

## Моделирование процесса деформирования бетона на основе модифицированного варианта теории течения

В. С. Гудрамович<sup>а,1</sup>, В. М. Левин<sup>б</sup>, Е. В. Самарская<sup>а</sup>, С. В. Шабельник<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины, Днепропетровск, Украина

<sup>б</sup> Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, Макеевка, Украина

<sup>1</sup> hudramovich@i.ua

*Приведены основные соотношения модели деформирования бетона, основанной на модифицированном варианте теории течения. Расчетные данные сравниваются с результатами экспериментов в условиях растяжения, сжатия и сжатия с растяжением. Оценена погрешность при аппроксимации опытных данных на основе предложенных соотношений.*

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции, бетон, теория течения, поверхность нагружения, вектор течения, погрешность, функция упрочнения.

Железобетонные конструкции широко используются во многих сооружениях современной техники. Соответствующие разработки и модели расчета представлены во многих литературных источниках [1–5].

Реальная оценка работоспособности железобетонных конструкций может быть проведена только при учете пластических деформаций.

Нелинейность деформирования бетона и появление пластических деформаций начинаются с довольно низкого уровня нагрузок. В рамках деформационной теории пластичности предложены достаточно адекватные модели, прежде всего следует отметить расчетные модели, описанные в [1, 2, 6]. Теория течения позволяет учитывать широкий класс траекторий нагружения для многих материалов, однако сведения о возможности ее применения к описанию деформирования бетона в доступных литературных источниках практически отсутствуют. Это требует верификации и, при необходимости, совершенствования имеющихся моделей, базирующихся на теории течения. Построение моделей деформирования бетона на основе теории течения (без экспериментальной проверки этих моделей) и некоторое их применение к расчету конструкций содержится в работах [7–11].

Отметим, что расчетные модели деформирования и предельных состояний элементов конструкций для теории течения разрабатывались в основном для металлических конструкций [12–14 и др.].

Приложения теории течения к бетону базируются на теории Прандтля–Рейсса. В дополнение к соотношениям этой теории в указанных работах предполагается, что связь между векторами приращений деформаций и напряжений на стадии упруго-пластического деформирования может быть записана в виде

$$d\bar{\epsilon} = C_{ep}^{-1} d\bar{\sigma}, \quad (1)$$

где  $C_{ep}$  – упругопластическая матрица материала,

$$C_{ep} = C \left( E - \frac{\bar{a}\bar{a}^T C}{H' + \bar{a}^T C \bar{a}} \right);$$

$C$  – матрица упругих констант;  $E$  – единичная матрица;  $H'$  определяется из опыта на одноосное сжатие,  $H' = d\sigma_i / d\varepsilon_{ip}$ ;  $d\bar{\varepsilon} = (d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\gamma_{xy})^T$ ;  $d\bar{\sigma} = (d\sigma_x, d\sigma_y, d\tau_{xy})^T$ ;  $\bar{a}$  – вектор течения,

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)^T = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right)^T.$$

Условие текучести в общем виде может быть записано так [10]:

$$f(\sigma) - Y(\chi) = F(\sigma, \chi) = 0, \quad (2)$$

где  $f(\sigma)$  – функция компонентов напряжений;  $\chi$  – параметр упрочнения;  $Y(\chi)$  – уровень текучести.

В работе [10] поверхность течения, соответствующая критерию текучести, предложенному в [15], определяется уравнением

$$f(\sigma) = f(I_1, J_2) = (\beta(3J_2) + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_T, \quad (3)$$

где  $I_1$  – первый инвариант тензора напряжений;  $J_2$  – второй инвариант девиатора напряжений;  $\sigma_T$  – предел текучести;  $\alpha, \beta$  – параметры материала, определяемые из опытов при двухосном напряженном состоянии.

Этот критерий хорошо согласуется с опытными данными по прочности бетона в условиях сжатия, полученными в [16]. Однако эллиптическая форма поверхности течения не соответствует имеющимся опытными данным по прочности бетона в условиях растяжения и сжатия с растяжением. Это налагает соответствующие ограничения на область применения модели, основанной на условии (2).

В настоящей работе проведена модификация варианта теории течения [10] с целью расширения области ее применения и улучшения качества аппроксимации опытных данных. Ограничимся рассмотрением деформаций бетона в условиях плосконапряженного состояния.

