УДК 517. 944 : 519. 46

В. И. Фущич, чл.-корр. АН Украины,
Н. И. Серов, канд. физ.-мат. наук,
Т. К. Амеров, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

НЕЛОКАЛЬНЫЕ АНЗАЦЫ И РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Нелинейная система теплопроводности нелокальной подстановкой сведена к скалярному нелинейному уравнению теплопроводности. Лиевская и условная инвариантность скалярного уравнения использована для нахождения нелокальных анзацев, которые редуцируют исходную систему к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Нелінійна система теплопровідності нелокальною підстановкою зведена до скалярного нелінійного рівняння теплопровідності. Лієвська і умовна інваріантність скалярного рівняння використана для знаходження нелокальных анзаців, які редукують вихідну систему до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} u_0 &= f(v)\, u_{11}, \\ v_0 &= u_{11}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$, $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, $v_0 = \partial v / \partial x_0$, $u_0 = \partial u / \partial x_0$, $u_{11} = \partial^2 u / \partial x_1^2$, которая часто встречается в теории тепломассопереноса. Нелокальная замена

$$\begin{aligned} u &= w_0, \\ v &= w_{11} \end{aligned} \tag{2}$$

сводит систему (1) к одному уравнению

$$w_{00} = f(w_{11})\, w_{110}. \tag{3}$$

Проинтегрировав (3) по x_0, будем иметь

$$w_0 = F(w_{11}), \tag{4}$$

где F — первообразная функции f. Дважды продифференцировав (4) по x_1, получим

$$w_{001} = \partial_1 (f(w_{11})\, w_{111}). \tag{5}$$

После замены

$$w_{11} = z \tag{6}$$

имеем уравнение

$$z_0 = \partial_1 (f(z)\, z_1). \tag{7}$$

Таким образом, система уравнений (1) свелась к нелинейному уравнению диффузии (7).

Лиевская симметрия уравнения (7) исчерпывающе изучена Л. В. Овсянниковым [1], а условная симметрия (7) исследована в [2, 3]. В настоящей статье приведены лиевские анзацы, редуцирующие уравнение (7) к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Путем преобразования лиевских и некоторых нелиевских анзацев, посредством замен (2) и (6), описаны нелокальные анзацы, редуцирующие систему (1) к системе ОДУ. Построены семейства точных решений системы (1).

С использованием лиевской симметрии получены следующие неэквивалентные анзацы для уравнения (7).

А. $f(z)$ — произвольная гладкая функция:

$$z = \varphi(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-1/2};$$
$$z = \varphi(\omega), \quad \omega = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1. \tag{8}$$

Б. $f(z) = e^z$:

$$z = \varphi(\omega) + (2 + \lambda^{-1}) \ln x_1, \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$
$$z = \varphi(\omega) + \lambda^{-1} x_1, \quad \omega = x_1 + \lambda \ln x_0;$$
$$z = \varphi(\omega) - \ln x_0, \quad \omega = x_1; \tag{9}$$
$$z = \varphi(\omega) + 2 \ln x_1, \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};$$
$$z = \varphi(\omega) + \ln x_1, \quad \omega = x_0.$$

С. $f(z) = z^k$, k — произвольная постоянная, отличная от нуля:

$$z = \varphi(\omega)\, x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)}, \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_0^{-1/k}, \quad \omega = x_1 + \lambda_1 \ln x_0;$$
$$z = \varphi(\omega)\, e^{-\frac{2\lambda}{k} x_0}, \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0}; \tag{10}$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_1^{2/k}, \quad \omega = x_0.$$

