УДК 517.948

В. М. Мусаев, канд. физ.-мат. наук (Азерб. пед. ун-т, Баку)

ТЕОРЕМА ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ АРГУМЕНТОМ

Доказана теорема об интегральных неравенствах Вольтерра — Фредгольма с функциональным пределом. С помощью этой теории установлена теорема об интегральных неравенствах с запаздывающим аргументом.

Доведена теорема про інтегральні нерівності типу Вольтерра — Фредгольма з функціональним аргументом. За допомогою цієї теореми встановлена теорема про інтегральні нерівності з запізненням аргументу.

Справедлива следующая лемма.

Лемма [1]. *Пусть непрерывная неотрицательная функция* $v(t)$, $0 \le t \le T$, *удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v_0(t) \le u_0(t) + \int_{t_0}^{\alpha(t)} \mathcal{L}(s) v(s)\,ds,\ t_0 \ge 0, \tag{1}$$

где $u_0(t), \alpha(t)$, $0 \le t \le T$, *— непрерывные неотрицательные функции,* $\mathcal{L}(t)$ *— неотрицательная суммируемая функция на* $[0, T]$. *Предполагается, что* $\alpha(t) \le t$, $\alpha(t_0) = t_0$, $\alpha(t)$ *— непрерывно дифференцируемая функция и* $\alpha'(t) \le 0$, $0 \le t \le T$.

Тогда

$$v(t) = u_0(t) + [\max_{0 \le t \le T} u_0(t)]\left[\exp\left(\int_{t_0}^{\alpha(t)} \mathcal{L}(s)\,ds\right) - 1\right].$$

Пользуясь этой леммой, докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $u_0(t)$ *и* $\alpha(t)$, $0 \le t \le T$, *— непрерывные неотрицательные функции,* $\mathcal{L}_i(t)$, $0 \le t \le T$, $i = 1, 2$, *— неотрицательные суммируемые функции. Кроме того, предположим, что* $\alpha(t) \le t$, $\alpha(t)$ *— непрерывно дифференцируема и* $\alpha'(t) \ge 0$.

Пусть также выполнено условие

$$\mathcal{L}_0 = 1 - \int_0^T \mathcal{L}_2(t) \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\,ds\right) dt > 0.$$

Тогда если положительная непрерывная функция $v(t)$ *удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v(t) \le u_0(t) + \int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s) v(s)\,ds + \int_0^T \mathcal{L}_2(s) v(s)\,ds, \tag{2}$$

то

$$v(t) \le u_0(t) + \left[\max_{0 \le t \le T} u_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\,ds\right) - 1\right] +$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{L}_0} \exp\left(\int_0^T \mathcal{L}_1(s)\,ds\right) \int_0^T \mathcal{L}_2(s)\left\{u_0(s) + \left[\max_{0 \le t \le T} u_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(\theta)\,d\theta\right) - 1\right]\right\} ds.$$

Доказательство. Введя обозначение

$$\tilde{u}_0(t) = u_0(t) + \int_0^T \mathcal{L}_2(s) v(s)\,ds,$$

из (2) имеем

$$v(t) \le \tilde{u}_0(t) + \int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s) v(s)\, ds.$$

Применяя лемму к последнему неравенству, получаем

$$v(t) \le \tilde{u}_0(t) + \left[\max_{0 \le t \le T} \tilde{u}_0(t)\right]\left[\exp \int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\, ds - 1\right],$$

$$v(t) \le u_0(t) + \left[\max_{0 \le t \le T} u_0(t)\right]\left[\exp \int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\, ds - 1\right] + \tag{3}$$

$$+ \exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\, ds\right) \int_0^T \mathcal{L}_2(s) v(s)\, ds.$$

Умножая последнее неравенство на $\mathcal{L}_2(t)$ и интегрируя от 0 до T, имеем

$$\int_0^T \mathcal{L}_2(s) v(s)\, ds \le \int_0^T \mathcal{L}_2(s)\left\{u_0(s) + \left[\max_{0 \le t \le T} u_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(\theta)\, d\theta\right) - 1\right]\right\} ds +$$

$$+ \int_0^T \mathcal{L}_2(s) \exp\left(\int_0^{\alpha(s)} \mathcal{L}_1(\theta)\, d\theta\right) ds \int_0^T \mathcal{L}_2(s) v(s)\, ds.$$

Отсюда с учетом условий теоремы будем иметь

$$\int_0^T \mathcal{L}_2(s) v(s)\, ds \le \frac{1}{\mathcal{L}_0} \int_0^T \mathcal{L}_2(s)\left\{u_0(s) + \left[\max_{0 \le t \le T} u_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_0^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(\theta)\, d\theta\right) - 1\right]\right\} ds.$$

В результате, учитывая последнее неравенство в (3), получаем утверждение теоремы.

