

Применение комбинированного метода весовых функций для определения площади раскрытия сквозной трещины в оболочке

И. В. Орыняк, Е. С. Яковлева, Я. Р. Дубик

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Площадь раскрытия сквозной трещины в оболочке является одним из основных расчетных параметров в концепции “течь перед разрушением”. Существующие методы ее определения, по сути, рассматривают оболочку как плоское тело и не учитывают линейно изменяющуюся составляющую поля перемещений (как в теории пластин). На основе комбинированного метода весовых функций предлагается простая процедура получения приближенного выражения для определения фундаментального поля перемещений при действии сосредоточенных силы и момента на берега трещины в виде суммы однородной и линейно изменяющейся по толщине стенки составляющих. Это позволяет, в частности, получить удобные формулы для нахождения площади раскрытия трещины в полиномиальном поле как мембранных, так и линейных напряжений. Для цилиндрической оболочки с продольной и поперечной трещинами проведено сравнение полученных величин площади с таковыми, приведенными в литературных источниках. Оценен вклад линейной составляющей в общую площадь раскрытия трещины.

Ключевые слова: сквозная трещина, коэффициент интенсивности напряжений, весовая функция, площадь раскрытия трещины.

Введение. Взаимное смещение (расхождение) противоположных точек берегов сквозной трещины (СБТ) – один из основных расчетных параметров, который используется для обоснования концепции “течь перед разрушением”. По зависимости СБТ вдоль линии трещины определяется площадь ее раскрытия A , от величины которой зависит скорость истечения теплоносителя через нее. Смещение берегов сквозной трещины рассчитывается в результате численного или аналитического решения задачи механики разрушения.

Наиболее распространенным параметром механики разрушения, характеризующим состояние упругого тела с трещиной, является коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Как известно, его величина описывает поля перемещений и напряжений в окрестности вершины трещины. Определение значений КИН очень часто является конечной целью расчетов. Методы определения КИН широко представлены в научной справочной литературе. Один из известных эффективных методов – метод весовых функций, представляющий собой фундаментальное решение для КИН от единичной силы, приложенной в произвольной точке на поверхности трещины [1]. Заметим, что для построения приближенной весовой функции часто используется такой прием, как вспомогательное построение функции СБТ по длине трещины [2]. В частности, в работах [3, 4] при получении приближенного фундаментального решения для КИН строилось приближенное фундаментальное решение для СБТ. Тем не менее этот опыт и результаты не используются при нахождении площади раскрытия трещины (ПРТ).

Среди распространенных методов определения ПРТ отметим методы, основанные на уравнении для скорости освобождения энергии [5]. Для пластины единичной толщины оно имеет вид

$$G = \frac{K_I^2}{E} = \frac{\partial \Pi}{\partial l}, \quad (1)$$

где K_I – КИН для трещины нормального отрыва; Π – упругая энергия; E – модуль Юнга; l – полудлина сквозной трещины.

С другой стороны, уравнение для упругой энергии Π запишем так:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sigma(x)v(x)dx, \quad (2)$$

где $\sigma(x)$ – произвольная нагрузка, приложенная к берегам трещины; $v(x)$ – смещения берегов трещины.

В [6] были получены решения, определяющие скорость освобождения энергии G для длинной окружной трещины в цилиндре при действии осевого растяжения, а затем и при совместном действии растяжения и изгиба [7]. Полученные трансцендентные выражения использовались многими исследователями при определении площади раскрытия трещины. Указанные выше методы основываются на применении уравнений (1) и (2). Наиболее просто площадь определяется при действии постоянной нагрузки на берега трещины ($\sigma = \text{const}$) с использованием решения для КИН:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l} F_I(\bar{G}), \quad (3)$$

где $F_I(\bar{G})$ – безразмерный КИН, при $l \rightarrow 0$ (пластина Гриффитса) значение $F_I \rightarrow 1$.

Интегрируя выражение (1) с учетом (3) и сопоставляя его с (2), получаем выражение для ПРТ:

$$A = \int_{-l}^l v(x)dx = \frac{2\pi\sigma}{E} \int_{-l}^l x(F_I(x))^2 dx. \quad (4)$$

В частности, для пластины Гриффитса имеем $F_I = 1$, и выражение (4) запишем в виде

$$A_0 = 2\pi l^2 \frac{\sigma}{E} = a_0 \sigma, \quad (5)$$

где для удобства введено обозначение a_0 .

В работе [8] на основе решений, полученных в [6, 7], предложены полиномиальные выражения для безразмерных КИН для окружной трещины в цилиндрической оболочке срединного радиуса R_m и толщины стенки t при отношении $R_m/t = 10$. В случае действия растягивающих напряжений согласно [8] выражение для определения ПРТ имеет вид

$$A_t = A_0 \alpha_t(\theta/\pi), \quad (6)$$

где α_t – безразмерная величина площади,

$$\alpha_t = 1 + \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{1,5} \left\{ 8,6 - 13,3 \left(\frac{\theta}{\pi}\right) + 24 \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 \right\} + \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^3 \left\{ 22,5 - 75 \left(\frac{\theta}{\pi}\right) + 205,7 \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2 - 247,5 \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^3 + 242 \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^4 \right\}; \quad (7)$$

θ – угловая полудлина (в радианах) трещины, отсчитываемая от ее центра.

В [9] были предложены аппроксимационные формулы для определения безразмерной площади $\alpha_t(\lambda)$ в случае продольной и окружной трещин в цилиндре в зависимости от параметра кривизны $\lambda = [12(1 - \nu^2)]^{1/4} l / (Rh)^{1/2}$, ν – коэффициент Пуассона. Так, для продольной трещины имеем

$$\alpha_t(\lambda) = 1 + 0,1\lambda + 0,16\lambda^2, \quad (8)$$

для окружной –

$$\alpha_t(\lambda) = (1 + 0,117\lambda^2)^{1/2}. \quad (9)$$

В работах [10–12] были предложены различные способы аппроксимации выражений для безразмерных КИН для окружных трещин, на основе которых получены формулы для определения ПРТ в более широком диапазоне значений отношения R_m/t . Например, в [10] приведены выражения для безразмерных КИН F_t и F_b , которые позволяют определять ПРТ в диапазоне $0 < \theta/\pi \leq 0,55$ и $5 \leq R_m/t \leq 20$ (индексы t и b относятся к равномерному растяжению и изгибу цилиндра соответственно). Эти выражения в дальнейшем использовались для определения безразмерных ПРТ. Расширенный обзор полученных аналогичным образом решений дан в работе [12].

Основным недостатком этих методов является то, что они обоснованы для случая однородной нагрузки, для других видов нагрузок предлагаются эмпирические формулы. Например, при действии глобального изгибающего момента \bar{M}_b (нагружение цилиндра аналогично балке) в работе [8] для определения безразмерной ПРТ предлагается формула

$$\alpha_b = \left(\frac{3 + \cos \theta}{4} \right) \alpha_t, \quad (10)$$

где α_t определяется по выражению (7), а в формуле (5) используется максимальное значение напряжений σ_b при изгибе цилиндра как балки, значение угла θ отсчитывается от точки действия максимальных напряжений. Заметим, что формула (10) получена логическим путем на основе установления двух границ (при 1 и $\cos \theta$) для равнодействующих однородных напряжений.