Д. $f(z) = z^{-4/3}$:

$$z = \varphi(\omega)\left(x_1^2 + \lambda_1\right)^{-3/2}, \quad \omega = x_0;$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_1^{-3/2}, \quad \omega = x_0;$$
$$z = \varphi(\omega)\left(x_1^2 + \alpha^2\right)^{-3/2}, \quad \omega = x_0 + \lambda \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha};$$
$$z = \varphi(\omega)\left(x_1^2 - \alpha^2\right)^{-3/2}, \quad \omega = x_0 + \lambda \operatorname{Arth} \frac{x_1}{\alpha};$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_1^{-3}, \quad \omega = \lambda x_0 + x_1^{-1};$$
$$z = \varphi(\omega)\, e^{\frac{3}{2}\lambda x_0}, \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0}; \tag{11}$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_0^{3/4}\left(x_1^2 + \alpha^2\right)^{-3/2}, \quad \omega = x_0\, e^{\lambda \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha}};$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_0^{3/4}\left(x_1^2 - \alpha^2\right)^{-3/2}, \quad \omega = x_0\, e^{\lambda \operatorname{Arth} \frac{x_1}{\alpha}};$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_0^{3/4}\, x_1^{-3}, \quad \omega = \lambda \ln x_0 + x_1^{-1};$$
$$z = \varphi(\omega)\, x_0^{\frac{3}{2}\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}, \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$

где $\lambda_0 = \text{const}$, $\lambda_1 = \text{const}$, $\lambda_0 = \text{const} \neq 0$, $\alpha = \text{const} \neq 0$. Некоторые из анзацев (8) – (11) посредством преобразований (6) и (2) преобразуются в нелокальные анзацы для системы (1).

А. $f(v)$ — произвольная гладкая функция:

1) $$u = \varphi^1(\omega) - \frac{\omega}{2}\dot{\varphi}^1(\omega) + x_1 \varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = \ddot{\varphi}^1(\omega); \quad \omega = x_1\, x_0^{-1/2};$$

2) $$u = \frac{\lambda_0}{\lambda_1^2}\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = \dot\varphi^1(\omega); \quad \omega = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1;$$

3) $$u = \frac{\dot\varphi^1(x_0)}{2}x_1^2 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = \varphi^1(x_0).$$

Б. $f(v) = e^v$:

4) $$u = -2\lambda\, x_0^{-2\lambda-1}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 x_0^{-\lambda-1}\dot\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0)\,x_1 + \varphi^3(x_0);$$
$$v = (2+\lambda^{-1})\ln x_1 + \ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$

5) $$u = \lambda\,\varphi^1(\omega)\,x_0^{-1} + \varphi^2(x_0)\,x_1 + \varphi^3(x_0);$$
$$v = x_1\lambda^{-1} + \dot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 + \lambda\ln x_0;$$

6) $$u = -\frac{1}{2x_0}x_1^2 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = -\ln x_0 + \varphi^1(x_1);$$

7) $$u = -2\lambda\, e^{-2\lambda x_0}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 e^{-\lambda x_0}\dot\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = 2\ln x_1 + \ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};$$

8) $$u = \frac{x_1^2}{2}\dot\varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = \ln x_1 + \varphi^1(x_0).$$

С. $f = v^k$, k — произвольная постоянная ($k \neq 0$):

9) $$u = \left(-\frac{1}{k}(2\lambda+1) - 2\lambda\right) x_0^{-(2\lambda+1)(\frac{1}{k}+1)}\varphi^1(\omega) + x_1\lambda x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-\lambda-1}\dot\varphi^1(\omega) +$$
$$+ x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)}\ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$

10) $$u = x_0^{-(1/k)-1}\left(-\frac{1}{k}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot\varphi^1(\omega)\right) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = x_0^{-1/k}\ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 + \lambda\ln x_0;$$

11) $$u = -\frac{1}{k}x_0^{-(1/k)-1}\varphi^1(x_1) + \varphi^2(x_0)\,x_1 + \varphi^3(x_0);$$
$$v = x_0^{-1/k}\ddot\varphi^1(x_1);$$