Замечание. Допустим, что непрерывная, неотрицательная функция $v(t)$, $0 \le \le t \le T$, удовлетворяет интегральному неравенству

$$v(t) \le u_0(t) + \int_{t_0}^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s) v(s)\, ds + \int_0^{t_0} \mathcal{L}_2(s) v(s)\, ds,\ t_0 \ge 0,$$

а также выполнены условия теоремы 1 с тем лишь отличием, что условие $\mathcal{L}_0 > 0$ заменяется условием

$$M_0 = 1 - \int_0^{t_0} \mathcal{L}_2(t) \exp\left(\int_{t_0}^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\, ds\right) dt > 0,\ t_0 \ge 0.$$

Из доказательства теоремы 1 легко заметить, что выполняется неравенство

$$v(t) = u_0(t) + \left[\max_{0 \le t \le T} u_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_{t_0}^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\, ds\right) - 1\right] +$$

$$+ \frac{1}{M_0} \exp\left(\int_{t_0}^{\alpha(t)} \mathcal{L}_1(s)\, ds\right)\left(\int_0^{t_0} \mathcal{L}_2(s)\left\{u_0(s) + \left[\max_{0 \le t \le T} u_0(s)\right]\left[\exp\left(\int_0^{\alpha(s)} \mathcal{L}_1(\theta)\, d\theta\right) - 1\right]\right\} ds\right).$$

Теорема 2 [2]. *Пусть* $u_0(t)$, $0 \le t \le T$, *— непрерывная неотрицательная функция, а* $\mathcal{L}(t)$, $0 \le t \le T$, *— неотрицательная суммируемая функция. Пусть* *также* $\tau(t)$, $0 \le t \le T$, *— неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция, причем при* $t \ge t_0$, $\tau'(t) \le 1$, *где* $t_0 \ge 0$ *— точка, удовлетворяющая условию* $\tau(t_0) = t_0$, *и уравнение* $t - \tau(t) = \sigma$ *имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение* $t = \gamma(\sigma)$, *причем* $\gamma'(\sigma) > 0$, $-\tau(0) \le t \le T$. *Пусть, далее,* $\beta(t)$, $-\tau(0) \le t \le T$, *— непрерывная неотрицательная функция и справедливо равенство*

$$M = 1 - \int_0^{t_0} \mathcal{L}[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\left[\int_{t_0}^{\sigma-\tau(\sigma)} \mathcal{L}[\gamma(s)]\gamma'(s)\,ds\right]d\sigma > 0.$$

Тогда если неотрицательная непрерывная функция $v(t)$, $0 \le t \le T$, *удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v(t) \le u_0(t) + \int_0^t \mathcal{L}(s)v(s-\tau(s))\,ds,\ 0 \le t \le T,$$
$$v(t) = \beta(t),\ -\tau(0) \le t \le 0, \tag{4}$$

то справедливо соотношение

$$v(t) \le \tilde{u}_0(t) + \left[\max_{0\le t\le T}\tilde{u}_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)} \mathcal{L}[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right) - 1\right] +$$
$$+ \frac{1}{M}\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)} \mathcal{L}[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)\int_0^{t_0} \mathcal{L}[\gamma(s)]\gamma'(s)\Bigg\{u_0(s) +$$
$$+ \left[\max_{0\le t\le T}\tilde{u}_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_{t_0}^{s-\tau(s)} \mathcal{L}[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right) - 1\right]\Bigg\}ds,$$

где $\tilde{u}_0(t) = u_0(t) + \int_0^{t_0} \mathcal{L}(s)\beta(s)\,ds$.