При построении соотношений для упругопластической модели с упрочнением предполагается существование “начальной” поверхности текучести и последовательности поверхностей текучести или “поверхностей нагружения” [17]. Поверхности нагружения строят на базе предельных поверхностей, описывающих условие прочности материала.

Вариант теории течения [10] модифицирован путем введения функции нагружения  $F$ , полученной на основании условия прочности, предложенного в [18]. Предполагаем изотропное расширение поверхности нагружения до тех пор, пока в предельном состоянии она не совпадет с поверхностью прочности. Соответствующее условие прочности хорошо описывает опытные данные при плосконапряженном состоянии. Функция, описывающая предельную поверхность, имеет вид

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \sqrt{5} \tau_m - r = 0, \quad (4)$$

где  $\tau_m$  – функция второго инварианта девиатора напряжений,

$$\tau_m = \sqrt{(2/5)J_2};$$

$r$  – интерполяционная функция между значениями функций ( $\tau_t, \tau_c$ ), характеризующих радиусы поверхности прочности при  $\theta = 0$  и  $60^\circ$ ;  $\theta$  – угол вида напряженного состояния.

Выражение интерполяционной функции  $r$  таково:

$$r = \frac{2\tau_c(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos\theta + \tau_c(2\tau_t - \tau_c)\sqrt{4(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos^2\theta + 5\tau_t^2 - 4\tau_t\tau_c}}{4(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos^2\theta + (\tau_c - 2\tau_t)^2}, \quad (5)$$

где  $\tau_t, \tau_c$  – функции, образующие форму поверхности прочности при растяжении и сжатии соответственно,

$$\tau_t = \sqrt{5}\tau_i \left[ a_0 + a_1 \left( \frac{\sigma_0}{\tau_i} \right) + a_2 \left( \frac{\sigma_0}{\tau_i} \right)^2 \right]; \quad \tau_c = \sqrt{5}\tau_i \left[ b_0 + b_1 \left( \frac{\sigma_0}{\tau_i} \right) + b_2 \left( \frac{\sigma_0}{\tau_i} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  (6) обеспечивают попадание на поверхность прочности контрольных точек, соответствующих следующим случаям: одноосное сжатие; двухосное равномерное растяжение; трехосное равномерное растяжение; двухосное равномерное сжатие; одноосное растяжение. С использованием данных экспериментов, приведенных в [16], получим значения указанных выше коэффициентов:  $a_0 = 0,075; a_1 = 0,5075; a_2 = -0,0127; b_0 = 0,139; b_1 = 0,925; b_2 = -0,121$ .

Поверхность нагружения определяется на основе соотношения

$$F(\sigma_m, \tau_m, \theta, \chi) = f(\sigma_m, \tau_m, \theta) - h(\chi) = 0, \quad (7)$$

где  $h(\chi)$  – функция упрочнения.

Нормаль к поверхности (7), являющаяся вектором течения, который характеризует направление развития пластических деформаций для случая объемного напряженного состояния, задана градиентом функции, определяющей эту поверхность в пространстве напряжений  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ :

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \sigma} = \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \right)^T. \quad (8)$$

Переходя к пространству главных напряжений, (7) запишем в виде

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \sigma} = \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma_1}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_2}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_3}, 0, 0, 0 \right)^T. \quad (9)$$

Для определения компонент вектора течения будем рассматривать поверхность нагружения в пространстве параметров  $\tau_m, \tau_c, \tau_t, \theta$  с матрицей Якоби преобразования координат:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \sigma} = J \left( \frac{\partial F}{\partial \tau_m}, \frac{\partial F}{\partial \tau_c}, \frac{\partial F}{\partial \tau_t}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^T, \quad (10)$$

где  $J$  – матрица.

Подставляя выражения для частных производных в (10), получаем компоненты вектора течения:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)^T. \quad (11)$$

В качестве функции упрочнения для построения поверхности нагружения, задающей величину пластической деформации, целесообразно использовать зависимость

$$H' = d\tau_i / d\varepsilon_{ip}. \quad (12)$$

Лучшее соответствие между расчетными и экспериментальными результатами достигается при использовании касательного модуля  $H'$  для каждой экспериментальной траектории. В [10]  $H'$  определяется для одноосного сжатия. В данном случае используется зависимость  $H'$  от интенсивности полной пластической деформации  $\varepsilon_{ip}$  и параметра  $\xi$ , характеризующего вид напряженного состояния [6]:

$$\xi = \sigma_0 / \tau_0, \quad (13)$$

где  $\sigma_0, \tau_0$  – октаэдрические нормальное и касательное напряжения.