Еще более упрощенный подход для нахождения ПРТ предложен в модели Бартоломе–Кастнера [9], где рассматриваются эквивалентные напряжения σ_e как сумма всех действующих напряжений. Тогда результирующая площадь A_{BK} находится по формуле

$$A_{BK} = 7,54\alpha l^2 \frac{\sigma_e}{E}, \quad (11)$$

где число 7,54 получено на основе асимптотического поведения поля перемещений в окрестности трещины в полубесконечном теле.

Более логичной является модель Бхандари [11], где система действующих напряжений также заменяется эквивалентной однородной нагрузкой, величина которой устанавливается из условия равенства КИН для двух систем нагружения – реальной и эквивалентной. Так, для изгибных напряжений эквивалентная нагрузка определяется по формуле

$$\sigma_e = (F_b/F_t)\sigma_b. \quad (12)$$

Для значений $R_m/t=10$ при сравнении данных [11] с результатами, полученными в [8], согласно предлагаемому подходу расхождение в значениях составляет 3%. Для $R_m/t \neq 10$ подобно методу Тада–Париса в [11] приводится выражение для определения безразмерных α_t и α_b в виде полинома по степеням (θ/π) .

Однако существует и другая малоисследованная проблема анализа СБТ. Известно, что если характер деформирования оболочки отличается от балочного, то смещения берегов трещины не одинаковы по толщине ее стенки. Дополнительно к однородным СБТ в оболочках возникают линейно изменяющиеся по толщине стенки перемещения и напряжения (как в теории пластин).

Проблеме учета оболочечного характера деформирования (одновременно балка и пластина) при определении КИН и поля перемещений не уделялось должного внимания, поскольку в основном рассматривались поперечные трещины в прямых трубах (в сварных швах). В этом случае обычно труба ведет себя как балка, где нет градиента напряжений по толщине стенки. Однако в последнее время при применении концепции “течь перед разрушением” предполагается анализ продольных и поперечных трещин в гibaх труб [13]. Напряженное состояние последних имеет ярко выраженный оболочечный характер деформирования даже при нагружении глобальными моментами на бесконечности [14]. Более того, это характерно и для прямых труб в зонах сопряжения их с другими конструктивными элементами трубопроводной системы [15]. Очевидно, что проблема оболочечных перемещений требует решения для правильного применения концепции “течь перед разрушением”.

Для понимания последующего анализа и применяемых обозначений будем различать следующие виды нагружения и перемещения берегов трещины. Любую систему внешних нагрузок согласно принципу суперпозиции можно свести к мембранным (как в плоском теле) и изгибным (как в теории пластин) линейно изменяющимся по толщине стенки оболочки напряжениям.

Оба семейства напряжений рассматриваются как переменные вдоль линии трещины, т.е. координаты ξ (рис. 1). Аналогично расхождения берегов трещины будем разделять на однородные, не зависящие от координаты по толщине стенки, и линейно зависящие от нее. В свою очередь, эти перемещения зависят от координаты x по длине трещины (рис. 1).

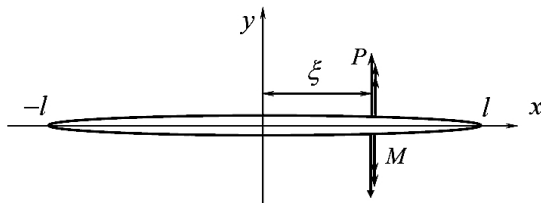


Рис. 1. Схема приложения нагрузки (силы и момента) к берегам трещины.

В данной работе на основании применения комбинированного метода весовых функций [3, 4] предлагается простая процедура получения приближенного фундаментального решения для однородных и линейных СБТ и удобных формул для нахождения ПРТ в полиномиальном поле как мембранных, так и линейных напряжений.

Сформулируем задачи исследования:

получить фундаментальное решение для поля перемещений берегов трещины в бесконечной тонкой пластине, к которым приложен сосредоточенный момент;

предложить общее выражение для определения приближенного фундаментального поля перемещений при действии сосредоточенных силы и момента, приложенных к берегам трещины в цилиндрической оболочке, в виде суммы однородной и линейной составляющих, содержащих набор неизвестных коэффициентов;

на основе комбинированного метода весовых функций [3, 4] получить соотношения между указанными неизвестными коэффициентами и значениями безразмерных КИН;

конкретизировать результаты на случай полиномиального поля напряжений и получить удобные формулы для ПРТ;

провести сравнение полученных величин ПРТ в цилиндрической оболочке с результатами, представленными в литературных источниках;

оценить вклад линейно изменяющихся перемещений раскрытия трещины по сравнению с однородными перемещениями в цилиндрической оболочке.

1. Приближенные фундаментальные выражения для поля перемещения при действии на берега трещины сосредоточенных силы и момента.

1.1. *Комбинированный метод весовых функций [4].* На рис. 1 представлена бесконечная плоскость с трещиной длиной $2l$, с которой связана прямоугольная система координат, где ось x направлена вдоль трещины, а центр координат находится в центре трещины. К берегам трещины на расстоянии ξ от центра приложены нормальные сосредоточенные силы P , равные по величине и противоположные по направлению. Весовые функции для КИН [4] были получены как часть фундаментального решения задачи теории упругости для поля перемещений берегов трещины.

В работе [16] для решения этой задачи приведено выражение для определения СБТ:

$$V^{A,P}(l, \xi, x) = \frac{2P}{\pi E} \ln \frac{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}, \quad (13)$$

где A обозначает, что решение асимптотическое (фундаментальное); P характеризует действующую нагрузку; множитель 2 учитывает взаимное смещение противоположных берегов.

При произвольном законе изменения нагрузки $\sigma(\xi)$ искомые перемещения получим путем интегрирования выражения

$$v(x) = \int_{-l}^l \sigma(\xi) V^{A,P}(l, \xi, x) d\xi. \quad (14)$$

Для тела произвольной геометрии предложен комбинированный метод весовых функций, основанный на поиске приближенного фундаментального выражения, определяющего поле перемещений в виде суммы асимптотической и поправочной составляющих:

$$V(l, \xi, x) = V^{A,P}(l, \xi, x) + V^{C,P}(l, \xi, x), \quad (15a)$$

где $V^{A,P}(l, \xi, x)$ определяется по (13); индекс C обозначает поправочную составляющую, являющуюся пренебрежимо малой при стремлении точки приложения нагрузки к вершине трещины:

$$V^{C,P}(l, \xi, x) = \frac{2P}{\pi E} C \frac{\sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2} \quad (15b)$$

(C – константа, которая является искомой неизвестной).

Воспользуемся определением КИН, принятым в работе [17]:

$$K_I = \lim_{x \rightarrow l} \frac{v(x) E \sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}r}, \quad (16)$$

где r – расстояние до вершины трещины, $r = l - x$.