Доказательство почти очевидно. Действительно, из (4) имеем

$$v(t) \le \tilde{u}_0(t) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(s)v(s-\tau(s))\,ds.$$

Обозначая $s - \tau(s) = \sigma$, отсюда получаем

$$v(t) \le \tilde{u}_0(t) + \int_0^{t_0} \overline{\mathcal{L}}(\sigma)v(\sigma)\,d\sigma + \int_{t_0}^{\alpha(t)} \overline{\mathcal{L}}(\sigma)v(\sigma)\,d\sigma,$$

где $\overline{\mathcal{L}}(\sigma) = \mathcal{L}[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)$, $\alpha(t) = t - \tau(t)$.

Очевидно, $\alpha(t) = t - \tau(t)$, $\mathcal{L}_1(\sigma) = \mathcal{L}_2(\sigma) = \overline{\mathcal{L}}(\sigma)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1 с тем лишь отличием, что $\mathcal{L}_0$ заменяется M. Тогда на основании замечания к этой теореме выполняется неравенство

$$v(t) \le \tilde{u}_0(t) + \left[\max_{0\le t\le T}\tilde{u}_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)} \overline{\mathcal{L}}(\sigma)\,d\sigma\right) - 1\right] +$$

$$+\frac{1}{M}\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)}\overline{L}(s)\,ds\right)\int_0^{t_0}\overline{L}(s)\left\{\bar{u}_0(s)+\left[\max_{0\le t\le T}\bar{u}_0(s)\right]\left[\exp\left(\int_{t_0}^{s-\tau(s)}\overline{L}(\theta)\,d\theta\right)-1\right]\right\}ds.$$

Теорема 2 доказана.

С помощью теоремы 2 можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $u_0(t)$, $0\le t\le T$, *— непрерывная неотрицательная функция,* $\mathcal{L}_i(t)$, $0\le t\le T$, $i=1,2$, *— неотрицательные суммируемые функции;* $\tau(t)$ *и* $\beta(t)$ *удовлетворяют всем условиям теоремы 2, а также выполнены условия*

$$\mathcal{L}_0 = 1-\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(t)]\gamma'(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)dt>0,$$

$$\mathcal{L} = 1-\frac{1}{\mathcal{L}_0}\int_0^{t_0}\mathcal{L}_2(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)dt>0.$$

Тогда если неотрицательная непрерывная функция $v(t)$, $0\le t\le T$, *удовлетворяет интегральному неравенству*

$$v(t)\le u_0(t)+\int_0^t\mathcal{L}_1(s)v(s-\tau(s))\,ds+\int_0^T\mathcal{L}_2(s)v(s-\tau(s))\,ds,\ 0\le t\le T,$$

$$v(t)=\beta(t),\ -\tau(0)\le t\le 0,$$

то справедливо неравенство

$$v(t)\le u_0(t)+\left[\max_{0\le t\le T}u_0(t)\right]\left[\frac{1}{\mathcal{L}_0}\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)-1\right]+\frac{1}{\mathcal{L}_0}\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)\times$$

$$\times\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(t)]\gamma'(t)u_0(t)\,dt+\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{L}_0}\exp\left(\int_{t_0}^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(t)]\gamma'(t)\,dt\times$$

$$\times\int_0^T\mathcal{L}_2(t)u_0(t)\,dt+\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{L}_0}\left[\max_{0\le t\le T}u_0(t)\right]\left[\exp\left(\int_0^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)\times\right.$$

$$\times\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(t)]\gamma'(t)\,dt\int_0^T\mathcal{L}_2(t)\left[\frac{1}{\mathcal{L}_0}\exp\left(\int_0^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)-1\right]dt+\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{L}_0^2}\left(\int_0^{t-\tau(t)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(s)]\gamma'(s)\,ds\times$$

$$\times\int_0^{t_0}\mathcal{L}_1[\gamma(t)]\gamma'(t)\,u_0(t)\,dt\int_0^t\mathcal{L}_2(s)\exp\left(\int_{t_0}^{s-\tau(s)}\mathcal{L}_1[\gamma(\sigma)]\gamma'(\sigma)\,d\sigma\right)ds.$$

1. *Филатов А. Н., Шаров Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 150 с.
2. *Мамедов Я. Д., Аширов С., Атдаев С.* Теоремы о неравенствах.– Ашхабад: Илым, 1980.– 230 с.

Получено 11. 04. 91