УДК 517.929.4

**О. И. Стадник,** асп.,
**Д. Я. Хусаинов,** д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

# ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РАССИНХРОНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются линейные разностные системы с запаздыванием. Получены достаточные условия устойчивости и вычислены коэффициенты экспоненциального затухания решений. Используется второй метод А. М. Ляпунова с условием Б.С. Разумихина.

Розглядаются лінійні різницеві рівняння з запізненням. Одержані достатні умови стійкості та обчислені коефіцієнти експоненційного згасання розв'язків. Використовується другий метод О. М. Ляпунова з умовою Б. С. Разуміхіна.

Рассмотрим линейную стационарную систему, состояние которой описывается векторной функцией $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}^T$. Состояние системы меняется скачкообразно в дискретные моменты времени $t_k$, $k = 0,1, \ldots$ . Система называется синхронизованной, если все компоненты переключаются одновременно, в противном случае — система рассинхронизована [1, 2]. Если система синхронизована, то обычно $t_k = kh$, $k = 1, 2, \ldots$ . Если $t_k = kh + \tau$, то система рассинхронизована по частоте. Пусть синхронизованная система имеет вид

$$x(t_{k+1}) = (A + \sum_{j=1}^{m} B_j)x(t_k),\ k = 0,1, \ldots .$$

Рассинхронизации подвержены члены, определяемые суммой, т. е. рассинхронизованной системой будет

$$x(t_{k+1}) = Ax(t_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j x(t_{k-j}),\ k = 0, 1, \ldots . \tag{1}$$

Будем рассматривать ее как разностную систему с запаздыванием, начальные условия которой заданы в точках $x(t_{-m})$, $x(t_{-m+1})$, ..., $x(t_0)$. Для исследования устойчивости и вычисления коэффициентов сходимости решений воспользуемся вторым методом А. М. Ляпунова. При оценке знака первой разности используем условия Б. С. Разумихина [3,4]. Преобразуем систему (1) к виду

$$x(t_{k+1}) = \tilde{A}x(t_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j \tilde{x}(t_{k-j}), \tag{2}$$

где $\tilde{A} = A + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j B_j$, $\tilde{x}(t_{k-j}) = x(t_{k-j}) - \lambda_j x(t_k)$, $0 \le \lambda_j \le 1$, $j = \overline{1, m}$ — фиксированные постоянные величины. При таком представлении выделяется „модельная" часть системы $x(t_{k+1}) = \tilde{A}x(t_k)$, имеющая „запас" устойчивости, и „невязка" — $\sum_{j=1}^{m} B_j \tilde{x}(t_{k-j})$, которая в каком-то смысле должна быть малой. Для линейных стационарных систем естественно брать квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^T H x$, симметричная положительно определенная матрица $H$ которой определяется при решении матричного разностного уравнения Ляпунова

$$\tilde{A}^T H \tilde{A} - H = -C, \tag{3}$$

где $C$ — произвольная положительно определенная матрица.

Для функции $v(x)$ справедливы неравенства

$$\lambda_{\min}(H)\,|x|^2 \le v(x) \le \lambda_{\max}(H)\,|x|^2, \tag{4}$$

$\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа матриц. Под векторной и матричной нормами будем понимать следующее: $|x| = \{ \sum_{j=1}^{m} x_i^2 \}^{1/2}$, $|A| = \{\lambda_{\max} : (A^T A)\}^{1/2}$. Обозначим через $\partial v^\alpha$ поверхность уровня функции Ляпунова $v(x) = x^T H x$, а через $v^\alpha$ область, содержащуюся внутри нее, т.е. $\partial v^\alpha = \{x: x^T H x = \alpha\}$, $v^\alpha = \{x : x^T H x < \alpha\}$.