12) $$u = -2\lambda\left(\frac{1}{k}+1\right)e^{2\lambda((1/k)+1)x_0}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 e^{-\lambda((2/k)+1)x_0}\dot\varphi^1(\omega) +$$
$$+ x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$
$$v = e^{-\frac{2\lambda}{k}x_0}\ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 e^{\lambda x_0};$$

13) $$u = -\dot{\varphi}^1(x_0)\ln x_1 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \varphi^1(x_0)\,x_1^{-2},\ \ k = -1;$$

14) $$u = \dot{\varphi}^1(x_0)[x_1\ln x_1 - x_1] + \varphi^2(x_0)\,x_1 + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \varphi^1(x_0)\,x_1^{-1},\ \ k = -2;$$

15) $$u = \dot{\varphi}^1(x_0)\frac{k^2}{(2+k)(2+2k)}x_1^{\frac{2+2k}{k}} + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \varphi^1(x_0)\ x_1^{2/k},\ \ k \neq 0; -1; -2.$$

Д. $f(v) = v^{-4/3}$:

16) $$u = \frac{1}{\lambda^2}\left(x_1^2 + \lambda^2\right)^{1/2}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \left(x_1^2 + \lambda^2\right)^{-3/2}\varphi^1(x_0);$$

17) $$u = -\lambda^{-2}\left(x_1^2 - \lambda^2\right)^{1/2}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \left(x_1^2 - \lambda^2\right)^{-3/2}\varphi^1(x_0);$$

18) $$u = \frac{1}{2x_1}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = x_1^{-3}\varphi^1(x_0);$$

19) $$u = -4\,x_1^{1/2}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = x_1^{-3/2}\varphi^1(x_0);$$

20) $$u = \frac{x_1^2}{2}\dot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \varphi^1(x_0);$$

21) $$u = \lambda\,x_1\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = x_1^{-3}\dot{\varphi}^1(\omega),\ \ \omega = \lambda\,x_0 + \frac{1}{x_1};$$

22) $$u = -\frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda}{2}x_0}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 e^{\frac{\lambda}{2}x_0}\dot{\varphi}^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = e^{\frac{3}{2}\lambda x_0}\ddot{\varphi}^1(\omega),\ \ \omega = x_1 e^{\lambda x_0};$$

23) $$u = x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \varphi^1(x_1);$$

24) $$u = x_1 x_0^{-1/4}\left[\frac{3}{4}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot{\varphi}^1(\omega)\right] + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = x_0^{3/4}\,x_1^{-3}\,\ddot{\varphi}^1(\omega),\ \ \omega = \lambda\ln x_0 + \frac{1}{x_1};$$

25) $$u = \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{4}\right) x_0^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} \varphi^1(\omega) + \lambda x_1 x_0^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}} \dot\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = x_0^{\frac{3}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$

26) $$u = x_0^{-1/4} \left[\frac{3}{4}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot\varphi^1(\omega)\right] + \varphi^2(x_0)\, x_1 + \varphi^3(x_0);$$

$$v = x_0^{3/4}\ \ddot\varphi^1(\omega), \quad \omega = \lambda \ln x_0 + x_1;$$

27) $$u = \frac{3}{4} x_0^{-1/4}\ \varphi^1(x_1) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0);$$

$$v = \ddot\varphi^1(x_1)\, x_0^{3/4},$$

где $\lambda_0 = \text{const}$, $\lambda_1 = \text{const}$, $\lambda_0 = \text{const} \neq 0$; φ^1, φ^2, φ^3 — произвольные гладкие функции; $\dot\varphi^1(\omega) = d\varphi^1 / d\omega$, $\ddot\varphi^1(\omega) = d^2\varphi^1 / d\omega^2$. Выписанные выше нелиевские анзацы редуцируют (1) к следующим системам ОДУ:

1) $$\frac{1}{4}\omega^2\ddot\varphi^1(\omega) - \frac{1}{4}\omega\dot\varphi^1(\omega) + \frac{1}{2}f(\ddot\varphi^1(\omega))\,\omega\dddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0;$$

$$\dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-3/2};$$

$$\dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-1};$$

2) $$\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\dot\varphi^1(\omega) - f(\dot\varphi^1(\omega))\,\lambda_0\ddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0;$$

$$\dot\varphi^2(x_0) = \lambda_1 c_1;$$

$$\dot\varphi^3(x_0) = \lambda_0 c_1 x_0 + c_2;$$

3) $$\ddot\varphi^1(x_0) = 0;$$

$$\dot\varphi^2(x_0) = 0;$$

$$\dot\varphi^3(x_0) = f(\varphi^1(x_0))\,\dot\varphi^1(x_0);$$

4) $$2\lambda(2\lambda + 1)\varphi^1(\omega) - (3\lambda^2 + \lambda)\,\omega\dot\varphi^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot\varphi^1(\omega) -$$

$$-\lambda\omega^{3+\frac{1}{\lambda}} e^{\ddot\varphi^1(\omega)}\,\dddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0;$$

$$\dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-\lambda-2};$$

$$\dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-2\lambda-2};$$

5) $$\lambda^2\dot\varphi^1(\omega) - \lambda\varphi^1(\omega) - \lambda e^{\dot\varphi^1(\omega)+(\omega/\lambda)}\ddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0;$$

$$\dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-2};$$

$$\dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-2} + \lambda \ln x_0\dot\varphi^2(x_0);$$

6)
$$\frac{x_1^2}{2} + e^{\varphi^1(x_1)} + c_1 x_1 + c_2 = 0;$$
$$\dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-2};$$
$$\dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-2};$$

7)
$$4\lambda^2\varphi^1(\omega) - 3\lambda^2\omega\varphi^1(\omega) + \lambda^2\ddot\varphi^1(\omega) - \lambda e^{\ddot\varphi^1(\omega)}\dddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$\dot\varphi^2(x_0) = c_1 e^{-\lambda x_0};$$
$$\dot\varphi^3(x_0) = c_3 e^{-2\lambda x_0};$$

8)
$$\ddot\varphi^1(x_0) = 0;$$
$$\dot\varphi^2(x_0) = e^{\varphi^1(x_0)}\dot\varphi^1(x_0);$$
$$\dot\varphi^3(x_0) = 0;$$

9)
$$\left(-\frac{1}{k}(2\lambda+1) - 2\lambda\right)\left(-\frac{1}{k}(2\lambda+1) - 2\lambda - 1\right)\varphi^1(\omega) - \lambda\left(\frac{2}{k}(2\lambda+1) + 3\lambda + 1\right)\omega\dot\varphi^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot\varphi^1(\omega) - [\ddot\varphi^1(\omega)]^k\left[-\frac{1}{k}(2\lambda+1)\ddot\varphi^1(\omega) + \lambda\omega\dddot\varphi^1(\omega)\right] + c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$\dot\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-\lambda-2};$$
$$\dot\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-2\lambda-2};$$

10)
$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\varphi^1(\omega) - \lambda\left(\frac{2}{k}+1\right)\dot\varphi^1(\omega) + \lambda^2\ddot\varphi^1(\omega) - [\ddot\varphi^1(\omega)]^k\left(-\frac{1}{k}\ddot\varphi^1(\omega) + \lambda\dddot\varphi^1(\omega)\right) + c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$\lambda \ln x_0 \dot\varphi^2(x_0) = -c_1;$$
$$\dot\varphi^3(x_0) = c_2;$$

11)
$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\varphi^1(x_1) + \frac{1}{k}(\ddot\varphi^1(\omega))^{k+1} + c_1 x_1 + c_2 = 0;$$
$$x_0^{(1/k)+2}\ \dot\varphi^2(x_0) = c_1;$$
$$x_0^{(1/k)+2}\ \dot\varphi^3(x_0) = c_2;$$