Подставляя (15) в (16), получаем фундаментальное решение для КИН (весовую функцию):

$$h(\xi, \vec{G}) = \frac{\sqrt{l + \xi}}{\sqrt{\pi l} \sqrt{l - \xi}} (1 + C(\vec{G})(l - \xi)/l), \quad (17)$$

где \vec{G} – набор констант, характеризующих геометрию тела.

Задачи теории упругости по определению КИН сводятся с помощью весовой функции к простому интегрированию по длине трещины:

$$K_I = \int_{-l}^l h(\xi, \vec{G}) \sigma(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Согласно методу весовых функций, константа C находится путем сравнения приведенного в литературных источниках решения для КИН при заданном нагружении (обычно однородном, $\sigma = \text{const}$) со значением, которое определяется по (16). Таким образом, интегрируя (18) при $\sigma = \text{const}$ и сопоставляя с (3), получаем формулу для определения константы C :

$$C(l, \vec{G}) = 4(F_1(l, \vec{G}) - 1). \quad (19)$$

В настоящей работе в выражении перемещения берегов трещины $V(l, \xi, x)$ неизвестные коэффициенты в поправочных членах будут определяться с помощью вышеописанного метода.

1.2. Фундаментальное решение для поля перемещений при действии сосредоточенного момента, приложенного к берегам трещины в пластине. К сожалению, в литературных источниках не удалось найти компактное выражение для фундаментального поля перемещений берегов трещины. Частично эта проблема была решена в работе [18], в которой используются обозначения и постановка задачи из [19]. С помощью этих результатов найдем искомое выражение для поля перемещений.

Прямоугольную декартову систему координат свяжем с пластиной толщиной h , в которой имеется трещина длиной $2l$, таким образом, чтобы срединная плоскость совпадала с плоскостью xOy , а оси Ox и Oy направлены так, чтобы система была правой. Центр трещины совпадает с точкой O – началом координат, ось x направлена вдоль трещины. К берегам последней на расстоянии ξ от центра приложены сосредоточенные моменты M , равные по величине и противоположные по направлению. Положительным считаем момент, при котором слои, расположенные над срединной плоскостью, находятся в состоянии сжатия, а под ней – в состоянии растяжения. Приведенную на рис. 1 схему будем рассматривать как срединную плоскость пластины. Обозначим $u(x, y)$, $v(x, y)$ – компоненты вектора перемещения точек пластины по осям Ox , Oy соответственно. В работе [19] в рамках технической теории изгиба приведено выражение для определения компонент перемещения по двум аналитическим функциям $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$:

$$u + iv = -\delta(\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}), \quad (20)$$

где $-h/2 < \delta < h/2$ – координата по толщине пластины.

Продифференцируем уравнение (20) по z и введем обозначения: $\Phi(z) = \varphi'(z)$; $\Psi(z) = \psi'(z)$; $\overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = \Omega(z)$. Тогда выражение (20) преобразуется к виду

$$(u' + iv)^\pm = -\delta(\Phi^\pm(z) + \Omega^\mp(z)). \quad (21)$$

Согласно приведенной в [18] постановке задачи имеем

$$\kappa\Phi^\pm(z) + \Omega^\mp(z) = \frac{M}{D(1-\nu)}, \quad (22)$$

где

$$\kappa = -\frac{3+\nu}{1-\nu}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Складывая и вычитая уравнения (22), получаем две задачи линейного сопряжения [20]. В соответствии с первой имеем соотношение

$$\kappa\Phi(z) = \Omega(z), \quad (23)$$

из другой – выражение для функции

$$\Phi(z) = \frac{iM}{2\pi\kappa D(1-\nu)\sqrt{l^2 - z^2}} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{(z - \xi)}. \quad (24)$$

Складываем и вычитаем равенство (21). Сравнивая действительные и мнимые части выражения (23) с учетом того, что $-\Phi^+(z) = \Phi^-(z)$ и значения расхождения берегов трещины одинаковые по модулю, но противоположные по знаку ($\nu'^+ = -\nu'^-$), получаем уравнение

$$iv' = -\delta(1-\kappa)\Phi(z). \quad (25)$$

Здесь ν – половинное расхождение берегов трещин.

Интегрируя выражение (25) и умножая результат на 2, получаем искомое выражение для полных перемещений $V^{A,M}$:

$$V^{A,M} = \frac{\delta}{h/2} \frac{12M}{\pi Eh^2} \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)} \ln \frac{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}. \quad (26)$$

По аналогии с выражением (13) используем верхние индексы для обозначения фундаментального перемещения в бесконечной пластине при действии сосредоточенного момента.

1.3. Приближенное выражение поля фундаментальных перемещений в оболочке при совместном действии силы и момента. Выше отмечалось, что общие фундаментальные перемещения берегов трещины $V(l, \xi, x, \vec{G})$ предлагается записывать в виде суммы однородной и линейной составляющих.

Каждая из составляющих, согласно методу, описанному в п. 1.1, представляется в виде суммы асимптотических и поправочных слагаемых:

$$V = V_h + V_l = \{V_h^{A,P} + V_h^{C,P} + V_h^{C,M}\} + \{V_l^{A,M} + V_l^{C,M} + V_l^{C,P}\}. \quad (27)$$

Для различия вида перемещений вводим дополнительно нижние индексы: h , l – соответственно однородные и линейные перемещения по толщине стенки оболочки. Верхние индексы имеют то же обозначение, что и в формулах (15) и (26).

Асимптотические составляющие перемещений $V_h^{A,P}$, $V_l^{A,M}$ определяются по формулам (13) и (26). Остальные слагаемые являются поправочными составляющими однородных и линейных перемещений от приложенных силы и момента и принимаются в виде, аналогичном формулам (15), исходя из подобной аргументации:

$$V_h = \frac{2P}{\pi E} \left(\ln \frac{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}} + C_h^P \frac{\sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2} \right) + \frac{12M}{\pi E h^2} C_h^M \frac{\sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2}; \quad (28)$$

$$V_l = \frac{\delta}{h/2} \frac{12M}{\pi E h^2} \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)} \left(\ln \frac{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}} + C_l^M \frac{\sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2} \right) + \frac{\delta}{h/2} \frac{2P}{\pi E} \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)} C_l^P \frac{\sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2}, \quad (29)$$

где C_h^P , C_h^M , C_l^P , C_l^M – неизвестные коэффициенты, которые подлежат определению. Располагая выражениями для фундаментальных перемещений, по формуле (14) можно найти перемещения берегов трещины при произвольной нагрузке.