**Теорема 1.** *Пусть существуют положительно определенная матрица $H$ и постоянные $0 \le \lambda_j \le 1$, $j = \overline{1, n}$, при которых выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min}(H - \tilde{A}^T H \tilde{A}) - L(H) > 0, \tag{5}$$

*где*

$$L(H) = \sum_{j=1}^{m} [2 \,|\, \tilde{A}^T H B_j \,| + \sum_{j=1}^{m} |\, B_i^T H B_j \,|\, R(H) \sqrt{\varphi(H)}\,]\, R(H) \sqrt{\varphi(H)},$$

$$R(H) = \{|\,E - \lambda_1 A_1\,| + \lambda_1 \sum_{s=1}^{m} |\,B_s| + \sum_{j=2}^{m} [\lambda_j |A\,| + |\,E - \lambda_j B_{j-1}\,| + \lambda_j \sum_{\substack{s=1,\\ s\ne j-1}}^{m} |\,B_s|]\}. \tag{6}$$

*Тогда система* (1) *асимптотически устойчива. Причем для произвольного решения* $x(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ *будет выполнятся* $|x(t_k)| < \varepsilon$, *лишь только* $\| x(t_0) \| < \delta(\varepsilon)$, *где*

$$\| x(t_0) \| = \max_{k=\overline{0,m}} \{|\,x(t_{-k})\,|\},$$

$$\delta(\varepsilon) = (|A| + \sum_{j=1}^{m} |B_j|)^{-1}\, \varepsilon \Big/ \sqrt{\varphi(H)},\ \varphi(H) = \lambda_{\max}(H) \big/ \lambda_{\min}(H). \tag{7}$$

***Доказательство*** . Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$\delta(\varepsilon) = (|A| + \sum_{j=1}^{m} |B_j|)^{-1}\, \varepsilon \Big/ \sqrt{\varphi(H)},\ \alpha = \varepsilon^2 \lambda_{\min}(H).$$

В этом случае область $v^\alpha$ содержится в $\varepsilon$-окрестности положения равновесия. Рассмотрим решение $x(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\| x(t_0) \| < \delta(\varepsilon)$. Как следует из выбора $\delta(\varepsilon)$, $x(t_1) \in v^\alpha$. Покажем, что это сохранится и при $k > 1$, а тогда решение $x(t_k)$ не выйдет из $\varepsilon$-окрестности начала координат. Пусть это не так и при $k = N > 1$ происходит первый выход решения $x(t_k)$ из области $v^\alpha$, т. е. $x(t_n) \notin v^\alpha$. Тогда, учитывая неравенства (4), при $k < N$ получаем

$$\lambda_{\min}(H)\, |\, x(t_k)\,|^2 \le v(x(t_k) < v(x(t_N)) \le \lambda_{\max}(H)\, |\, x(t_N)\,|^2.$$

Отсюда следует

$$|\, x(t_k)\,| < \sqrt{\varphi(H)}\, |\, x(t_N)\,|,\ \varphi(H) = \lambda_{\max}(H) \,/\, \lambda_{\min}(H). \tag{8}$$

Рассмотрим первую разность функции Ляпунова $v(x) = x^T H x$. В силу (2)

$$\Delta v(x(t_k)) = [\tilde{A} x(t_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j\, \tilde{x}(t_{k-j})]^T H\, [\tilde{A} x(t_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j\, \tilde{x}(t_{k-j})] -$$

$$- x^T(t_k) H x(t_k) = -x^T(t_k) C x(t_k) + 2 x^T(t_k) \sum_{j=1}^{m} \tilde{A}^T H B_j\, \tilde{x}(t_{k-j}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\tilde{x}^T(t_{k-i})B_i^T HB_j\tilde{x}(t_{k-j}).$$

Как следует из вида системы (1),

$$\tilde{x}(t_{k-j}) = x(t_{k-j}) - \lambda_j[Ax(t_{k-1}) + \sum_{s=1}^{m} B_s x(t_{k-1-s})].$$

Поэтому, используя (8), при $j = 1$ получаем

$$\tilde{x}(t_{k-1}) = (E - \lambda_1 A_1)x(t_{k-1}) - \lambda_1\sum_{s=1}^{m} B_s x(t_{k-1-s}),$$