12)
$$4\lambda^2\left(\frac{1}{k}+1\right)^2\varphi^1(\omega) - \left(\frac{4}{k}+3\right)\lambda^2\omega\dot\varphi^1(\omega) + \lambda^2\ddot\varphi^1(\omega) - [\ddot\varphi^1(\omega)]^k\left(-\frac{2\lambda}{k}\ddot\varphi^1(\omega) + \lambda\dddot\varphi^1(\omega)\right) + c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$\dot\varphi^2(x_0) = c_1 e^{-\lambda\left(\frac{2}{k}+1\right)x_0};$$
$$\dot\varphi^3(x_0) = c_2 e^{-2\lambda\left(\frac{2}{k}+1\right)x_0};$$

13)
$$\ddot{\varphi}^1(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = \dot{\varphi}^1(x_0)\,[\varphi^1(x_0)]^{-2};$$

14)
$$\ddot{\varphi}^1(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = \dot{\varphi}^1(x_0)\,[\varphi^1(x_0)]^{-2};$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

15)
$$\ddot{\varphi}^1(x_0)\,\frac{k^2}{(2+k)(2+2k)} = [\varphi^1(x_0)]^k\,\dot{\varphi}^1(x_0);$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

16)
$$\frac{\ddot{\varphi}^1(x_0)}{\lambda^2} = [\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\,\dot{\varphi}^1(x_0);$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

17)
$$-\lambda^{-2}\,\ddot{\varphi}^1(x_0) = [\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\,\dot{\varphi}^1(x_0);$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

18)
$$\ddot{\varphi}^1(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = [\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\,\dot{\varphi}^1(x_0);$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

19)
$$-4\ddot{\varphi}^1(x_0) = [\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\,\dot{\varphi}^1(x_0);$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

20)
$$\ddot{\varphi}^1(x_0) = 2\,[\varphi^1(x_0)]^{-4/3}\,\dot{\varphi}^1(x_0);$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

21)
$$\lambda^2\dot{\varphi}^1(\omega) - \lambda\,[\dot{\varphi}^1(\omega)]^{-4/3}\ddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = -\lambda\dot{\varphi}^3(x_0)\,x_0 + c_2;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_1;$$

22) $$\lambda\omega\dddot{\varphi}^1(\omega)\,[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{-4/3} + \frac{3}{2}\lambda\,[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{-1/3} - \lambda^2\omega^2\ddot{\varphi}^1(\omega) - \varphi^1(\omega) -$$
$$- c_1\omega - c_2 = 0;$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = c_1 e^{\frac{\lambda}{2}x_0};$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_2 e^{-\frac{\lambda}{2}x_0};$$

23) $$\dot{\varphi}^2(x_0) = 0;$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = 0;$$

24) $$-\frac{3}{16}\varphi^1(\omega) + \frac{\lambda}{2}\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\ddot{\varphi}^1(\omega) - (\ddot{\varphi}^1(\omega))^{-4/3}\,[\frac{3}{4}\ddot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\ddot{\varphi}^1(\omega)] +$$
$$+ c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$x_0^{5/4}\,\dot{\varphi}^3(x_0) = c_1;$$
$$x_0^{5/4}\,[\dot{\varphi}^2(x_0) - \lambda\ln x_0\dot{\varphi}^3(x_0)] = c_2;$$

25) $$\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right)\varphi^1(\omega) + \frac{\lambda}{2}\omega\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot{\varphi}^1(\omega) + \left(\frac{3}{2}\lambda+\frac{3}{4}\right)(\ddot{\varphi}^1(\omega))^{-1/3} -$$
$$- \lambda\omega\,[\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{-4/3}\dddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = c_1 x_0^{(\lambda/2)-(5/4)};$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_2 x_0^{-(\lambda/2)-(5/4)};$$

