = 0, \{\dot{u}\}_0 = 0, \{\ddot{u}\}_0 = 0$.

Следующим шагом решения задачи является Фурье-анализ полученных результатов в виде зависимости перемещения нейтральной линии в сечении свободного конца стержня от времени t . Для обработки зависимости $u(t)$ используется процедура быстрого преобразования Фурье (FFT), в соответствии с которой массив обрабатываемых значений должен быть кратным 2^n , где n – целое число, а количество периодов указанной функции – не менее трех. В нашем случае это достигается путем интерполяции данной зависимости, соответствующей установившемуся режиму вынужденных колебаний, и представления ее трех периодов в виде 8192 точек.

В результате гармонического анализа определяются амплитуды гармоник перемещений A_k , где k – номер гармоники.

Результаты расчетов и их обсуждение. В соответствии с постановкой задачи с использованием разработанной КЭ модели стержня с дышащей трещиной проведен комплекс вычислительных экспериментов по определению влияния места приложения L_p гармонической вынуждающей силы $P_0 \sin \omega t$ на амплитудный спектр изгибных его колебаний в области частоты возбуждения ω , равной удвоенной и половине собственной частоты первой ($j=1$) формы колебаний, т.е. исследовались субгармонический порядка 1/2 и супергармонический 2-го порядка резонансы. Рассматривались два варианта приложения вынуждающей силы по высоте стержня: на нейтральной линии и в узлах его нижней грани. В качестве вибродиагностического параметра наличия трещины, как и в работе [20], при субгармоническом резонансе было выбрано отношение максимальных амплитуд первой A_1 (резонирующей) и второй A_2 гармоник, а при супергармоническом резонансе – второй A_2 (резонирующей) и первой A_1 гармоник.

По результатам расчетов были построены зависимости выбранных отношений максимальных амплитуд гармоник при суб- (рис. 4) и супергармоническом (рис. 5)

резонансах от места приложения L_P вынуждающей силы на нейтральной линии, полученные для двух положений трещины: $L_c = 0,1L$ и $0,5L$. С целью сравнения результатов на рис. 4 и 5 приведены аналогичные зависимости, определенные аналитическим [7] и численным [8] методами.