а при $j = 2, 3, \ldots, m$

$$\tilde{x}(t_{k-j}) = -\lambda_j Ax(t_{k-1}) + (E - \lambda_j B_{j-1})x(t_{k-j}) - \lambda_j \sum_{\substack{s=1,\\ s\neq j-1}}^{m} B_s x(t_{k-1-s}).$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{m} |\tilde{x}(t_{k-j})| \le \{|E - \lambda_1 A_1| + \lambda_1\sum_{s=1}^{m}|B_s| + \sum_{j=2}^{m}[\lambda_j|A| + |E - \lambda_j B_{j-1}| +$$

$$+\lambda_j\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq j-1}}^{m}|B_s|]\}\sqrt{\varphi(H)}\,|x(t_N)|.$$

Учитывая это, для первой разности функции Ляпунова имеем

$$\Delta v(x(t_N)) \le -\{\lambda_{\min}(C) - 2\sum_{j=1}^{m}|\tilde{A}^T HB_j|R(H)\sqrt{\varphi(H)} - \sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|B_i^T HB_j|\times$$

$$\times(R(H)\sqrt{\varphi(H)})^2\}\,|x(t_N)|^2,$$

где

$$R(H) = \{|E - \lambda_1 A_1| + \lambda_1\sum_{s=1}^{m}|B_s| + \sum_{j=2}^{m}[\lambda_j|A| + |E - \lambda_j B_{j-1}| + \lambda_j\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq j-1}}^{m}|B_s|]\}.$$

Если выполняется условие (5), (6), то первая разность функции Ляпунова отрицательно определена, что означает асимптотическую устойчивость системы (1). Покажем, что условие (5), (6) обеспечивает экспоненциальное затухание решений рассинхронизованных систем, т. е. существуют постоянные $M > 0$, $\gamma > 1$, при которых справедливо неравенство $|x(t_k)| \le M\,\|x(t_0)\|\,\gamma^{-k/2}$, $k = 1, 2, \ldots$ .

При исследовании будем использовать неавтономную функцию Ляпунова $v(x, k) = \gamma^k x^T H x$, где $H$ — решение уравнения (3), $\gamma > 1$ — постоянная, которую выберем в дальнейшем. Рассмотрим расширенное фазовое пространство переменных $(x, k)$, $x \in R^n$, $k = -m, -m+1, \ldots, 0, 1, \ldots$ , и обозначим в нем через $\partial v_\gamma^\alpha$ поверхность уровня функции Ляпунова $v(x, k)$, а через $v_\gamma^\alpha$ область, ограниченную этой поверхностью, т. е.

$$\partial v_\gamma^\alpha = \{(x, k)\colon \gamma^k x^T Hx = \alpha\},\ v_\gamma^\alpha = \{(x, k)\colon \gamma^k x^T Hx < \alpha\}.$$

Для функции $v(x, k)$ будет справедливым

$$\gamma^k\lambda_{\min}(H)\,|x|^2 \le v(x, k) \le \gamma^k\lambda_{\max}(H)\,|x|^2 . \tag{9}$$

**Теорема 2.** *Пусть существуют положительно определенная матрица* $H$ *и постоянные* $0 \le \lambda_j \le 1$, $j = \overline{1, m}$, *при которых выполняется* (5), (6). *Тогда для решений* $x(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *системы* (1) *справедлива экспоненциальная оценка*

$$|x(t_k)| < \sqrt{\varphi(H)}\,(|A| + \sum_{j=1}^{m} |B_j|)\,\|x(t_0)\|\,\gamma^{-k/2}, \tag{10}$$