26) $$-\frac{3}{16}\varphi^1(\omega) + \frac{\lambda}{2}\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda^2\ddot{\varphi}^1(\omega) - [\ddot{\varphi}^1(\omega)]^{-4/3}\,[\frac{3}{4}\ddot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\ddot{\varphi}^1(\omega)] +$$
$$+ c_1\omega + c_2 = 0;$$
$$\dot{\varphi}^2(x_0) = c_1 x_0^{-5/4};$$
$$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_2 x_0^{-5/4} + \lambda\ln x_0\dot{\varphi}^2(x_0);$$

27) $$[\ddot{\varphi}^1(x_1)]^{-1/3} + \frac{1}{4}\varphi^1(x_1) + c_1x_1 + c_2 = 0;$$
$$x_0^{5/4}\,\dot{\varphi}^2(x_0) = \frac{3}{4}c_1;$$
$$x_0^{5/4}\,\dot{\varphi}^3(x_0) = \frac{3}{4}c_2;$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Если проинтегрировать приведенные выше уравнения и подставить их решения в соответствующие анзацы, то получим решения системы (1). Приведем некоторые из них:

А. $$u = \frac{c_1}{2}x_1^2 + c_3x_1 + \int f(c_1x_0 + c_2)\,dx_0 + c_4;$$
$$v = c_1x_0 + c_2;$$

Б.
$$u = -\frac{1}{2x_0}x_1^2 + x_1\left(-\frac{c_1}{x_0} + c_3\right) - c_2 x_0^{-1} + c_4;$$

$$v = -\ln x_0 + \ln\left(-\frac{x_1^2}{2} - c_1 x_1 - c_2\right);$$

$$u = \frac{x_1^2}{2}(c_1 x_0 + c_2) + x_1(e^{c_1 x_0 + c_2} + c_3) + c_4;$$

$$v = \ln x_1 + c_1 x_0 + c_2;$$

С.
$$u = -c_1 \ln x_1 + c_3 x_1 - (c_1 x_0 + c_2)^{-1} + c_4;$$

$$v = (c_1 x_0 + c_2) x_1^{-2}, \quad k = -1;$$

$$u = c_1[x_1 \ln x_1 - x_1] + x_1[-(c_1 x_0 + c_2)^{-1} + c_3] + c_4;$$

$$v = (c_1 x_0 + c_2) x_1^{-1}, \quad k = -2;$$

$$u = \frac{1}{k+1}\left(-x_0\frac{(2+k)(2+2k)}{k(k+1)} + c_1\right)^{-\frac{1}{k}-1} x_1^{\frac{2+2k}{k}} + x_1 c_2 + c_3;$$

$$v = \left[-x_0\frac{(2+k)(2+2k)}{k(k+1)} + c_1\right]^{-\frac{1}{k}} x_1^{\frac{2}{k}}, \quad k \neq 0, -1, -2;$$

Д.
$$u = (x_1^2 + \lambda^2)^{1/2}\, 3\,(-4\lambda^2 x_0 + c_1)^{-1/4} + c_2 x_1 + c_3;$$

$$v = (x_1^2 + \lambda^2)^{-3/2}(-4\lambda^2 x_0 + c_1)^{3/4};$$

$$u = -3\,(x_1^2 - \lambda^2)^{1/2}(4\lambda^2 x_0 + c_0)^{-1/4} + x_1 c_2 + c_3;$$