1.4. Перемещения берегов трещины и площади ее раскрытия при произвольном законе нагружения. Поскольку однородная и линейная составляющие фундаментальных перемещений имеют одинаковую структуру, процедуру определения перемещений берегов трещины рассмотрим на примере однородной составляющей. Согласно формуле (14) перемещения берегов трещины при действии произвольной нагрузки $\sigma(\xi)$ имеют вид

$$v(x) = \int_{-l}^l \sigma(\xi) V_h(l, \xi, x) d\xi. \quad (30)$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. При этом в (30) примем следующие обозначения: $\sigma(\xi)d\xi = dL(\xi)$, где $\sigma(\xi)$ – полином степени n . Тогда формула интегрирования по частям будет иметь вид

$$v(x) = \int_{-l}^l V_h(\xi)dL(\xi) = V_h(\xi)L(\xi)|_{-l}^l - \int_{-l}^l L(\xi)dV_h(\xi). \quad (31)$$

Из (28) получим

$$dV_h(\xi) = \left[\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{\sqrt{l^2 - \xi^2}} \left(\frac{1}{x - \xi} - \frac{\xi}{l^2} C_h^P \right) \right] d\xi. \quad (32)$$

Поскольку $V_h(l) = V_h(-l) = 0$, первое слагаемое в (31) равно нулю. Рассмотрим некоторые полиномиальные законы нагружения. Заметим, чтобы различать мембранные и линейные напряжения, обозначим их интенсивности $\sigma^P = P/h$ и $\sigma^M = 6M/h^2$ соответственно:

при $\sigma = (\xi/l)^0$, $L(\xi) = \xi$ интеграл (31) равен

$$v_h(x) = 4\sqrt{l^2 - x^2} \left[\frac{\sigma^P}{E} \left(1 + \frac{C_h^P}{2} \right) + \frac{\sigma^M}{E} \frac{C_h^M}{2} \right], \quad (33)$$

при $\sigma = \xi/l$, $L(\xi) = \xi^2/(2l)$ –

$$v_h(x) = 2 \frac{\sigma^P}{E} \frac{x}{l} \sqrt{l^2 - x^2}, \quad (34)$$

при $\sigma = (\xi/l)^2$, $L(\xi) = \xi^3/(3l^2)$ –

$$v_h(x) = \sqrt{l^2 - x^2} \left[\frac{\sigma^P}{E} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \frac{x^2}{l^2} + \frac{C_h^P}{2} \right) + \frac{\sigma^M}{E} \frac{C_h^M}{2} \right]. \quad (35)$$

Для общего случая нагружения: $\sigma = (\xi/l)^n$, $V(\xi) = \xi^{n+1}/((n+1)l^n)$ интеграл (31), если n нечетное, равен

$$v_h(x) = \frac{4\sqrt{l^2 - x^2}}{(n+1)} \frac{\sigma^P}{E} \sum_{k=0}^{s=n-1} \left(\frac{x}{l} \right)^{k+1} \frac{1}{2^{s-k}} \left(\frac{s-k}{(s-k)/2} \right), \quad (36)$$

если n четное –

$$v_h(x) = \frac{4\sqrt{l^2 - x^2}}{(n+1)} \left[\frac{\sigma^P}{E} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{x}{l} \right)^k \frac{1}{2^{n-k}} \left(\frac{n-k}{(n-k)/2} \right) \right) + \right.$$

$$+ \left[\binom{n+2}{(n+2)/2} C_h^P \right] + \frac{\sigma^M}{E} \left[\binom{n+2}{(n+2)/2} C_h^M \right], \quad (37)$$

где s, k – четные; $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$ – число сочетаний.

Располагая выражениями смещений берегов трещины, определяем площадь ее раскрытия:

$$A = \int_{-l}^l v(x) dx. \quad (38)$$

Подставляя (33)–(35) для однородной и линейной составляющих перемещений берегов трещины в (38), получаем формулы для ПРТ при действии полиномиального нагружения:

$$\sigma = (\xi/l)^0:$$

$$A_h^{(0)} = a_0(\sigma^P(1 + 0,5C_h^P) + 0,5\sigma^M C_h^M) = a_0\sigma^P \left(1 + \Delta_h^P + \frac{\sigma^M}{\sigma^P} \Delta_h^M \right); \quad (39)$$

$$A_l^{(0)} = a_1(\sigma^M(1 + 0,5C_l^M) + 0,5\sigma^P C_l^P) = a_1\sigma^M \left(1 + \Delta_l^M + \frac{\sigma^P}{\sigma^M} \Delta_l^P \right), \quad (40)$$

где для удобства введены обозначение $a_1 = 2a_0 \frac{(1+\nu)\delta}{(3+\nu)h}$, а также понятие добавочных безразмерных площадей, учитывающих влияние кривизны оболочки от однородных Δ_h^P, Δ_h^M и линейных Δ_l^P, Δ_l^M перемещений. Верхние индексы обозначают прилагаемую нагрузку.

Таким образом, общая площадь раскрытия трещины состоит из ПРТ для плоского тела от однородных перемещений (или для пластины от линейных) и добавочных ПРТ, учитывающих влияние кривизны оболочки:

$$\sigma = \xi/l:$$

$$A^{(1)} = 0; \quad (41)$$

$$\sigma = (\xi/l)^2:$$

$$A_h^{(2)} = \frac{a_0}{4}(\sigma^P(1 + 0,5C_h^P) + 0,5\sigma^M C_h^M), \quad (42)$$

$$A_l^{(2)} = \frac{a_1}{4}(\sigma^M(1 + 0,5C_l^M) + 0,5\sigma^P C_l^P). \quad (43)$$

В следующем разделе определим неизвестные коэффициенты $C_h^P, C_h^M, C_l^P, C_l^M$ с использованием метода весовых функций путем сопоставления

решений для КИН при заданной геометрии и однородного нагружения, описанного в п. 1.1.

2. Определение неизвестных коэффициентов $C_h^P, C_h^M, C_l^P, C_l^M$ и анализ полученных результатов.

2.1. *Определение неизвестных коэффициентов.* Для однородной составляющей фундаментальных перемещений определим КИН согласно формуле [17]:

$$K_{Ih} = \lim_{x \rightarrow l} \frac{V_h(x) E \sqrt{\pi}}{4 \sqrt{2r}}, \quad (44)$$

для линейной составляющей [21]:

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow l} \frac{V_l(x) E \sqrt{\pi}}{4 \sqrt{2r}} \frac{3 + \nu}{1 + \nu}. \quad (45)$$

В работах [22, 23] дано эквивалентное определение соответствующих K_I через мембранные и изгибные напряжения на продолжении линии трещины в непосредственной близости от ее вершины. Для мембранных напряжений имеем

$$\sigma_{yy}^P = \frac{K_{Ih}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (46a)$$

для изгибных –

$$\sigma_{yy}^M = \frac{\delta}{h/2} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (46b)$$

Весовые функции для КИН для однородной и линейной составляющих с учетом (28) и (29) запишем в виде

$$K_{Ih} = \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \left(\sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} + \frac{C_h^P}{2} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{l} \right) + \frac{6M}{h^2 \sqrt{\pi l}} \frac{C_h^M}{2} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{l}; \quad (47)$$

$$K_{II} = \frac{\delta}{h/2} \frac{6M}{h^2 \sqrt{\pi l}} \left(\sqrt{\frac{l+\xi}{l-\xi}} + \frac{C_l^M}{2} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{l} \right) + \frac{\delta}{h/2} \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \frac{C_l^P}{2} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{l}. \quad (48)$$

