УДК 519. 21

Н. В. Москальцова, ассист. (Донец. ун-т),
В. М. Шуренков, д-р физ.-мат. наук (Киев. автодорож. ин-т)

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПОТЕНЦИАЛА СЧЕТНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Для определенного класса функций f доказана сходимость по Абелю потенциала $\sum_{n\ge 0} P^n f(i)$ однородной эргодической цепи Маркова в счетном фазовом пространстве. Получен ряд следствий, полезных для нужд ЦПТ для цепей Маркова, в частности, условие, эквивалентное конечности второго момента для времени первого возвращения в состояние.

Для певного класу функцій f доведено збіжність за Абелем потенціалу $\sum_{n\ge 0} P^n f(i)$ однорідного ергодичного ланцюга Маркова в зліченному фазовому просторі. Зроблено ряд висновків, корисних для потреб ЦГТ для ланцюгів Маркова, зокрема, умова, еквівалентна скінченності другого моменту для часу першого повернення до стану.

Пусть $X_0, X_1, \ldots$ — однородная эргодическая цепь Маркова в счетном фазовом пространстве $E = \{0, 1, \ldots\}$ со стационарной мерой π $(\pi_0 > 0)$ и вероятностями перехода за n шагов $p_{ij}^{(n)}$. Эргодичность цепи по определению означает, что [1, с. 188]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} = \pi_j.$$

Обозначим через τ момент первого возвращения в состояние 0:

$$\tau = \min\{k \ge 1 : X_k = 0\},$$

а через M_i — математическое ожидание при условии $X_0 = i$. Тогда в силу эргодичности $0 < m_0 = M_0\tau < \infty$. Так как все состояния цепи сообщающиеся, то $M_i\tau$ конечно для всех i [2, с. 120].

Пусть $f \in \mathbb{B}_0$, где $\mathbb{B}_0$ — класс функций, равных нулю всюду, кроме некоторого конечного множества из E. Оператор $\sum_{n\ge 0} P^n f(i)$, где, как обычно,

$$P^n f(i) = \sum_j p_{ij}^{(n)} f(j),$$

будем называть потенциалом. Рассмотрим $R_t f(i) = \sum_{n\ge 0} t^n P^n f(i)$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $R_t f(i)$ при $t \uparrow 1$. Имеем

$$R_t f(i) = M_i \sum_{n\ge 0} t^n f(X_n) = M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n f(X_n) + M_i \sum_{n\ge\tau} t^n f(X_n) =$$

$$= M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n f(X_n) + M_i \left(t^\tau \sum_{n\ge 0} t^n f(X_{n+\tau})\right).$$

Применим марковское свойство в момент времени τ, получим

$$R_t f(i) = G_t f(i) + \varphi_i(t) R_t f(0), \tag{1}$$

где

$$G_t f(i) = M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n f(X_n),$$

$$\varphi_i(t) = M_i t^\tau.$$

Обозначим

$$\nu_{ij} = \sum_{n\ge 0} P_i \{X_n = j, n < \tau\} = M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} \delta_j(X_n), \tag{2}$$

$$\mu_i = \frac{1}{m_0} \sum_{n\ge 0} n P_0 \{X_n = i, n < \tau\} = \frac{1}{m_0} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} n \delta_i(X_n), \tag{3}$$

где

$$\delta_j(i) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

Положим для краткости $\sum_j \pi_j f(j) = \langle \pi, f \rangle$, а $\sum_j \nu_{ij} f(j)$ обозначим через $Vf(i)$. Покажем, что $\sum_j \nu_{ij} < \infty$ и $\mu_i < \infty$ для всех $i \in E$.

Рассмотрим $\sum_j \nu_{ij}$. Из (2) получаем

$$\sum_j \nu_{ij} = \sum_j M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} \delta_j(X_n) = M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} \sum_j \delta_j(X_n) = M_i \tau,$$

поэтому сумма $\sum_j \nu_{ij}$ конечна. Далее, положим $f_m(i) = P_i\{\tau \le m\}$ и рассмотрим

$$M_0 \sum_{n\ge 0} n f_m(X_n) 1_{\{n<\tau\}} = \sum_{n\ge 0} n M_0 [1_{\{n<\tau\}} P_{X_n}\{\tau \le m\}]. \tag{4}$$

Здесь 1_A — индикатор множества A.

