УДК 513.8, 513.9

В. А. Главан, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О РАВНОСТЕПЕННО НЕПРЕРЫВНЫХ ФАКТОРАХ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ МИНИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Вводится и исследуется понятие равностепенно непрерывного фактора линейного расширения минимальной группы преобразований. Основной результат состоит в том, что подмножество ограниченных и дистальных относительно расширения движений образует максимальное равностепенно непрерывное подрасслоение линейного расширения. В качестве следствия получено, что любое дистальное линейное расширение обладает нетривиальным равностепенно непрерывным инвариантным подрасслоением. Таким же подрасслоением обладают и линейные расширения без экспоненциальной дихотомии при выполнении условия Фавара, так же, как и линейные расширения со свойством аддитивности рекуррентных движений при наличии хотя бы одного ненулевого такого движения.

Вводиться і досліджується поняття одностайно неперервного фактора лінійного розширення мінімальної групи перетворень. Основний результат полягає в тому, що підмножина обмежених і дистальних відносно розширення рухів утворює максимальне одностайно неперервне підрозшарування лінійного розширення. Як наслідок одержано, що будь-яке лінійне розширення має нетривіальне одностайно неперервне інваріантне підрозшарування. Таке ж саме підрозшарування має і лінійне розширення без експоненціальної дихотомії за умови Фавара, так само, як і лінійне розширення з властивістю адитивності рекурентних рухів при наявності хоча б одного ненульового такого руху.

1. Введение. Как известно, множество вещественных почти периодических функций образует векторное пространство и банахову алгебру. В [1] показано, что равномерно непрерывные ограниченные функции, так же, как и рекуррентные в смысле Биркгофа функции, не образуют векторного пространства, множество дистальных функций обладает структурой векторного пространства и алгебры. Некоторые из этих фактов имеют аналоги в теории линейных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами. Именно: пусть $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, означает такую систему. Через $H(A)$ обозначим оболочку функции A, т.е. $H(A) = \mathrm{cls}\,\{A_\tau\colon \tau \in \mathbb{R}\}$, где $A_\tau(t) = A(t+\tau)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$, а замыкание берется в равномерной топологии. Тогда сдвиги $(A, \tau) \mapsto A_\tau$ определяют динамическую систему на $H(A)$. Для каждого $A^1 \in H(A)$ обозначим через $\Phi(A^1, t)$, $\Phi(A^1, 0) = E$, оператор Коши предельного уравнения $\dot{x} = A^1(t)x$. Тогда на $H(A) \times \mathbb{R}^n$ определена динамическая система сдвигов $((A^1, x), \tau) \mapsto (A^1_\tau, \Phi(A^1, \tau)x)$ (см., например, [2]). Изучение исходной линейной системы неотделимо от изучения предельных систем, а значит, и всей динамической системы сдвигов на расширенном фазовом пространстве $H(A) \times \mathbb{R}^n$.

Пусть B означает подмножество точек $(A^1, x) \in H(A) \times \mathbb{R}^n$ таких, что решение $\Phi(A^1, t)x$ дифференциального уравнения $\dot{x} = A^1(t)x$ ограничено, $R \subset B$ — подмножество точек, порождающих рекуррентные решения, D — подмножество точек из $H(A) \times \mathbb{R}^n$, порождающих дистальные решения [2, 3]. Имеют место включения $D \subset R \subset B$, вообще говоря, строгие [2, 3].

В общем случае подмножество $B \subset H(A) \times \mathbb{R}^n$ не образует векторного подрасслоения расслоения $\mathrm{pr}_1\colon H(A) \times \mathbb{R}^n \to H(A)$. Подмножество B является векторным подрасслоением тогда и только тогда, когда выполняется условие Фавара об отделенности от нуля ограниченных решений или, что то же самое, $B = D$ [4, 5].