Для построения указанной зависимости используются опытные данные по прочности бетона, полученные при сжатии и сжатии с растяжением [16], а также при растяжении [19]. Зависимость значений  $H'$  от интенсивности полной пластической деформации  $\varepsilon_{ip}$  аппроксимируем выражением

$$H' = \frac{1}{A\varepsilon_{ip}^{*3} + B\varepsilon_{ip}^{*2} + C\varepsilon_{ip}^* + D}, \quad (14)$$

где  $A, B, C, D$  – коэффициенты, значения которых в зависимости от параметра  $\xi$  для рассмотренных в [16, 19] опытов приведены в табл. 1;  $\varepsilon_{ip}^* = 1000\varepsilon_{ip}$ .

Т а б л и ц а 1

Зависимость коэффициентов функции упрочнения от вида напряженного состояния

Траектория нагружения ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ )	$\xi$	$A \cdot 10^{-3}$	$B \cdot 10^{-3}$	$C \cdot 10^{-3}$	$D \cdot 10^{-6}$
0,204:0:-1	-0,504	914	-113	5,03	-58,1
0,103:0:-0	-0,601	36	-7,56	0,791	-0,107
0,052:0:-1	-0,653	0,676	-0,895	0,453	-67,4
0:0:-1	-0,707	0,509	-0,013	0,222	5,51
0:-0,52:-1	-1,241	0,309	-0,455	0,433	-3,13
0:-1:-1	-1,414	0,194	-0,175	0,303	1,09
1:0:0	0,707	11200	-282	3,79	-0,0044
1:0,5:0	1,225	5510	-228	4,21	-2,54
1:1:0	1,414	2454	-61,89	3,22	-0,224

Расчетные кривые, построенные на основе предложенного варианта теории течения бетона, сравниваются с опытными данными, полученными при растяжении [19] (рис. 1), а также при сжатии и сжатии с растяжением [16] (рис. 2, 3). По оси ординат отложены относительные величины напряжений  $\sigma_1 / \hat{\sigma}_{bt}, \sigma_3 / \hat{\sigma}_{bc}$ , где  $\hat{\sigma}_{bt}, \hat{\sigma}_{bc}$  – предельные значения напряжений при одноосном растяжении и одноосном сжатии.

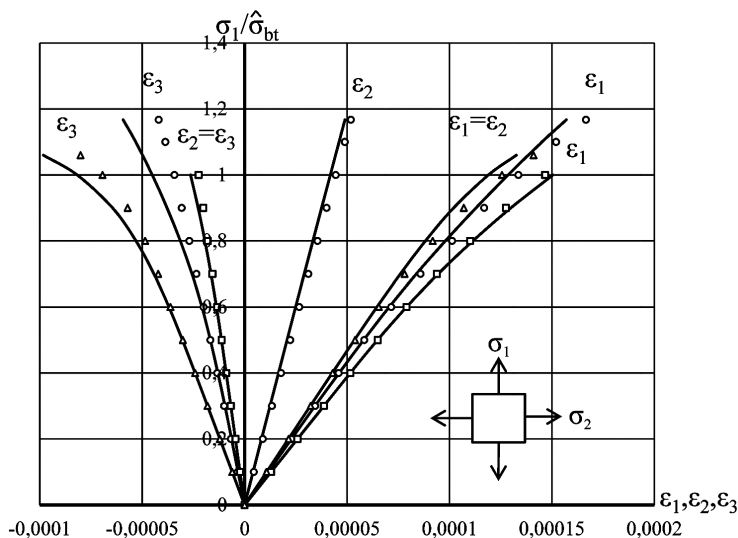


Рис. 1. Сравнение расчетных кривых  $\sigma - \epsilon$  с экспериментальными данными в случае растяжение-растяжение [19]:  $\square - \sigma_1:\sigma_2 = 1:0$ ;  $\circ - 1:0,5$ ;  $\triangle - 1:1$ .