Обозначим через T оператор сдвига на один шаг последовательности X_n, T_k — оператор сдвига на k шагов, действующий на $\mathcal{N}$-измеримые величины и события, где $\mathcal{N}$ — σ-алгебра, порожденная значениями X_n; $T_n \tau = \tau - n$ при $\tau > n$. Пусть $\mathcal{N}_n$ — σ-алгебра, порожденная $X_0, X_1, \ldots, X_n$. Величина $1_{\{n<\tau\}}$, очевидно, $\mathcal{N}_n$-измерима. Применяя к правой части (4) марковское свойство в момент времени τ, получаем

$$M_0 \sum_{n\ge 0} n f_m(X_n) 1_{\{n<\tau\}} = \sum_{n\ge 0} n M_0 [1_{\{n<\tau\}} T_n 1_{\{\tau\le m\}}] =$$

$$= \sum_{n\ge 0} n P_0 \{n < \tau, T_n \tau \le m\} = \sum_{n\ge 0} n P_0 \{n < \tau \le n+m\} =$$

$$= M_0 \sum_{n=0\vee(\tau-m)}^{\tau-1} 1 \le M_0 [\tau \sum_{n=0\vee(\tau-m)}^{\tau-1} 1] \le m M_0 \tau < \infty. \tag{5}$$

Здесь обозначение $a \vee b$ подразумевает максимальное из чисел a и b.

Так как $\lim_{m\to\infty} f_m(j) = P_j\{\tau < \infty\} = 1$ для всех j, то для некоторого i_0 найдется $k_0(i_0) = k_0$ такое, что $f_{k_0}(i_0) \ge 1/2$, а значит,

$$f_{k_0}(j) \ge \frac{1}{2} \delta_{i_0}(j) \quad \text{для всех } j. \tag{6}$$

В самом деле, если $j = i_0$, то $f_{k_0}(j) \ge \frac{1}{2}\delta_{i_0}(j) = \frac{1}{2}$ по определению k_0; если $j \ne i_0$, то $f_{k_0}(j) \ge \frac{1}{2}\delta_{i_0}(j) = 0$.

Сопоставив (3), (5), (6), получим, что μ_i конечно. Теперь сформулируем основное утверждение работы.

Теорема. *Если* $f \in \mathbb{B}_0$ *и* $\langle \pi, f \rangle = 0$, *то*

$$\lim_{t\uparrow 1} R_t f(i) = Vf(i) - \langle \mu, f \rangle$$

для всех $i \in E$.

Доказательство. Из 1 при $i = 0$ получаем

$$R_t f(i) = \frac{G_t f(0)}{1 - \varphi_0(t)},$$

поэтому

$$R_t f(i) = G_t f(i) + \varphi_i(t) \frac{G_t f(0)}{1 - \varphi_0(t)}. \tag{7}$$

Очевидно, $G_t f(i) \to V f(i)$ при $t \uparrow 1$. Рассмотрим поведение второго слагаемого в правой части (7). Заметим, что $\varphi_i(t) \to 1$ при $t \uparrow 1$ для всех i и

$$\lim_{t\uparrow 1} G_t f(0) = M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} f(X_n) = m_0 \langle \pi, f \rangle = 0$$

по условию теоремы. Тогда

$$\lim_{t\uparrow 1} \frac{G_t f(0)}{1 - \varphi_0(t)} = \frac{1}{m_0} \lim_{t\uparrow 1} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} \frac{t^n f(X_n)}{1-t} =$$

$$= \frac{1}{m_0} \lim_{t\uparrow 1} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} \frac{t^n - 1}{1-t} f(X_n) = -\frac{1}{m_0} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} n f(X_n). \tag{8}$$

Так как $f \in \mathbb{B}_0$, то без ограничения общности можно положить $f(i) = 0$ для $i \geq L$, тогда $f(i) = \sum_{j=0}^{L-1} f_j \, \delta_j(i)$ подставим в (8) и получим

$$\lim_{t\uparrow 1} \frac{G_t f(0)}{1 - \varphi_0(t)} = -\frac{1}{m_0} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} n \sum_{j=0}^{L-1} f_j \, \delta_j(X_n) =$$

$$= -\frac{1}{m_0} \sum_{j=0}^{L-1} f_j \, M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} n \, \delta_j(X_n).$$

Вспомним, что μ_i конечно и заметим, что последнее выражение в наших обозначениях есть — $\langle \mu, f \rangle$. Теорема доказана.