Подмножество $R \subset H(A) \times \mathbb{R}^n$ также не образует векторного подрасслоения;

сумма двух рекуррентных решений не обязательно рекуррентное решение [6]. Оно будет в точности подрасслоением тогда, когда рекуррентные решения будут обладать свойством аддитивности, что эквивалентно равенству $R = D$ [7, 8].

Изложенное выше позволяет сформулировать гипотезу о том, что $D \subset \subset H(A) \times \mathbb{R}^n$ является инвариантным векторным подрасслоением. Основной результат работы состоит в доказательстве справедливости этой гипотезы. Он позволяет считать подмножество D одним из основных инструментов при изучении структуры линейных неавтономных систем дифференциальных уравнений в критических не экспоненциально дихотомичных случаях, подобно экспоненциальной дихотомии в грубых случаях.

Сформулированное предположение подтверждается рядом теорем и следствий, выводимых из основной теоремы. Множество D существенно используется и при изучении линейных неоднородных систем (см., например, [9], где классическая теорема Фавара о существовании почти периодического решения усилена до критерия).

Основной результат работы анонсирован в [10].

2. Основные понятия и формулировка результатов. Пусть дано вещественное или комплексное векторное расслоение $p : E \to Y$ размерности n, с компактным метризуемым пространством Y в качестве базы, снабженное римановой метрикой (см., например, [11]). Пусть T означает топологическую группу, действующую на Y и послойно линейно на E таким образом, что $p \circ \pi^t = \rho^t \circ p$, $t \in T$, где ρ и π означают соответствующие действия. Другими словами, (Y, T, ρ) — группа преобразований и

$$p : (E, T, \pi) \to (Y, T, \rho) \tag{1}$$

— ее линейное расширение [12]. Естественные примеры линейных расширений — уравнения в вариациях вдоль траекторий гладких потоков на гладких многообразиях, а также дифференциалы диффеоморфизмов таких многообразий. Как известно (см., например, [2]), каждая система линейных дифференциальных уравнений с равномерно непрерывными и ограниченными коэффициентами порождает линейное расширение динамической системы сдвигов этих коэффициентов. Если коэффициенты являются рекуррентными в смысле Биркгофа функциями, то их динамическая система сдвигов минимальна.

На протяжении всей работы будем предполагать, что динамическая система (Y, T, ρ) минимальна.

***Определение* 1.** Морфизмом двух линейных расширений $p_j : (E_j, T, \pi_j) \to \to (Y, T, \rho)$, $j = 1, 2$, называется id_Y-морфизм $L : E_1 \to E_2$ векторных расслоений такой, что $L \circ \pi_1^t = \pi_2 \circ L$, $t \in T$. В этом случае линейное расширение p_2: $(E_2, T, \pi_2) \to (Y, T, \rho)$ называется фактором линейного расширения p_1: $(E_1, T, \pi_1) \to (Y, T, \rho)$.

***Определение* 2.** Линейное расширение (1) називается равностепенно непрерывным, если $\|\pi^t(x)\| \le M\|x\|$ для всех $x \in E$, $t \in T$, где M — некоторая положительная постоянная.

***Определение* 3** [13]. Линейное расширение (1) называется дистальным, если $\inf\left\{\|\pi^t(x)\| : t \in T\right\} > 0$ для всех $x \in E, x \ne 0$.

Так как неравенство из определения 2 влечет неравенства $M^{-1}\|x\| \le \le \|\pi^t(x)\| \le M\|x\|$, $t \in T$, $x \ne 0$, то всякое равностепенно непрерывное линейное расширение дистально. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, как показывает простейший пример линейной системы с нильпотентной матрицей.