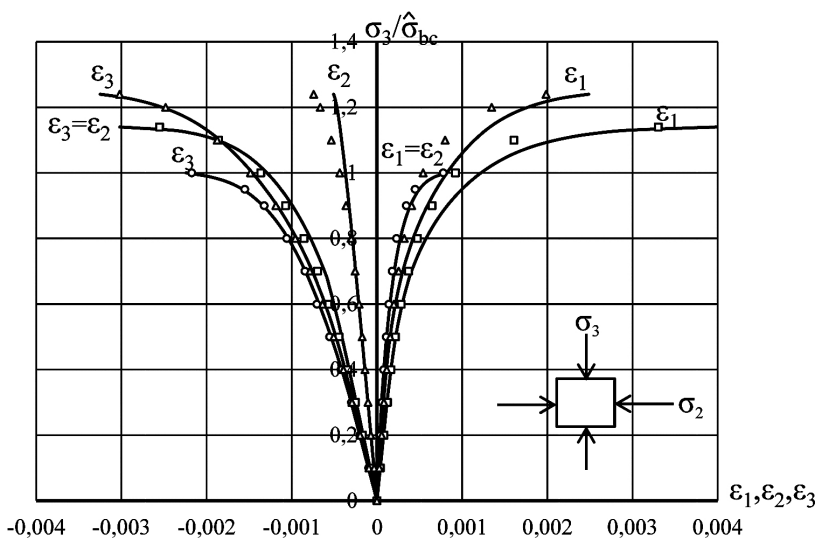


Рис. 2. Сравнение расчетных кривых  $\sigma - \epsilon$  с экспериментальными данными в случае сжатие-сжатие [16]:  $\square - \sigma_3:\sigma_2 = -1:-1$ ;  $\circ - (-1):0$ ;  $\triangle - (-1):-0,5$ .

Среднеквадратические относительные погрешности аппроксимации опытных данных с использованием предложенных выше соотношений приведены в табл. 2.

Следует отметить, что измерение поперечных деформаций при испытании плосконапряженных образцов из бетона связано с техническими трудностями, поэтому возникают сложности при оценке точности аппроксимации этих деформаций.

Применение предложенной аппроксимации (14) в рассматриваемой модели позволяет с достаточной точностью описать деформирование бетона. Однако данная модель требует дальнейшего развития. В частности, область ее применения ограничена исследованиями прочности бетонов, описанными в работах [16, 19]. Дальнейшее развитие теории связано с необходимостью проведения экспериментов на образцах бетона различной прочности. Предложенный подход может быть использован для

Т а б л и ц а 2

Соответствие между расчетными кривыми деформирования и экспериментальными данными [16, 19]

Траектория нагружения ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ )	Среднеквадратическая относительная погрешность аппроксимации для главных деформаций, %			Литературный источник
	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	
0,204:0:-1	5,9	19,3	7,6	[16]
0,103:0:-0	2,4	25,5	3,0	[16]
0,052:0:-1	5,7	22,6	1,3	[16]
0:0:-1	10,9	10,9	1,4	[16]
0:-0,52:-1	26,4	11,8	4,5	[16]
0:-1:-1	17,2	7,1	7,1	[16]
1:0:0	1,1	7,4	7,4	[19]
1:0,5:0	2,9	6,5	20,5	[19]
1:1:0	3,1	3,1	10,1	[19]