Теперь сформулируем и докажем ряд следствий.

Следствие 1.

$$\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n\geq 0} t^n \left[p_{ij}^{(n)} - \frac{\pi_j}{\pi_0} p_{i0}^{(n)} \right] = \nu_{ij} - \mu_j - \frac{\pi_j}{\pi_0} \nu_{i0}. \tag{9}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\sum_{n\geq 0} t^n \left[p_{ij}^{(n)} - \frac{\pi_j}{\pi_0} p_{i0}^{(n)} \right] = M_i \sum_{n\geq 0} t^n \left[\delta_j(X_n) - \frac{\pi_j}{\pi_0} \delta_0(X_n) \right] = R_t g(i),$$

где

$$g(i) = \delta_j(i) - \frac{\pi_j}{\pi_0} \delta_0(i).$$

Так как $g \in \mathbb{B}_0$ и $\langle \pi, g \rangle = 0$, то выполнены все условия теоремы и, кроме того,

$$Vg(i) = M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} [\delta_j(X_n) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\delta_0(X_n)] = \nu_{ij} - \frac{\pi_j}{\pi_0}\nu_{i0},$$

$$\langle \mu, g \rangle = \frac{1}{m_0} M_0 \sum_i (\delta_j(i) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\delta_0(i)) \sum_{n=0}^{\tau-1} n\delta_j(X_n) =$$

$$= \frac{1}{m_0} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} n \sum_i (\delta_j(i) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\delta_0(i))\delta_j(X_n) =$$

$$= \frac{1}{m_0} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} n(\delta_j(X_n) - \frac{\pi_j}{\pi_0}\delta_0(X_n)) = \frac{1}{m_0} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} n\delta_j(X_n) = \mu_j,$$

и следствие 1 доказано.

Следствие 2.

$$\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n\ge 0} t^n [p_{ij}^{(n)} - p_{kj}^{(n)}] = \nu_{ij} - \nu_{kj} + \frac{\pi_j}{\pi_0}(\nu_{i0} - \nu_{k0}) - \pi_j (M_i\tau - M_k\tau).$$

Доказательство. Вначале преобразуем выражение под знаком предела:

$$\sum_{n\ge 0} t^n [p_{ij}^{(n)} - p_{kj}^{(n)}] = \sum_{n\ge 0} t^n [p_{ij}^{(n)} - \frac{\pi_j}{\pi_0} p_{i0}^{(n)}] -$$

$$- \sum_{n\ge 0} t^n [p_{kj}^{(n)} - \frac{\pi_j}{\pi_0} p_{k0}] + \frac{\pi_j}{\pi_0} \sum_{n\ge 0} t^n [p_{i0}^{(n)} - p_{k0}^{(n)}]; \tag{10}$$

рассмотрим последнее слагаемое:

$$\sum_{n\ge 0} t^n [p_{i0}^{(n)} - p_{k0}^{(n)}] = M_i \sum_{n\ge 0} t^n \delta_0(X_n) - M_k \sum_{n\ge 0} t^n \delta_0(X_n),$$

отсюда, рассуждая так же, как и в случае равенства (1), имеем

$$\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n\ge 0} t^n [p_{i0}^{(n)} - p_{k0}^{(n)}] = \lim_{t\uparrow 1} [M_i \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n \delta_0(X_n) -$$

$$- M_k \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n \delta_0(X_n) + M_i \sum_{n\ge\tau} t^n \delta_0(X_n) - M_k \sum_{n\ge\tau} t^n \delta_0(X_n)] =$$

$$= \nu_{i0} - \nu_{k0} + \lim_{t\uparrow 1} \frac{M_i t^\tau - M_k t^\tau}{1-t} \lim_{t\uparrow 1} (1-t) \sum_{n\ge 0} t^n p_{00}^{(n)}.$$