*где*

$$\gamma = \frac{[\lambda_{\min}(C) - L(H)]\,\gamma_1 - |\tilde{A}^T H \tilde{A}|(1-\gamma_1)}{\lambda_{\min}(C) - L(H) - |\tilde{A}^T H \tilde{A}|(1-\gamma_1)},$$

$$\gamma_1 = \left\{\left[\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\tilde{A}^T HB_j\right|\right)^2 + \lambda_{\min}(C)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|B_i^T HB_j\right|} - \right.\right. \tag{11}$$

$$\left.\left. - \sum_{j=1}^{m}\left|\tilde{A}^T HB_j\right|\right] \Big/ R(H)\sqrt{\varphi(H)}\right\}^{1/(m+1)}.$$

***Доказательство*** . Пусть $x(t_k)$ — произвольное решение системы (1), удовлетворяющее $\|x(t_0)\| < \delta$ . Тогда $(x(t_k), k) \in v_\gamma^\alpha$, $k = -m, -m+1, \ldots, 0, 1, \ldots$, где $\alpha = [|A| + \sum_{j=1}^{m} |B_j|]^2 \delta^2 \lambda_{\max}(H)$, $\gamma > 1$ — произвольная постоянная. И, как следует из неравенств (9),

$$|x(t_k)| < \sqrt{\alpha / \lambda_{\min}(H)}\,\gamma^{-k/2} = \sqrt{\varphi(H)}\,\varphi(H)\left(|A| + \sum_{j=1}^{m}|B_j|\right)\delta\gamma^{-k/2}. \tag{12}$$

Покажем, что найдется $\gamma > 1$ , при котором это неравенство сохранится и при $k = 2, 3, \ldots$ . Пусть, от противного, это не так и нашлось $N > 1$ такое, что $(x(t_N), N) \notin v_\gamma^\alpha$ . Тогда, как следует из (9), и допущения теоремы

$$\gamma^k \lambda_{\min}(H)|x(t_k)|^2 \le v(x(t_k), k) < v(x(t_N), N) \le \gamma^k \lambda_{\max}(H)|x(t_N)|^2, \; k < N.$$

Отсюда получаем

$$|x(t_k)| < \sqrt{\varphi(H)}\,\gamma^{(N-k)/2}|x(t_N)|, \; k < N. \tag{13}$$

Рассмотрим первую разность функции Ляпунова $v(x, k)$ в силу системы (2):

$$\Delta v(x(t_k), k) = \gamma^{k+1}\left[\tilde{A}x(t_k) + \sum_{j=1}^{m} B_j \tilde{x}(t_{k-j})\right]^T H\Big[\tilde{A}x(t_k) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} B_j \tilde{x}(t_{k-j})\Big] - \gamma^k x^T(t_k) H x(t_k) = \gamma^k\Big\{x^T(t_k)\big[\tilde{A}^T HA - H\big]x(t_k) +$$

$$+ (\gamma - 1)x^T(t_k)\tilde{A}^T H\tilde{A}\,x(t_k) + 2\gamma x^T(t_k)\sum_{j=1}^{m}\tilde{A}^T HB_j \tilde{x}(t_{k-j}) +$$

$$+ \gamma\left[\sum_{i=1}^{m} B_i \tilde{x}(t_{k-i})\right]^T H\left[\sum_{j=1}^{m} B_j \tilde{x}(t_{k-j})\right]\Big\}.$$

Или, используя неравенство (13), при $k = N$ получаем

$$\Delta v(x(t_N), N) \le -\gamma^N\Big\{\lambda_{\min}(C) - (\gamma - 1)\left|\tilde{A}^T H\tilde{A}\right| - \gamma\sum_{j=1}^{m} 2\left|\tilde{A}^T HB_j\right| \times$$

$$\times R(H)\gamma^j\sqrt{\varphi(H)} - \gamma\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|B_i^T HB_j\right| R^2(H)\gamma^{i+j}\varphi(H)\Big\}\left|x(t_N)\right|^2.$$

Выберем $\gamma > 1$ таким образом, чтобы выполнялось

$$\beta(\gamma) = \lambda_{\min}(C) - (\gamma - 1)\left|\bar{A}^T H\bar{A}\right| - \gamma\sum_{j=1}^{m}\left[2\left|\bar{A}^T HB_j\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m}\left|B_i^T HB_j\right| R(H)\gamma^i\sqrt{\varphi(H)}\right] R(H)\gamma^j\sqrt{\varphi(H)} > 0. \qquad (14)$$