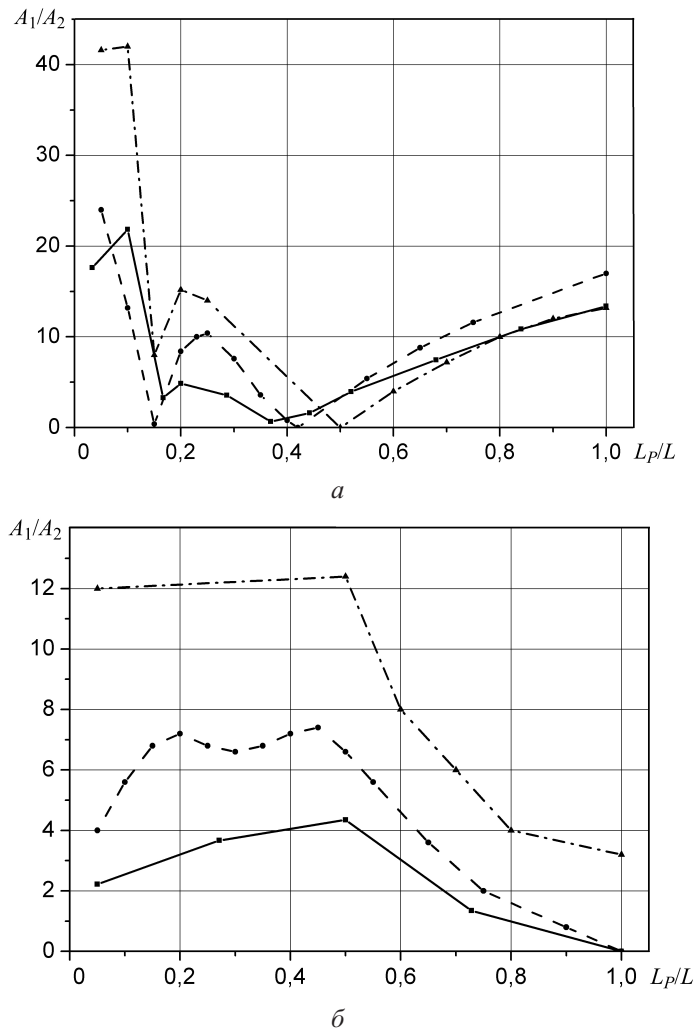


Рис. 4. Зависимость отношения максимальных амплитуд гармоник перемещения при субгармоническом резонансе от места приложения L_c вынуждающей силы: *a* – $L_c = 0,1L$; *б* – $L_c = 0,5L$. (Здесь и на рис. 5: сплошные линии – трехмерная КЭ модель; штриховые – аналитическое решение [7]; штрихпунктирные – численный расчет [8].)

Представленные результаты подтверждают существенную зависимость вибродиагностических параметров от места приложения вынуждающей силы, характер которых определяется местоположением трещины и видом резонансного состояния стержня, что необходимо учитывать при диагностике места положения повреждения. Так, во-первых, при приложении силы в поврежденном сечении стержня в случае возбуждения субгармонического резонанса наблюдается максимум отношения максимальных амплитуд A_1/A_2 (рис. 4), а супергармонического резонанса – минимум A_2/A_1 (рис. 5). Во-вторых, существуют точки приложения вынуждающей силы, в которых субгармонический резонанс практически не возбуждается. Это явление,

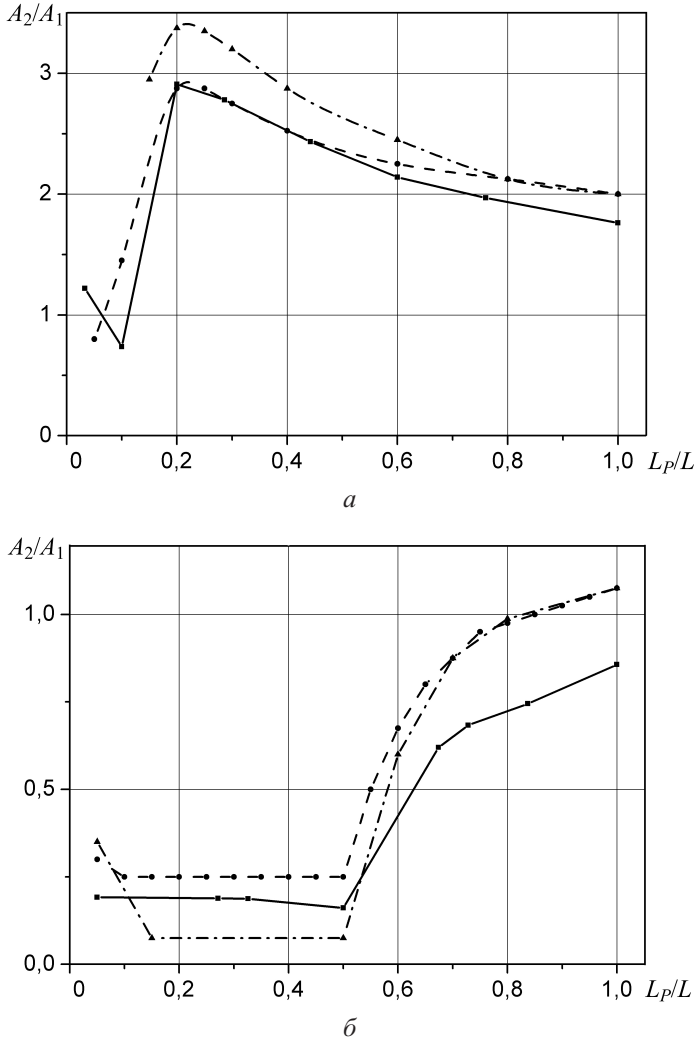


Рис. 5. Зависимость отношения максимальных амплитуд гармоник перемещения при супергармоническом резонансе от места приложения L_c вынуждающей силы: $a - L_c = 0,1L$; $б - L_c = 0,5L$.