Последний предел в силу эргодичности цепи равен π_0, поэтому

$$\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n\ge 0} t^n [p_{i0}^{(n)} - p_{k0}^{(n)}] = \nu_{i0} - \nu_{k0} + \pi_0 (M_k\tau - M_i\tau). \tag{11}$$

Теперь из (10) с учетом (9) и (11) получаем окончательный результат следствия 2.

Следствие 3. *Следующие условия эквивалентны:*

I. *Существует конечный предел* $\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n\ge 0} t^n [p_{ij}^{(n)} - \pi_j]$;

II. $M_0\tau^2$ *конечно.*

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{n\ge 0} t^n [p_{ij}^{(n)} - \pi_j] = M_0 \sum_{n\ge 0} t^n \delta_j(X_n) - \frac{\pi_j}{1-t} = R_t \delta_j(i) - \frac{\pi_j}{1-t}.$$

Теперь, используя (7), получаем

$$\sum_{n\ge 0} t^n [\, p_{ij}^{(n)} - \pi_j \,] = G_t \delta_j(i) + \varphi_i(t)\, \frac{G_t \delta_j(0)}{1-\varphi_0(t)} - \frac{\pi_j}{1-t}. \qquad (12)$$

Заметим, что $\lim_{t\uparrow 1} G_t \delta_j(i) = v_{ij}$. Преобразуем два последних слагаемых правой части (12):

$$\varphi_i(t)\,\frac{G_t\delta_j(0)}{1-\varphi_0(t)} - \frac{\pi_j}{1-t} = \frac{\varphi_i(t)-1}{1-\varphi_0(t)}\, G_t \delta_j(0) + \frac{G_t\delta_j(0) - \pi_j m_0}{1-\varphi_0(t)} +$$

$$+ \frac{\pi_j m_0}{1-\varphi_0(t)} - \frac{\pi_j}{1-t}. \qquad (13)$$

Первое слагаемое в правой части (13) при $t \uparrow 1$ имеет предел $-\dfrac{M_i \tau}{m_0} v_{0j}$. Второе слагаемое равно

$$\frac{1-t}{1-\varphi_0(t)}\,\frac{G_t\delta_j(0)-\pi_j m_0}{1-t} = \frac{1}{m_0}\frac{1}{1-t}\Big(M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} t^n \delta_j(X_n) -$$

$$- M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} \delta_j(X_n)\Big) = \frac{1}{m_0} M_0 \sum_{n=0}^{\tau-1} \frac{t^n - 1}{1-t}\, \delta_j(X_n) \to -\mu_j,\ t\uparrow 1,$$

а μ_j, как было доказано, конечно. Так как

$$1-\varphi_0(t) = m_0(1-t) - \frac{\varphi_0''(1)}{2}(1-t)^2 + o\big((1-t)^2\big)$$

и

$$\pi_j \left[\frac{m_0}{1-\varphi_0(t)} - \frac{1}{1-t} \right] = \pi_j \frac{m_0(1-t) - \big(1-\varphi_0(t)\big)}{\big(1-\varphi_0(t)\big)(1-t)},$$

то $\dfrac{\pi_j m_0}{1-\varphi_0(t)} - \dfrac{\pi_j}{1-t} \to \pi_j \dfrac{\varphi_0''(1)}{2 m_0}$ при $t \uparrow 1$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi_0''(1)$, т. е. конечно $M_0 \tau^2$. Таким образом, следствие 3 тоже доказано.

Замечание. Утверждение теоремы и следствий можно извлечь из результатов монографии [3]. Но приведенное здесь доказательство является более предпочтительным для нужд центральной предельной теоремы для цепей Маркова.

1. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. – М. : Наука, 1971. – 664 с.
3. *Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А.* Счетные цепи Маркова. – М. : Наука, 1987. – 416 с.

Получено 13. 03. 92