При $\gamma_0 = 1$ неравенство (14) выполняется. При этом оно переходит в (5), (6). Поэтому в силу непрерывности $\beta(\gamma) > 0$ и при некотором $\gamma > 1$. Рассмотрим усиленное неравенство

$$\lambda_{\min}(C) - 2\sum_{j=1}^{m}\left|\bar{A}^T HB_j\right| R(H)\sqrt{\varphi(H)}\,\gamma^{m+1} -$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|B_i^T HB_j\right|\left(R(H)\sqrt{\varphi(H)}\gamma^{m+1}\right)^2 > (\gamma - 1)\left|\bar{A}^T H\bar{A}\right|. \qquad (15)$$

Если найдется $\gamma > 1$, при котором будет выполняться (15), то неравенство (14) при этом $\gamma$ будет выполняться тем более. Левая часть неравенства (15) представляет собой функцию, равную $\lambda_{\min}(C) - L(H)$ при $\gamma_0 = 1$ и монотонно убывающую при $\gamma > 1$. Заменим ее на отрезке $\gamma_0 \le \gamma \le \gamma_1$, где $\gamma_1$ находится из условия равенства нулю левой части, отрезком прямой. При $\gamma_0 \le \gamma \le \gamma_1$ получаем

$$\lambda_{\min}(C) - 2\sum_{j=1}^{m}\left|\bar{A}^T HB_j\right| R(H)\sqrt{\varphi(H)}\,\gamma^{m+1} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|B_i^T HB_j\right| \times$$

$$\times \left(R(H)\sqrt{\varphi(H)}\,\gamma^{m+1}\right)^2 > \left[\lambda_{\min}(C) - L(H)\right]\frac{\gamma - \gamma_1}{1 - \gamma_1},$$

где

$$\gamma_1 = \left\{\left[\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\bar{A}^T HB_j\right|\right)^2 + \lambda_{\min}(C)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left|B_i^T HB_j\right|} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=1}^{m}\left|\bar{A}^T HB_j\right|\right] \Big/ R(H)\sqrt{\varphi(H)}\right\}^{1/(m+1)}.$$

Величину $\gamma$ найдем при решении уравнения

$$\left[\gamma_{\min}(C) - L(H)\right]\frac{\gamma - \gamma_1}{1 - \gamma_1} = (\gamma - 1)\left|\bar{A}^T H\bar{A}\right|,$$

т. е.

$$\gamma = \frac{\left[\gamma_{\min}(C) - L(H)\right]\gamma_1 - \left|\bar{A}^T H\bar{A}\right|(1 - \gamma_1)}{\gamma_{\min}(C) - L(H) - \left|\bar{A}^T H\bar{A}\right|(1 - \gamma_1)}.$$

Таким образом получили $\gamma$, при котором $\beta(\gamma) > 0$. Следовательно, допущение $(x(t_N), N) \notin v_\gamma^\alpha$ неверно и $(x(t_k), k) \in v_\gamma^\alpha$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. А тогда справедливо неравенство (12), т. е. (10), (11).

1. *Клепцын А. Ф., Козякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А.* О влиянии малой рассинхронизации на устойчивость сложных систем. I, II // Автоматика и телемеханика. – 1983. – № 7. – С. 44 – 50; 1984. – № 3. – С. 42 – 47.
2. *Клепцын А. Ф., Козякин В. С., Красносельский М. А., Кузнецов Н. А.* Устойчивость рассинхронизованных систем // Докл. АН СССР. – 1984. – **247**, № 5. – С. 1053 – 1056.
3. *Разумихин Б. С.* Устойчивость эредитарных систем.– Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991. – 92 с.
4. *Прасолов А. В.* Математические модели управления – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1991 – 92с.

Получено 05.07.91