Известно, что точка $x \in E$ (и движение $\pi^t(x)$) называется рекуррентной в смысле Биркгофа, если замыкание ее траектории $H(x) := \mathrm{cls}\{\pi^t(x): t \in T\}$ представляет собой компактное минимальное множество. Точка x (движение $\pi^t(x)$) называется дистальной относительно расширения, если $p \mid H(x): (H(x), T, \pi) \mid H(x) \to (Y, T, \rho)$ представляет собой дистальное расширение, последнее означает, что справедливость неравенства $\inf\{\|\pi^t(x_1) - \pi^t(x_2)\|: t \in T\} > 0$ для любых двух точек $x_1, x_2 \in H(x), x_1 \neq x_2$, таких, что $p(x_1) = p(x_2)$ (см., например, [2, 3].

Пусть $D \subset E$ означает множество всех точек, порождающих ограниченные дистальные относительно расширения движения. Основной результат статьи составляет следующая теорема.

Теорема 1. *Подмножество $D \subset E$ является инвариантным векторным подрасслоением линейного расширения* (1) *и ограничение на D последнего, т.е. $p/D:(D, T, \pi/D) \to (Y, T, \rho)$ является равностепенно непрерывным линейным расширением, причем D — максимальное подрасслоение с таким свойством.*

Доказательство теоремы будет проведено в следующем пункте. Сформулируем ряд следствий из этой теоремы.

***Следствие* 1.** *Если линейное расширение* (1) *обладает нетривиальным ограниченным движением, дистальным относительно расширения, то оно обладает нетривиальным равностепенно непрерывным инвариантным подрасслоением.*

***Следствие* 2** [4]. *Пусть $T = \mathbb{R}$ либо $T = \mathbb{Z}$. Если линейное расширение* (1) *неэкспоненциально дихотомично и удовлетворяет условию Фавара, то оно обладает нетривиальным равностепенно непрерывным инвариантным подрасслоением.*

Действительно, так как линейное расширение не удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии, то существует нетривиальное ограниченное движение, которое в силу условия Фавара дистально относительно расширения. Следовательно, $D \neq \{0\}$ и утверждение вытекает из теоремы 1.

Теорема 2. *Любое дистальное линейное расширение обладает равностепенно непрерывным инвариантным подрасслоением.*

Доказательство. В случаях $T = \mathbb{R}$ либо $T = \mathbb{Z}$ это вытекает из утверждения следствия 2, так как дистальное линейное расширение не допускает экспоненциальной дихотомии. В общем случае достаточно показать, что любое дистальное линейное расширение обладает нетривиальным ограниченным движением. Приводимые ниже рассуждения являются обобщением доказательства для случая $T = \mathbb{Z}$, приведенного в [13].

Пусть $E(1) \subset E$ означает расслоение на единичные сферы, $p: (E(1), T, \hat{\pi}) \to (Y, T, \rho)$ — (нелинейное) расширение, определенное равенством $\hat{\pi}^t(w) := \|\pi^t(w)\|^{-1}\pi^t(w)$, $w \in E(1)$, $t \in T$. В силу компактности фазового пространства $E(1)$ существует минимальное множество, которое обозначим Σ. Определим вещественную функцию $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ равенством $f(z) = \inf\{\|\pi^t(z)\|: t \in T\}$. Ввиду дистальности линейного расширения f — строго положительная полунепрерывная сверху функция, поэтому она обладает хотя бы одной точкой непрерывности $w_0 \in E$. Последнее означает, что существует окрестность $U \subset E$ точки w_0 такая, что $f(z) > (1/2)f(w_0)$ для всех $z \in U$. Как следствие минимальности Σ получаем, что значения „времени" $t \in T$, для которых $\hat{\pi}^t(w_0) \in U$, образуют относительно плотное подмножество $S \subset T$. Таким образом, $f(\hat{\pi}^t(w_0)) >$

$> (1/2) f(w_0)$ для всех $t \in S$. Отсюда, а также из предыдущего неравенства имеем для всех $t, \tau \in S$:

$$f(w_0) = \inf \left\{ \left\| \pi^t(w_0) \right\| : t \in T \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \left\| \pi^t \left\| \pi^\tau(w_0) \right\|^{-1} \cdot \pi^\tau(w_0) \right\| : t \in T \right\} \left\| \pi^\tau(w_0) \right\| > (1/2) f(w_0) \left\| \pi^\tau(w_0) \right\|,$$