обсуждаемое в [7], проявляется в случае если в сечении с трещиной значение второй производной составляющей прогиба стержня по рассматриваемой резонирующей форме колебаний будет равно нулю. Следует отметить, что при субгармоническом резонансе значения отношения максимальных амплитуд A_1/A_2 , рассчитываемые как аналитическим методом [7], так и численным при использовании балочной конечно-элементной модели стержня и определении изменения жесткости элемента с трещиной при ее открытии через коэффициент интенсивности напряжений [8], в основном заметно выше, полученных нами. При супергармоническом резонансе различие в значениях отношения максимальных амплитуд A_2/A_1 в основном менее значительное. Все представленные зависимости достаточно хорошо согласуются между собой. Необходимо также подчеркнуть установленную инвариантность как при приложении вынуждающей силы на нейтральной линии стержня, так и при аналитическом решении определенных вибродиагностических параметров наличия трещины к величине амплитуды вынуждающей силы.

Рассмотрим влияние места приложения вынуждающей силы по высоте поперечного сечения на результаты выполненных исследований. Расчеты проводились при местоположении трещины на расстоянии $L_c = 0,5L$ для трех значений амплитуды P_0 вынуждающей силы (рис. 6).

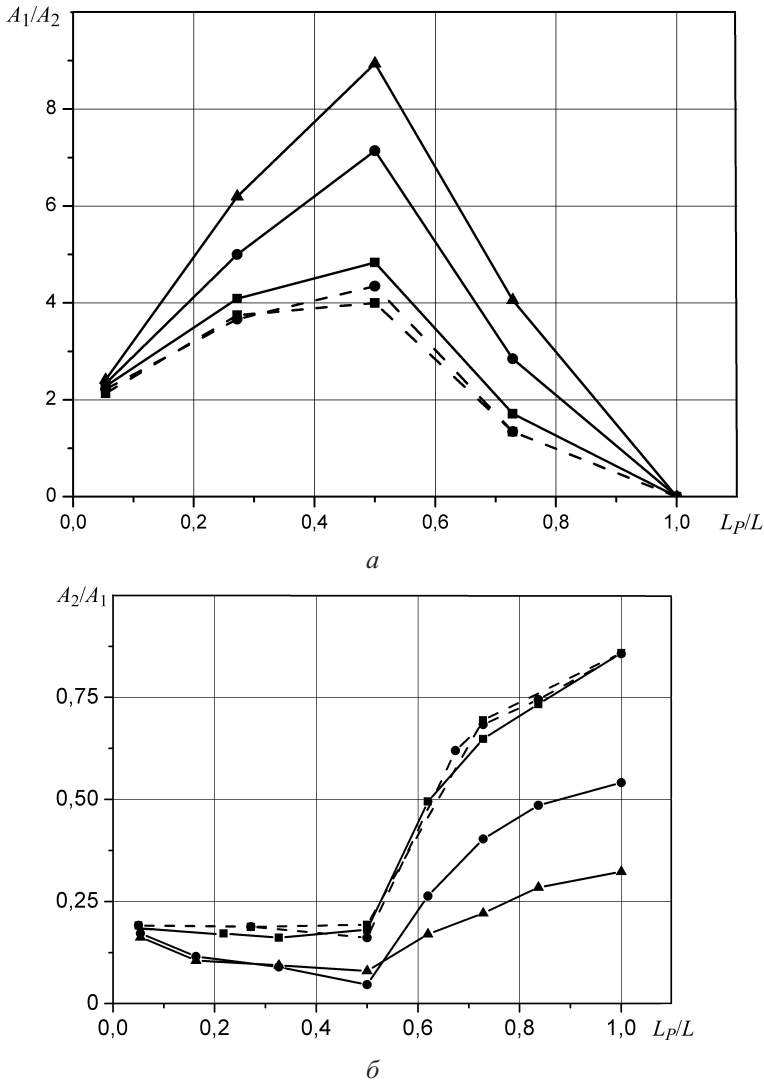


Рис. 6. Зависимость отношения максимальных амплитуд гармоник перемещения при суб- (а) и супергармоническом (б) резонансах от приложения вынуждающей силы на нейтральной линии стержня (штриховые линии) и в узлах его нижней грани (сплошные линии) при $P_0 = 200$ (■), 1000 (●) и 1500 Н (▲).