$$v = (x_1^2 - \lambda^2)^{-3/2}(4\lambda^2 x_0 + c_1)^{3/4};$$

$$u = \frac{c_1}{2x_1} + x_1[-3\,(c_1 x_0 + c_2)^{-1/3} + c_3] + c_4;$$

$$v = x_1^{-3}(c_1 x_0 + c_2);$$

$$u = -x_1^{1/2}\, 48\,(16 x_0 + c_1)^{-1/4} + x_1 c_2 + c_3;$$

$$v = x_1^{-3/2}(16 x_0 + c_1)^{3/4};$$

$$u = -3 x_1^2(-8 x_0 + c_1)^{-1/4} + x_1 c_2 + c_3;$$

$$v = (-8 x_0 + c_1)^{3/4};$$

$$u = c_1 x_1 + c_2;$$

$$v = \varphi^1(x_1), \quad \varphi^1 \text{ — произвольная гладкая функция;}$$

$$u = 3 x_0^{-1/4}(\sqrt{x_1} - c_1 x_1 - c_2) + x_1[-3 c_1 x_0^{-1/4} + c_4] + [-3 c_2 x_0^{-1/4} + c_5];$$

$$v = x_0^{3/4}\left(-x_1^{-3/2}\right),$$

где $c_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 5}$.

В работе [2] для уравнения (7) приведены условно инвариантные анзацы, используя которые, можно построить нелокальные анзацы для системы (1). Приведем два таких анзаца для случая, когда $f(v)=\lambda e^{v}$.

По анзацам для уравнения (7):

$$\text{а)}\quad z = \ln(\varphi(x_0)-x_1)+\ln(\varphi(x_0)+x_1)-\ln(2\lambda x_0);$$

$$\text{б)}\quad z = 2\ln(\varphi(x_0)+x_1)-\ln(-2\lambda x_0) \tag{12}$$

находим анзацы для системы (1):

$$\text{а)}\quad u = \dot{\varphi}^1[(\varphi^1-x_1)\ln(\varphi^1-x_1)+(\varphi^1+x_1)\ln(\varphi^1+x_1)+\varphi^1]-$$

$$-\frac{x_1^2}{2x_0}+x_1\varphi^2(x_0)+\varphi^3(x_0); \tag{13}$$

$$v = \ln(\varphi^1-x_1)+\ln(\varphi^1+x_1)-\ln 2\lambda x_0;\ \text{где}\ \varphi^1=\varphi^1(x_0);$$

$$\text{б)}\quad u = 2\dot{\varphi}^1(x_1+\varphi^1)[\ln(x_1+\varphi^1)-1]-\frac{x_1^2}{2x_0}+x_1\varphi^2+\varphi^3;$$

$$v = 2\ln(x_1+\varphi^1)-\ln(-2\lambda x_0),$$

которые редуцируют систему (1) к следующим системам ОДУ:

$$\text{а)}\quad \dot{\varphi}^1=0;\ \ \dot{\varphi}^2=-\varphi^1x_0^{-2};\ \ \dot{\varphi}^3=\frac{-(\varphi^1)^2}{2x_0^2};$$

$$\text{б)}\quad \dot{\varphi}^1=0;\ \ \dot{\varphi}^2=\varphi^1x_0^{-2};\ \ \dot{\varphi}^3=\frac{(\varphi^1)^2}{2x_0^2}.$$

Решив редуцированные системы, по формулам (13) найдем точные решения системы (1):

$$\text{а)}\quad u = -\frac{c_1^2+x_1^2}{2x_0^2}+x_1c_2+c_3+\frac{c_1}{x_0}x_1;$$

$$v = \ln\frac{c_1^2-x_1^2}{2\lambda x_0};$$

$$\text{б)}\quad u = -\frac{x_1^2}{2x_0}+\left(c_2-\frac{c_1}{x_0}\right)x_1-\frac{c_1^2}{2x_0}+c_3;$$

$$v = 2\ln(x_1+c_1)-\ln(-2\lambda x_0).$$

Итак, приведенные результаты говорят о том, что нелинейные уравнения обладают скрытыми нелокальными симметриями, которые к настоящему времени совершенно не изучены и не использованы для их интегрирования.

1. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1959. – **125**, №3. – С. 492 – 495.
2. *Фущич В. И., Серов Н. И., Амеров Т. К.* Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Там же,– 1990. – №11. – С. 15 – 18.
3. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 335 с.

Получено 30.12.91