Определим коэффициенты $C_h^P, C_h^M, C_l^P, C_l^M$ по известным решениям для КИН. Наиболее удобно это сделать в случае действия однородных нагрузок, т.е. при $P(\xi) = \sigma^P$ и $6M(\xi)/h^2 = \sigma^M$. Путем интегрирования выражений (47) и (48) получим КИН (например, на внешней поверхности оболочки). Для однородных перемещений имеем

$$K_{Ih} = \sigma^P \sqrt{\pi l} \left(1 + \frac{C_h^P}{4} \right) + \sigma^M \sqrt{\pi l} \frac{C_h^M}{4}, \quad (49)$$

для линейных –

$$K_{II} = \sigma^M \sqrt{\pi l} \left(1 + \frac{C_l^M}{4} \right) + \sigma^P \sqrt{\pi l} \frac{C_l^P}{4}. \quad (50)$$

Обычно в литературных источниках выражение для КИН приводится в виде

$$K_{Ih} = K_{Ih}^P + K_{Ih}^M = \sigma^P \sqrt{\pi l} F_h^P(l, \vec{G}) + \sigma^M \sqrt{\pi l} F_h^M(l, \vec{G}) \quad (51)$$

и

$$K_{II} = K_{II}^M + K_{II}^P = \sigma^M \sqrt{\pi l} F_l^M(l, \vec{G}) + \sigma^P \sqrt{\pi l} F_l^P(l, \vec{G}). \quad (52)$$

Приравнивая слагаемые выражений (49) и (51), (50) и (52), получаем соотношения, определяющие искомые коэффициенты:

$$C_h^P = 4(F_h^P(l, \vec{G}) - 1); \quad (53)$$

$$C_h^M = 4F_h^M; \quad (54)$$

$$C_l^M = 4(F_l^M(l, \vec{G}) - 1); \quad (55)$$

$$C_l^P = 4F_l^P. \quad (56)$$

Таким образом, необходимые для определения ПРТ безразмерные КИН F_h^P , F_h^M , F_l^P , F_l^M используем из литературных источников.

2.2. Проверка полученных результатов. Сравним полученные формулы для определения ПРТ с представленными в литературных источниках. Рассмотрим случай действия однородных мембранных напряжений. Полученную формулу (39) и формулу (6) [8] представим в виде

$$A_h^{(0)} = A_0(1 + \Delta), \quad (57)$$

где Δ – добавочная безразмерная ПРТ.

При действии только мембранных напряжений величина Δ , полученная по формуле (39), находится следующим образом:

$$\Delta = \Delta_h^P = C_h^P / 2, \quad (58)$$

коэффициент C_h^P определяется по формуле (53), где значения безразмерного КИН для окружной трещины $F_h^P = C_m$ используем из работы [24], для продольной $F_h^P = A_e$ – из [23] (таблица).

Значения безразмерных КИН для продольной и окружной трещин в цилиндре при действии мембранных и моментных напряжений

λ	C_m для окружной трещины [24]	A_e	a_e	A_b	a_b
		для продольной трещины [23]			
0,2	–	1,0096	0,006161	0,99816	0,00410
1,0	1,0439	1,1993	0,052830	0,96946	0,03359
2,0	1,1496	1,6177	0,103300	0,91936	0,05664
3,0	1,2847	2,1035	0,141000	0,87023	0,06014
4,0	1,4290	2,5999	0,169100	0,82440	0,04700
5,0	1,5715	3,0895	0,190300	0,78616	0,02012

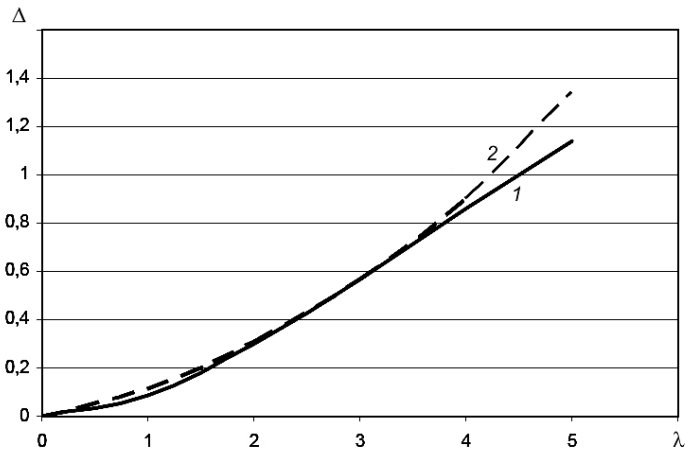


Рис. 2. Сравнение добавочных площадей раскрытия окружной трещины, полученных по формулам (58) – 1 и Тада–Париса – 2.

На рис. 2 приведено сравнение значений добавочных безразмерных площадей раскрытия окружной трещины, полученных по формуле (58) и по методу Тада–Париса (7) [8] при $R_m/t = 9,461$ [13].

На рис. 3 приведено сравнение значений безразмерных площадей раскрытия осевой трещины, полученных по формулам (58) и (8) [9]. Видно, что результаты, полученные при мембранных напряжениях, хорошо совпадают между собой.

При действии глобального изгибающего момента \bar{M}_b (изгиб цилиндра как балки, для обозначения которого используется нижний индекс b) в работе [8] предложено приближенное выражение для определения ПРТ в виде

$$A_b = 2\pi l^2 \frac{\sigma_b}{E} \alpha_b, \quad (59)$$

где α_b определяется по выражению (10), и для малых θ ($\theta < 40^\circ$) можно записать

$$\alpha_b(\theta) = \frac{3 + \cos \theta}{4} \alpha_t \approx \left(1 - \frac{\theta^2}{8}\right) \alpha_t. \quad (60)$$

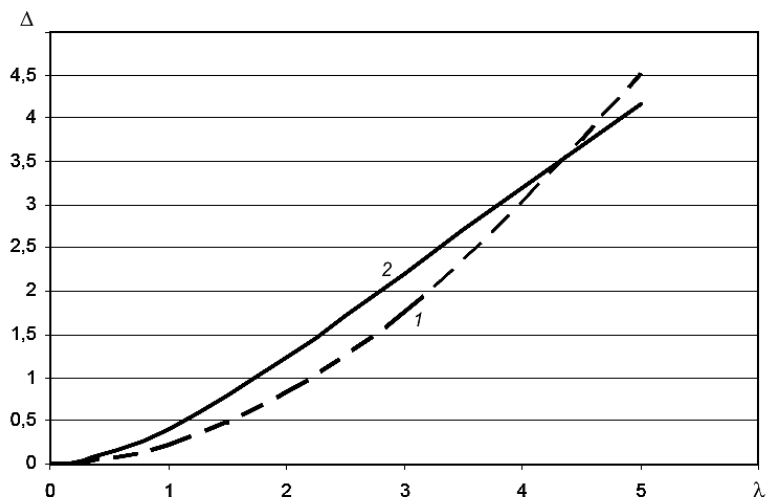


Рис. 3. Сравнение добавочных площадей раскрытия осевой трещины, полученных по формулам (58) – 1 и Кастнера – 2.