поэтому $\left\| \pi^\tau(w_0) \right\| < 2$ для всех $\tau \in S$. Последнее неравенство показывает, что замыкание множества $\left\| \pi^s(w_0) \right\|$ представляет собой компакт. Далее, в силу относительной плотности подмножества $S \subset T$ найдется компакт $K \subset T$ такой, что $K + S = T$. Следовательно, замыкание множества $\left\| \pi^K (\pi^s(w_0)) \right\| = \left\| \pi^T(w_0) \right\|$ тоже компакт, т.е. $\pi^t(w_0)$ — нетривиальное ограниченное движение, которое принадлежит множеству D в силу дистальности расширения.

***Следствие* 3** [8]. *Если рекуррентные движения линейного расширения* (1) *обладают свойством аддитивности, то* (1) *обладает равностепенно инвариантным подрасслоением, как только оно обладает ненулевым рекуррентным движением.*

Действительно, в этих условиях каждое рекуррентное движение дистально относительно расширения, поэтому $D \neq \{0\}$.

Теорема 3. *Пусть* $D \neq \{0\}$. *Существуют натуральное число* s, $1 \leq s \leq n$, *и флаг инвариантных векторных подрасслоений* $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_s \subset E$ *таких, что при всех* $k = 1, 2, \ldots, s-1$ *соответствующее линейное фактор-расширение* $\bar{p}_k : (W_k / W_{k-1}, T, \nu_k) \to (Y, T, \rho)$ *равностепенно непрерывно, а* $D(E / W_s) = \{0\}$.

Доказательство. Будем строить искомый флаг по индукции. При $k = 1$ положим $W_1 := D(E)$, тогда утверждение следует из теоремы 1. Предположим, что для всех $j = 1, 2, \ldots, k-1$ искомые подрасслоения построены, и пусть $p_k : (E / W_k, T, \mu_k) \to (Y, T, \rho)$ — соответствующее линейное фактор-расширение, $D(E / W_k)$ — его множество дистальных относительно расширения точек. Если $D(E / W_{k-1}) = \{0\}$, то на этом процесс завершается. Если же $D(E / W_{k-1}) \neq \{0\}$, то определим $W_k := \{x \in E,\ x + W_{k-1} \in D(E / W_{k-1})\}$. Тогда $W_k / W_{k-1} = D(E / W_{k-1})$, и искомое утверждение справедливо в силу теоремы 1. Продолжая таким же образом, завершаем процесс на s-м шаге, где s — наименьшее натуральное число такое, что $D(E / W_{s-1}) \neq \{0\}, D(E / W_s) = \{0\}$.

3. Доказательство теоремы 1. Сформулируем и докажем несколько утверждений, которые и составят доказательство теоремы 1.

Утверждение 1. *Подмножество* $D \subset E$ *является векториальным множеством, т. е. каждый слой* $D_y := D \cap E_y$ *над точкой* $y \in Y$ *является векторным пространством.*

Доказательство. Расширение $p \oplus p / D \oplus D$ дистально, поэтому расширение $p \oplus p / H(x_1, x_2)$ также дистально для всех $(x_1, x_2) \in D \oplus D$. Имеется однозначно определенный гомоморфизм q расширения $p \oplus p / H(x_1, x_2)$ на $p / H(x_1 + x_2)$ такой, что $q(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Отсюда следует, что $p / H(x_1 + x_2)$ — дистальное расширение, т. е., $(x_1 + x_2) \in D$ для всех $(x_1, x_2) \in D \oplus D$.