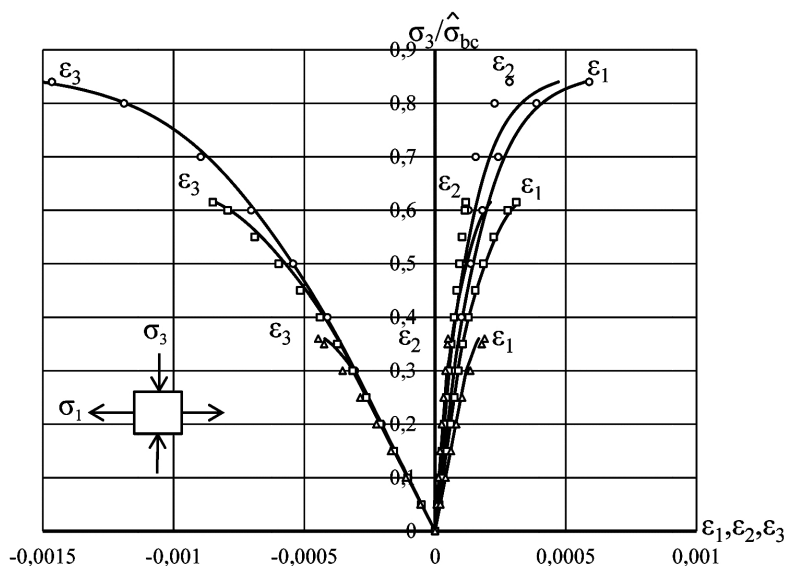


Рис. 3. Сравнение расчетных кривых  $\sigma - \epsilon$  с экспериментальными данными в случае сжатие-растяжение [16]:  $\square - \sigma_3: \sigma_1 = -1:0,103$ ;  $\circ - (0:-1):0,052$ ;  $\triangle - (0:-1):0,204$ .

описания сложного нагружения при моделировании процесса деформирования бетона, а также для установления зависимостей величин касательного модуля при различных видах напряженного состояния и углов излома траекторий нагружения.

**Резюме**

Наведено основні співвідношення моделі деформування бетону, що базується на модифікованому варіанті теорії плинності. Розрахункові дані порівнюються з результатами експериментів в умовах розтягу, стиску і стиску з розтягом. Оцінено похибку при апроксимації експериментальних даних на основі запропонованих співвідношень.

1. Карпенко Н. И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
2. Корсун В. И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в условиях температурных воздействий. – Макеевка: ДонГАСА, 2004. – 153 с.
3. Куценко В. Н., Левин В. М., Муцанов В. Ф. и др. Научные основы обеспечения надежности и экономичности шахтных копров. – Макеевка: ДонНАСА, 2012. – 462 с.
4. Левин В. М., Гудрамович В. С., Митраков В. А. и др. Прогрессирующее разрушение железобетонных конструкций // Пространственные конструкции зданий и сооружений. – 2009. – Вып. 12. – С. 214 – 223.
5. Леонгардт Ф. Предварительно напряженный железобетон / Пер. с нем. – М.: Стройиздат, 1983. – 235 с.
6. Круглов В. М., Казачевский А. И. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряженном состоянии // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1989. – Вып. 55. – С. 71 – 77.
7. Hsieh S. S., Ting E. C., and Chen W. F. A plastic-fracture model for concrete // Int. J. Solids Struct. – 1982. – **18**, Issue 3. – P. 181 – 197.
8. Lubliner J., Oliver J., Oller S., and Oñate E. A plastic-damage model for concrete // Ibid. – 1989. – **25**, Issue 3. – P. 299 – 326.
9. Grassl P., Lundgren K., and Gylltoft K. Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law // Ibid. – 2002. – **39**, Issue 20. – P. 5205 – 5223.
10. Агапов В. П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. – М.: Изд-во АСВ, 2004. – 248 с.
11. Клованич С. Ф., Мироненко И. Н. Метод конечных элементов в механике железобетона. – Одесса: Изд-во Одесского нац. морского ун-та, 2007. – 110 с.
12. Ильюшин А. А. Труды. В 4 т. Т. 2. Пластичность. – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.
13. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. – Киев: Наук. думка, 2004. – 222 с.
14. Гудрамович В. С., Деменков А. Ф. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 174 с.
15. Owen D. R. J., Figueiras J. A., and Damjanic F. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1983. – **41**, Issue 3. – P. 323 – 366.
16. Kupfer H. Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung // Wissenschaft. Z. TU Dresden. – 1968. – **17**, Heft 6. – S. 1515 – 1523.
17. Железобетонные стены сейсмостойких зданий. Исследования и основы проектирования / Под ред. Г. Н. Ашкинадзе, М. Е. Соколова. – М.: Стройиздат, 1988. – 499 с.
18. Willam K. J. and Warnke E. P. Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete // IABSE Proc. – 1975. – **19**. – P. 1 – 31.
19. Tasuji M. E., Slate F. O., and Nilson A. H. Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading // ACI J. – 1978. – **75**, No. 7. – P. 306 – 312.

Поступила 14. 11. 2013