Подставляя (7) и (60) в (59), получаем

$$A_b \approx 2\pi l^2 \frac{\sigma_b}{E} \alpha_t \left(1 - \frac{\theta^2}{8}\right). \quad (61)$$

С другой стороны, распределение напряжений по сечению цилиндра-балки дается следующей формулой:

$$\sigma_b = \sigma_b^0 \cos \varphi \approx \sigma_b^0 (1 - \varphi^2/2), \quad (62)$$

где φ обозначает текущую угловую координату, отсчитываемую как θ .

Тогда (62) можно записать в виде

$$\sigma_b = \sigma_b^0 (1 - 0,5(x/l)^2 (l/R)^2), \quad (63)$$

где $x = \varphi R$, т.е. нагрузка представляется как сумма двух компонент – однородной и квадратичной.

Из формул (40) и (43) следует, что $A_h^{(2)} = 0,25A_h^{(0)}$, откуда получаем

$$A_h = A_h^{(0)} - 0,25A_h^{(0)} \cdot 0,5(l/R)^2 = A_h^{(0)} (1 - 0,125(l/R)^2). \quad (64)$$

Сравнение выражения (61) с (64) свидетельствует о совпадении результатов, что представляется интересным аналитическим подтверждением эмпирической формулы Тада–Париса.

2.3. Анализ влияния составляющих раскрытия трещины на ее площадь. Проанализируем влияние отдельных составляющих поля перемещений на ПРТ в случае действия однородных мембранных и изгибных напряжений.

Рассмотрим составляющие формул (39) и (40) и оценим их влияние в зависимости от значений параметра λ . Добавочная безразмерная ПРТ Δ определяется следующим образом:

для однородной составляющей на основании формулы (39)

$$\Delta_h = \Delta_h^P + \frac{\sigma^M}{\sigma^P} \Delta_h^M, \quad (65a)$$

для линейной на основании (40)

$$\Delta_l = \Delta_l^M + \frac{\sigma^P}{\sigma^M} \Delta_l^P, \quad (66a)$$

откуда имеем

$$C_h^P / 2 = \Delta_h^P; \quad C_h^M / 2 = \Delta_h^M; \quad (65b)$$

$$C_l^P / 2 = \Delta_l^P; \quad C_l^M / 2 = \Delta_l^M. \quad (66b)$$

Значения безразмерных КИН при соответствующих условиях нагружения для осевой и окружной трещин используем из литературных источников.

2.3.1. *Осевая трещина.* С учетом определения КИН, принятых в настоящей работе, выражения безразмерных КИН F_h^P , F_h^M , F_l^P , F_l^M для осевой трещины в случае действия мембранных и изгибных напряжений согласно [23] имеют вид

$$F_h^P = A_e; \quad (67)$$

$$F_h^M = \sqrt{(1 - \nu^2) / 3} a_e; \quad (68)$$

$$F_l^M = A_b; \quad (69)$$

$$F_l^P = \frac{3 + \nu}{\sqrt{(1 - \nu^2) / 3}} a_b, \quad (70)$$

где значения A_e , a_e , A_b , a_b представлены в таблице.

На рис. 4 приведены зависимости добавочных площадей раскрытия осевой трещины от значений параметра λ для однородных перемещений Δ_h^P , Δ_h^M в процентах к ПРТ для плоского тела при действии мембранных напряжений и линейных перемещений Δ_l^P , Δ_l^M в процентах к ПРТ для пластины при действии изгибных напряжений.

Из рис. 4,а видно, что основной составляющей ПРТ от однородных перемещений является слагаемое Δ_h^P – добавочная ПРТ при действии мембранных напряжений. Эта добавка при $\lambda = 5$ превышает безразмерную ПРТ для

пластины Гриффитса в четыре раза. Вклад слагаемого Δ_h^M – добавочной ПРТ при действии изгибающего момента зависит от отношения σ^M/σ^P и с ростом значения λ уменьшается. Так, при $1 \leq \lambda \leq 5$ и $\sigma^M/\sigma^P = 1$ он составляет 10...5% вклада Δ_h^P .

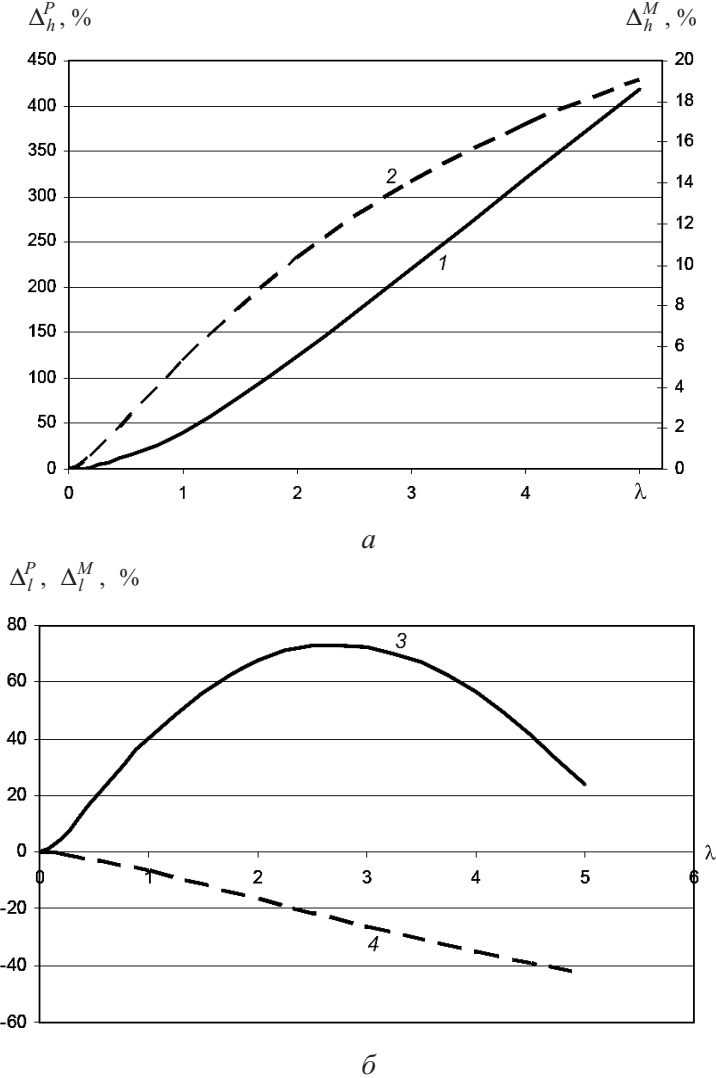


Рис. 4. Добавочные площади раскрытия осевой трещины для однородных ($\Delta_h^P - 1, \Delta_h^M - 2$) – а и линейных ($\Delta_l^P - 3, \Delta_l^M - 4$) – б перемещений при $\sigma^M/\sigma^P = 1$.