Утверждение 2. *Для любого* $y \in Y$ *существуют положительные постоянные* $\alpha = \alpha(y)$ *и* $\beta = \beta(y)$ *такие, что*

$$\alpha \| x \| \le \| \pi^t(x) \| \le \beta \| x \|, \quad x \in D_y, t \in T. \tag{2}$$

Доказательство. Существование числа β гарантирует теорема Банаха — Штейнгауза. Докажем левую часть неравенства. Для этого заметим, что любой линейный оператор A в конечномерном пространстве W удовлетворяет неравенству

$$\inf\left\{ \| A\bar{x} \| : \| \bar{x} \| = 1 \right\} \cdot \| x \| \le \| Ax \|, \quad x \in W.$$

Применяя последнее неравенство к рассматриваемому расширению, получаем

$$\inf\left\{ \left\| \pi^t(\bar{x}) \right\| : t \in T, \| \bar{x} \| = 1 \right\} \cdot \| x \| \le \left\| \pi^t(x) \right\|, \quad x, \bar{x} \in D_y, t \in T.$$

Покажем, что число $\alpha := \inf\left\{ \left\| \pi^t(\bar{x}) \right\| : t \in T, \| \bar{x} \| = 1 \right\}$ положительное. Действительно, если предположить, что $\left\| \pi^{t_n}(x) \right\| \to 0$ для некоторых направленностей $\{t_n\} \subset T$ и $\{x_n\} \subset D_y, \| x_n \| = 1$, то найдутся поднаправленности $\{ x_{n_k} \}$, $\{ t_{n_k} \}$ и точка $x_0 \in D_y, \| x_0 \| = 1$, такие, что $x_{n_k} \to x_0$ в силу компактности единичной сферы пространства D_y, причем $\left\| \pi^{t_{n_k}}(x_0) \right\| \to 0$, что невозможно, так как $x_0 \in D_y$.

Утверждение 3. *Размерность слоя D_y не зависит от точки $y \in Y$.*

Доказательство. Выберем точку $y_0 \in Y$, для которой эта размерность максимальна, и пусть $y \in Y$ — произвольная точка. В силу минимальности динамической системы (Y, T, ρ) найдется направленность $\{t_n\} \subset T$ такая, что $\rho^{t_n}(y_0) \to y$. Из неравенства (2) следует, что существует поднаправленность $\left\{ t_{n_k} \right\} \subset \left\{ t_n \right\}$ такая, что семейство операторов $\pi_{y_0}^{t_{n_k}}$ сходится; пусть $A : D_{y_0} \to D_y$ означает этот предел.

В силу дистальности $A(D_{y_0}) \subset D_y$, причем A взаимно однозначно. Действительно, если $x \in D_y, x \ne 0$, то

$$\inf\left\{ \left\| \pi^t(Ax) \right\| : t \in T \right\} \ge \inf\left\{ \left\| \pi^{t+t_{n_k}}(x) \right\| : t, t_{n_k} \in T \right\} > 0,$$

поэтому $Ax \in D_y$ и $Ax \ne 0$. Более того, $A(D_{y_0}) = D_y$ в силу выбора точки y_0. Так как $y \in Y$ — произвольная точка, то $\dim D_y$ постоянна.

Утверждение 4. *Существуют положительные постоянные m и M такие, что*

$$m \| x \| \le \left\| \pi^t(x) \right\| \le M \| x \|, \quad x \in D, t \in T. \tag{3}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $y_0 \in Y$ и числа α, β, для которых справедливы неравенства (2). Пусть $y \in Y$ — произвольная точка. Выберем направленность $\left\{ t_{n_k} \right\} \subset T$ и оператор $A : D_{y_0} \to D_y$ так же, как в утверждении 3. Тогда из (2) получаем неравенства

$$\beta^{-1} \left\| \pi^\tau(x) \right\| \le \| x \| \le \alpha^{-1} \left\| \pi^t(x) \right\|, \quad x \in D_{y_0}, \ t, \tau \in T,$$

откуда

$$\left\|\pi^{\tau}(x)\right\| \leq \beta\alpha^{-1}\left\|\pi^{t}(x)\right\|, \; x \in D_{y_0}, \; t, \tau \in T.$$