Полученные зависимости отношения максимальных амплитуд гармоник перемещения от места приложения вынуждающей силы позволяют заключить, что при субгармоническом резонансе повышение амплитуды P_0 , приложенной в узлах нижней грани стержня, приводит к увеличению отношения максимальных амплитуд гармоник перемещения, а при супергармоническом – к его уменьшению при практически неизменном качественном характере зависимости этого отношения от точки приложения вынуждающей силы.

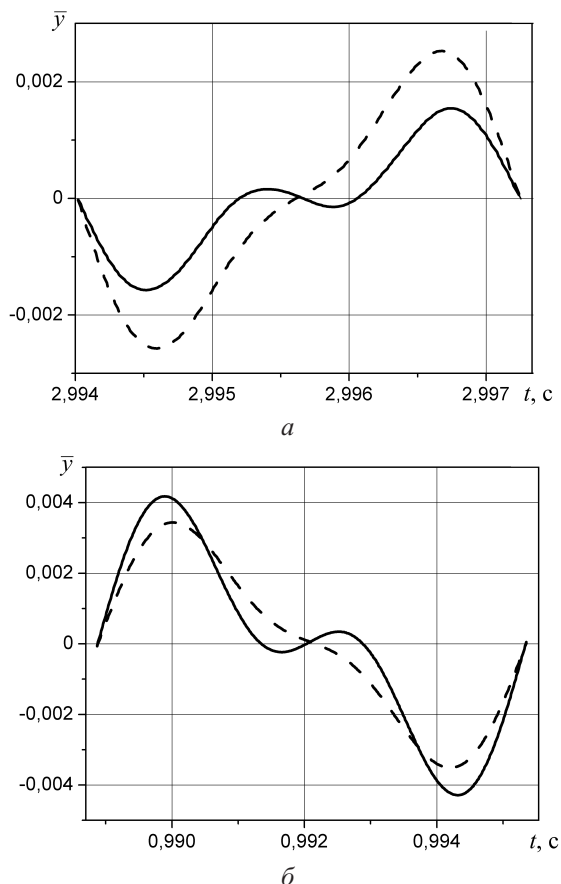


Рис. 7. Зависимость относительного перемещения нейтральной линии в сечении свободного конца стержня от времени при суб- (а) и супергармоническом (б) резонансах в случае приложения гармонической вынуждающей силы амплитудой $P_0 = 1000$ Н при $L_p = 0,728L$, $\bar{y} = y/A_{cont}$, где A_{cont} – амплитуда перемещения свободного конца неповрежденного стержня при заданной нагрузке. (Сплошные линии – на нейтральной линии стержня, штриховые – в узлах его нижней грани.)

Для более детального анализа представленных на рис. 6 результатов рассмотрим зависимость относительного перемещения нейтральной линии в сечении свободного конца стержня от времени на установившемся режиме колебаний. На рис. 7 представлен один период колебаний при суб- и супергармоническом резонансах в случае приложения гармонической вынуждающей силы амплитудой $P_0 = 1000$ Н при $L_p = 0,728L$. Как видно, при приложении силы в узлах нижней грани стержня характер зависимости перемещения нейтральной линии от времени явно свидетельствует о увеличении амплитуды первой (резонирующей) гармоники при субгармоническом резонансе и уменьшении второй (резонирующей) гармоники при супергармоническом резонансе, что приводит к наблюдаемому росту отношения A_1/A_2 и уменьшению A_2/A_1 . Такое изменение амплитуды перемещений будет тем существеннее, чем больше амплитуда вынуждающей силы.

Выводы

1. Разработана трехмерная модель стержня с дышащей трещиной, которая предполагает контактное взаимодействие ее берегов, что позволяет учитывать напря-

женное состояние стержня по всем возбуждаемым формам колебаний и их изменение при открытии трещины.

2. Получены зависимости отношения амплитуд основных гармоник перемещения при суб- и супергармоническом резонансах от места приложения вынуждающей силы, которые качественно согласуются с известными результатами расчетов аналитическим и численным методами, однако имеет место их количественное различие.