На рис. 4,б представлена зависимость добавочных ПРТ от линейных перемещений Δ_l^P и Δ_l^M при действии мембранных и моментных напряжений соответственно. Добавка Δ_l^P зависит от отношения интенсивности прикладываемых напряжений σ^P/σ^M и ее влияние существенно проявляется при значении $\lambda = 3$ (до 72% по сравнению с ПРТ для пластины при $\sigma^P/\sigma^M = 1$).

При нагружении изгибающим моментом кривизна оболочки способствует уменьшению ПРТ. С увеличением значения параметра λ влияние этого эффекта усиливается.

2.3.2. *Окружная трещина.* В работе [25] дано несколько другое, отличное от принятого в настоящей работе, определение напряжений σ_{yy} на линии трещины в непосредственной близости от ее вершины при действии изгибных напряжений:

$$\sigma_{yy} = \frac{2\delta}{h} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (3 + \nu), \quad (71)$$

при действии мембранных напряжений определения совпадают:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{Ih}}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (72)$$

С учетом вышеизложенного безразмерные КИН F_h^P , F_h^M , F_l^P , F_l^M определяются по формулам [25]:

$$F_h^P = 1 + \frac{\pi\lambda^2}{64}; \quad (73)$$

$$F_h^M = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)}{3}} \frac{\lambda^2}{16(3+\nu)(1-\nu)} \left\{ \frac{(1+\nu)}{2} + (1+\nu) \left(\gamma + \ln \frac{\lambda}{8} \right) \right\}; \quad (74)$$

$$F_l^P = \sqrt{\frac{3}{(1-\nu^2)}} \frac{\lambda^2}{16(3+\nu)} \left\{ \frac{(1+\nu)}{2} + (1+\nu) \left(\gamma + \ln \frac{\lambda}{8} \right) \right\}; \quad (75)$$

$$F_l^M = 1 - \frac{5 + 2\nu + \nu^2}{(1-\nu)(3+\nu)} \frac{\pi\lambda^2}{64}, \quad (76)$$

где $\gamma = 0,5768$; $\lambda < 2,5$.

На рис. 5 при $\nu = 0,3$ представлены зависимости добавочных площадей раскрытия окружных трещин от значений параметра λ для однородных перемещений Δ_h^P , Δ_h^M в процентах к ПРТ для плоского тела и линейных перемещений Δ_l^P , Δ_l^M в процентах к ПРТ для пластины.

Из рис. 5,а видно, что, как и для осевой трещины, основной составляющей площади раскрытия окружной трещины является слагаемое Δ_h^P – добавочная ПРТ от однородных перемещений при действии мембранных напряжений. Ее величина примерно в три раза меньше, чем для осевых трещин, и при $\lambda = 2,4$ составляет около 60% ПРТ для плоского тела. Слагаемое Δ_h^M – добавочная ПРТ от однородных перемещений при действии изгибающего момента. При $\sigma^M/\sigma^P = 1$ его вклад добавки относительно Δ_h^P уменьшается с ростом значений λ от 40 до 12% при $1 \leq \lambda \leq 2$.

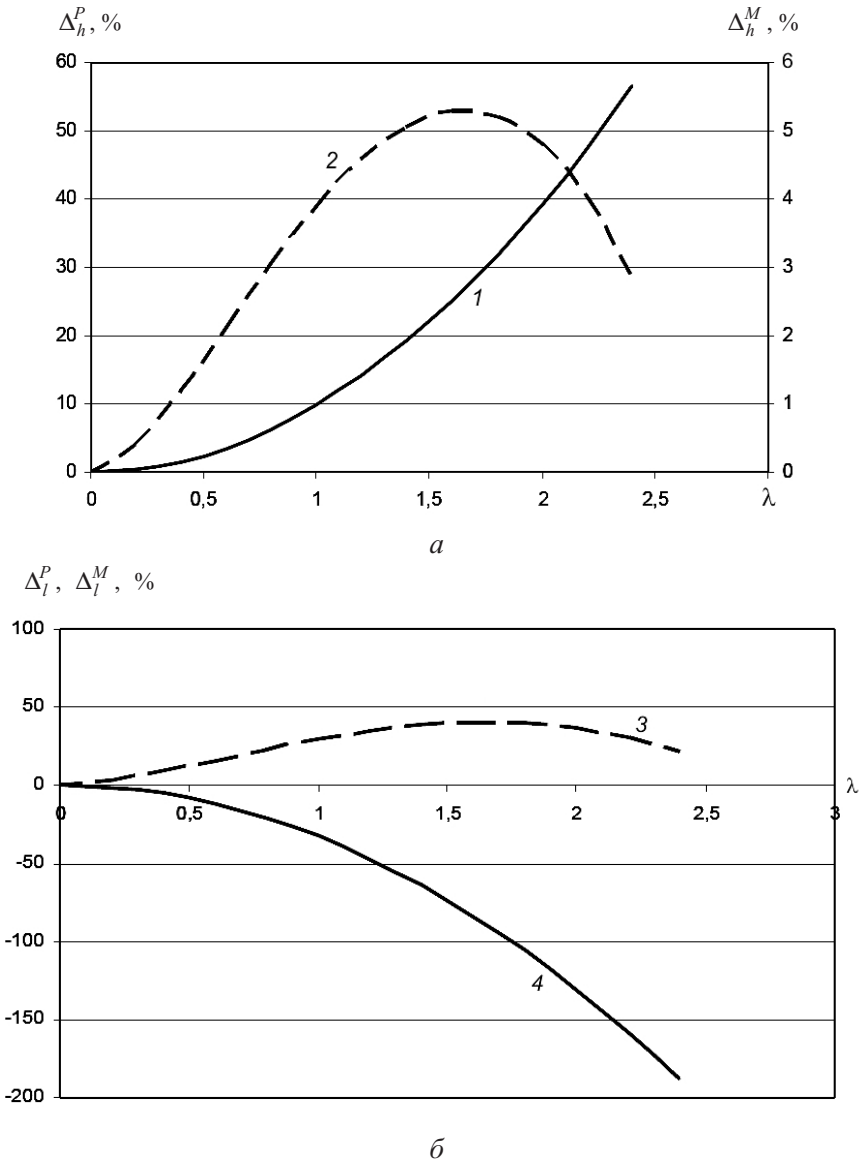


Рис. 5. Добавочные площади раскрытия окружной трещины для однородных ($\Delta_h^P - 1$, $\Delta_h^M - 2$) – а и линейных ($\Delta_l^P - 3$, $\Delta_l^M - 4$) – б перемещений при $\sigma^M/\sigma^P = 1$.