В частности,

$$\left\|\pi^{\tau}\left(\pi^{t_j}(x)\right)\right\| \equiv \left\|\pi^{t+t_j}(x)\right\| \leq \beta\alpha^{-1}\left\|\pi^{t_j}(x)\right\|, \; t \in T, t_j \in \left\{t_{n_k}\right\}, x \in D_{y_0},$$

и после перехода к пределу по направленности $\{t_{n_k}\}$ получаем

$$\left\|\pi^{t}(Ax)\right\| \leq \beta\alpha^{-1}\| Ax\|, x \in D_{y_0}, \; t \in T.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\alpha\beta^{-1}\| Ax \| \leq \| \pi^{t}(Ax) \|, \; x \in D_{y_0}, t \in T.$$

Так как $y \in Y$ — произвольная точка, а $A: D_{y_0} \to D_y$ — изоморфизм, то из последних двух неравенств следует искомое соотношение, если положить $m = \alpha\beta^{-1}$, $M = \alpha^{-1}\beta$.

Утверждение 5. *Подмножество D замкнуто.*

Действительно, множество D характеризуется неравенствами (3), которые сохраняются при предельном переходе.

Утверждение 6. *Подмножество $D \subset E$ является векторным подрасслоением.*

Действительно, D — замкнутое векториальное множество с постоянной размерностью слоев, причем $p(D) = Y$ в силу минимальности Y. Согласно ([12], лемма 5.2) D — векторное расслоение.

Наконец, если $F \subset E$ — инвариантное векторное подрасслоение такое, что $\| \pi^{t}(Ax) \| \leq M_1\| x \|$ для всех $t \in T, x \in F$ и некоторой постоянной $M_1 > 0$, то

$$M_1^{-1}\| x\| \leq \left\|\pi^{t}(x)\right\|, \; x \in F, t \in T,$$

поэтому $F \subset D$. Доказательство теоремы 1 завершено.

1. *Auslander L., Hahn F.* Real functions coming from flows on compact spaces and concepts of almost periodicity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – **106**, № 3. – P. 415 – 426.
2. *Бронштейн И. У.* Расширения минимальных групп преобразований. – Кишинев: Штиинца, 1975. – 312 с.
3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.
4. *Sacker R. J., Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems. III // J. Diff. Equat. – 1976. – **22**, № 2. – P. 497 – 522.
5. *Главан В. А.* Структура линейных расширений с условиями типа Фавара // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 596 – 604.
6. *Hino Y.* Recurrent solutions for linear almost periodic systems // Funk. Ekvac. – 1985. – **28**. – P. 117 – 119.
7. *Главан В. А.* Линейные системы дифференциальных уравнений со свойством аддитивности рекуррентных решений // Асимптотические решения нелинейных уравнений с малыми параметрами. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 15 – 23.
8. *Главан В. А.* Структура линейных расширений с условиями типа Фавара. II. Линейные расширения со свойством аддитивности рекуррентных движений // Укр. мат. журн.– (в печати).
9. *Главан В. А.* Теоремы типа Фавара без условия Фавара // Разрывные динамические системы. Сборник тезисов докладов научной школы-семинара (17 – 20 сент. 1991, Ужгород). – Киев: О-во „Знание" Украины, 1991. – С. 11 – 12.
10. *Glavan V. A.* On nilpotent-like linear extensions of minimal flows // Simpozionul al VI-lea tiraspolean de topologie generală si aplicatiile ei (Sept. 9 – 14, 1991). – Chisinău: Stiinta, 1991. – P. 91 – 92.
11. *Атья М.* Лекции по K-теории. – М.: Мир, 1967. – 260 с.
12. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы.– Кишинев: Штиинца, 1984.– 291 с.
13. *Rees M.* Tangential distal flows // Israel J. Math. – 1980. – **35**, N 1 – 2. – P. 9 – 31.

Получено 06. 11. 91