3. Установлены закономерности влияния места приложения вынуждающей силы по длине и высоте поперечного сечения стержня на величину отношения амплитуд основных гармоник перемещения.

Резюме

Представлено результати розрахунків щодо визначення впливу місця прикладення вимушеної сили на величину вібродіагностичного параметра наявності дихаючої тріщини при суб- і супергармонічному резонансах першої згинної форми коливань консольного стрижня постійного прямокутного поперечного перерізу з використанням тривимірної скінченноелементної моделі. Результати досліджень порівнюються з відомими даними, отриманими аналітичним і чисельним методами.

1. *Li B. and He Z. J.* Frequency-based crack identification for static beam with rectangular cross-section // *J. Vibroengineering.* – 2011. – **13**, No. 3. – P. 477–486.
2. *Zheng D. Y. and Kessissoglou N. J.* Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method // *J. Sound Vibr.* – 2004. – **273**, No. 3. – P. 457–475.
3. *Panteliou S. D., Chondros T. G., Argyrakis V. C., and Dimarogonas A. D.* Damping factor as an indicator of crack severity // *Ibid.* – 2001. – **241**, No. 2. – P. 235–245.
4. *Andreus U. and Baragatti P.* Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behaviour of the harmonically forced response // *Ibid.* – **330**, No. 4. – P. 721–742.
5. *Giannini O., Casini P., and Vestroni F.* Nonlinear harmonic identification of breathing cracks in beams // *Comp. Struct.* – 2013. – **129**. – P. 166–177.
6. *Douka E., Loutridis S., and Trochidis A.* Crack identification in beams using wavelet analysis // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**, No. 13-14. – P. 3557–3569.
7. *Матвеев В. В., Богинич О. Е., Яковлев А. П.* Приближенные методы и результаты определения вибродиагностических параметров наличия трещины в стержневых элементах при супер- и субгармоническом резонансах // Прочность материалов и элементов конструкций: Тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию со дня рождения академика НАН Украины Г. С. Писаренко. – Киев, 2011. – С. 59–77.
8. *Бовсуновский А. П., Бовсуновский О. А.* Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // *Пробл. прочности.* – 2010. – № 3. – С. 125–141.
9. *Mazanoglu K., Yesilyurt I., and Sabuncu M.* Vibration analysis of multiple-cracked non-uniform beams // *J. Sound Vibr.* – 2009. – **320**, No. 4-5. – P. 977–989.
10. *Ильгамов М. А., Хакимов А. Г.* Диагностика поврежденных балки на шарнирных опорах // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.* – 2010. – № 2. – С. 42–48.
11. *Stojanović V., Ribeiro P., and Stoykov S.* Non-linear vibration of Timoshenko damaged beams by a new p-version finite element method // *Comp. Struct.* – 2013. – **120**. – P. 107–119.

12. *Chatterjee A.* Structural damage assessment in a cantilever beam with a breathing crack using higher order frequency response functions // *J. Sound Vibr.* – 2010. – **329**, No. 16. – P. 3325–3334.
13. *Chatterjee A.* Identification and parameter estimation of a bilinear oscillator using Volterra series with harmonic probing // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2010. – **45**. – P. 12–20.
14. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе // *Пробл. прочности.* – 2012. – № 3. – С. 37–49.
15. *Bouboulas A. S. and Anifantis N. K.* Three-dimensional finite element modeling of a vibrating beam with a breathing crack // *Arch. Appl. Mech.* – 2013. – **83**. – P. 207–223.
16. *Andreus U., Casini P., and Vestroni F.* Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2007. – **42**. – P. 566–575.
17. *Bouboulas A. S. and Anifantis N. K.* Finite element modeling of a vibrating beam with a breathing crack: observations on crack detection // *Struct. Health Monitoring.* – 2010. – **10**, No. 2. – P. 131–145.
18. *Басов К. А.* ANSYS: Справочник пользователя. – М.: ДМК “Пресс”, 2005. – 640 с.
19. *Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.* The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechanics. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 480 p.
20. *Матвеев В. В., Яковлев А. П., Богинич О. Е., Синенко Е. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе // *Пробл. прочности.* – 2014. – № 3. – С. 21–37.

Поступила 11. 12. 2014