На рис. 5,б слагаемые Δ_l^M и Δ_l^P – добавочная ПРТ от линейных перемещений при действии моментных и мембранных напряжений. Как и для осевых трещин, при нагружении моментом кривизна оболочки способствует уменьшению ПРТ. С увеличением значения λ влияние этого эффекта усиливается. Добавка Δ_l^P зависит от отношения интенсивности прилагаемых напряжений σ^P/σ^M . Вклад добавки Δ_l^M является доминирующим почти для всего диапазона значений λ . Так, при $\sigma^P/\sigma^M = 1$ для $1 \leq \lambda \leq 2,4$ вклад добавки Δ_l^P относительно Δ_l^M уменьшается от 100 до 11%.

Таким образом, в цилиндрических оболочках при определении ПРТ кроме добавок, учитывающих кривизну оболочки от прилагаемых напряжений (мембранные или изгибные), необходимо учитывать добавки от дополнительно возникающих (изгибных или мембранных).

Выводы

1. Получено выражение для фундаментальных перемещений берегов трещины в пластине при действии сосредоточенного момента в двух противоположных точках поверхности трещины.

2. Предложено приближенное фундаментальное выражение для смещений берегов трещины в виде суммы однородных перемещений V_h и линейно изменяющихся перемещений V_l при действии сосредоточенной силы и сосредоточенного момента. Составляющие перемещений записаны в виде суммы фундаментальных перемещений для плоского тела и пластины и добавочных слагаемых заданного вида с неизвестными коэффициентами, подлежащими определению.

3. На основе комбинированного метода весовых функций получены соотношения для определения неизвестных коэффициентов через значения безразмерных КИН для оболочки со сквозной трещиной.

4. Для полиномиального поля напряжений получены общие выражения для смещений берегов трещины и предложены формулы для площади ее раскрытия.

5. Сравнение полученных величин добавочных ПРТ с результатами Кастнера и Тада–Париса для продольной и окружной трещин в цилиндрической оболочке соответственно показало хорошее их согласование.

6. На основе известных результатов определения КИН в цилиндрической оболочке с продольной и поперечной трещинами проанализировано влияние мембранных напряжений на линейные перемещения и, наоборот, изгибных напряжений на однородные перемещения.

Резюме

Площа розкриття наскрізної тріщини в оболонці є одним з основних розрахункових параметрів в концепції “теча перед руйнуванням”. Існуючі методи її визначення, по суті, розглядають оболонку як плоске тіло і не враховують лінійно змінну складову поля переміщень (як у теорії пластин). На основі комбінованого методу вагових функцій запропоновано просту процедуру отримання наближеного виразу для визначення фундаментального поля переміщень внаслідок дії зосереджених сили і моменту на береги тріщини у вигляді суми однорідної та лінійно змінної по товщині стінки складових. Це дозволяє, зокрема, отримати зручні формули для визначення площі розкриття тріщини в поліноміальному полі як мембранных, так і лінійних напружень. Для циліндричної оболонки з поздовжньою та поперечною тріщинами порівнюються отримані величини площі з такими, що є в літературних джерелах. Оцінено внесок лінійної складової в загальну площу розкриття тріщини.

1. *Bueckner H. F.* Field singularities and related integral representation // G. C. Sih (Ed.), *Mechanics of Fracture. Vol. 1: Method of Analysis and Solution of Crack Problems.* – Leyden: Noordhoff, 1973. – P. 131 – 178.
2. *Petroski H. J. and Achenbach J. D.* Computation of the weight function from a stress intensity factor // *Eng. Fract. Mech.* – 1978. – **10**. – P. 257 – 266.
3. *Orynyak I. V. and Borodii M. V.* The combined weight function method application for a hole emanated crack // *Ibid.* – 1994. – **48**, No. 6. – P. 891 – 894.
4. *Орыняк І. В., Бородій М. В.* Використання наближеного фундаментального розв'язку для півплощини з крайовою тріщиною в комбінованому методі вагових функцій // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1994. – **4**. – С. 105 – 108.
5. *Sanders J. L., Jr.* On the Griffith–Erwin fracture theory // *J. Appl. Mech.* – 1960. – **27**. – P. 352 – 353.
6. *Sanders J. L., Jr.* Circumferential through-cracks in cylindrical shells under tension // *Ibid.* – 1982. – **49**. – P. 103 – 107.
7. *Sanders J. L., Jr.* Circumferential through-cracks in a cylindrical shell under combined bending and tension // *Ibid.* – 1983. – **50**. – P. 221.
8. *Paris P. C. and Tada H.* The Application of Fracture Proof Design Methods Using Tearing Instability Theory to Nuclear Piping Postulating Circumferential Through-Wall Crack, NUREG/CR-3464, Nuclear Regulatory Commission.
9. *Kastner W., Rohrich E., Schmitt W., and Steinbuch R.* Critical crack sizes in ductile piping // *Int. J. Press. Vess. Piping.* – 1981. – **9**. – P. 197 – 219.
10. *Zahoor A.* Ductile Fracture Handbook // Report NP-6301-D. – Electric Power Research Institute, 1989.
11. *Bhandari S., Faidy C., and Acker D.* Computation of leak areas of circumferential cracks in piping for application in demonstrating the leak-before-break behaviour // *Nucl. Eng. Design.* – 1992. – **135**. – P. 141 – 149.
12. *Ghosh B., Bandyopadhyay S. K., Lele H. G., and Ghosh A. K.* Estimation of crack opening area for leak before break analysis of nuclear reactor system // *Ibid.* – 2009. – **239**. – P. 327 – 337.
13. *NUREG/CR-6765.* Development of Technical Basis for Leak-Before-Break Evaluation Procedures // Battelle U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, DC 20555-0001, May 2002.
14. *Орыняк І. В., Радченко С. А.* Анализ деформаций гйба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // *Пробл. прочности.* – 2004. – № 3. – С. 23 – 51.
15. *Orynyak I. V. and Radchenko S. A.* Analytical and numerical solution for a elastic pipe bend at in-plane bending with consideration for the end effect // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – **44**. – P. 1488 – 1510.
16. *Леонов М. Я., Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 248 с.

17. *Саврук М. П.* Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие. В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
18. *Меркулов В. А.* Изгиб пластин с разрезами вдоль прямой или дуг окружности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – **3**. – С. 165 – 171.
19. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 496 с.
20. *Мухомелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
21. *Sih G. C., Paris P. C., and Erdogan F.* Crack tip stress intensity factor for plane extension and plate bending problems // J. Appl. Mech. – 1962. – **29**, No. 2. – P. 306 – 312.
22. *Erdogan F. and Ratwani M.* Fracture of cylindrical and spherical shells containing a crack // Nucl. Eng. Design. – 1972. – **20**. – P. 265 – 286.
23. *Erdogan F. and Kibler J. J.* Cylindrical and spherical shells with cracks // Int. J. Fract. Mech. – 1969. – **5**. – P. 229 – 237.
24. *Delale F. and Erdogan F.* Transverse shear effect in a circumferentially cracked cylindrical shell // Quart. Appl. Mathem. – 1979. – **37**. – P. 239 – 258.
25. *Folias E. S.* On the effect of initial curvature on cracked flat sheets // Int. J. Fract. Mech. – 1969. – **5**, No. 4. – P. 327 – 346.

Поступила 10. 02. 2011