УДК 517.911

М. У. Ахметов, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В СЛУЧАЕ СЕМЕЙСТВА ПОРОЖДАЮЩИХ РЕШЕНИЙ

Рассматривается задача о существовании периодических решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях и дифференциальных уравнений с разрывной частью, близких к произвольным нелинейным. Предполагается существование семейства периодических решений порождающих уравнений.

Розглядається задача про існування періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях та диференціальних рівнянь з розривною правою частиною, близьких до довільних нелінійних. Припускається існування сімейства періодичних розв'язків породжуючих рівнянь.

Уравнения рассматриваемого в работе вида исследовались ранее в [1—6]. Доказываемые теоремы являются обобщениями утверждений из [7]. Используются результаты, полученные в [8—10].

1. Импульсные системы. Пусть Ω_x — область из R^n, имеющая компактное замыкание, μ_0 — фиксированное положительное число. На множестве

$$\Omega = \{(x, t, i, \mu \mid x \in \Omega_x, \ -\infty < t < \infty, \ i = 0, \pm 1, \ldots, \ -\mu_0 < \mu < \mu_0\}$$

рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющую вид

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu g(t, x, \mu), \quad t \neq t_i(x) + \mu\tau_i(x, \mu), \\ \Delta x \big|_{t = t_i(x) + \mu\tau_i(x, \mu)} = I_i(x) + \mu W_i(x, \mu), \end{gathered} \tag{1}$$

в которой функции I_i, t_i, W_i, τ_i имеют непрерывные частные производные второго порядка по переменным μ, x_j, $j = \overline{1, n}$, $f \in C^{(0,2)}(\Omega) \bigcap C^{(1,2)}(\Omega_0)$, $g \in C^{(0,1,1)}(\Omega) \bigcap C^{(1,2,2)}(\Omega_0)$, где Ω_0 — объединение некоторых окрестностей поверхностей $t = t_i(x)$, $i = 0, \pm 1, \ldots$.

Дальше для простоты векторы x, f, I и их производные будем считать векторами-столбцами, а производные функций t_i — векторами-строками. Будем предполагать, что существуют действительное число $\omega > 0$ и целое число $p > 0$, для которых равномерно в области Ω выполняются равенства

$$\begin{gathered} f(t + \omega, x) = f(t, x), \quad g(t + \omega, x, \mu) = g(t, x, \mu), \\ I_{i+p} = I_i, \quad W_{i+p} = W_i, \quad t_{i+p} = t_i + \omega, \quad \tau_{i+p} = \tau_i. \end{gathered} \tag{2}$$

Допустим, что порождающая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i(x), \quad \Delta x \big|_{t = t_i(x)} = I_i(x) \tag{3}$$

имеет m-параметрическое семейство $(m < n)$ периодических с периодом ω решений $\varphi(t, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ таких, что хотя бы один из миноров порядка m матрицы $\varphi'_\alpha(0, \alpha_0)$ отличен от нуля при некотором фиксированном $\alpha = \alpha_0$.

Решение $\varphi(t, \alpha_0)$ назовем порождающим.

Предположим, что порождающее решение пересекает поверхности $t = t_i(x)$ в моменты времени $\theta_i = \theta_i(\alpha_0)$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_p < \omega$ и будем считать справедливым неравенство

$$1 - \frac{\partial t_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0))}{\partial x} f(\theta_i, \varphi(\theta_i, \alpha_0)) \neq 0. \tag{4}$$

Тогда, как нетрудно проверить, в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметров [9] все решения системы (1), начинающиеся в достаточно малой окрестности точки $(0, \varphi(0, \alpha_0))$, будут при малом $|\mu|$ встречаться с каждой из поверхностей разрыва ровно один раз.

Зафиксируем i и пусть $x_0(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu g(t, x, \mu) \tag{5}$$

с начальным условием $x_0(\theta_i) = x$, ξ_i — решение уравнения $\xi = t_i(x_0(\xi)) + \mu\tau_i(x_0(\xi), \mu)$, $x_1(t)$ — решение уравнения (5) с начальным условием $x_1(\xi_i) = x_0(\xi_i) + I_i(x_0(\xi_i)) + \mu W_i(x_0(\xi_i), \mu)$. Предположим, что решения x_0 и x_1 существуют и построим отображение $\mathcal{J}_i: (x, \mu, \alpha) \to x_1(\theta_i)$. Можно проверить, что последовательность $\mathcal{J}_i$ имеет период p. Кроме того, применив лемму Адамара и лемму 1.5 [8], найдем, что справедливо представление $J_i(x, \mu, \alpha) = Q_i(x, \alpha) + \mu H_i(x, \mu, \alpha)$, где функция $Q_i(x, \alpha) = J_i(x, 0, \alpha)$ имеет по каждой из переменных x_j, $j = \overline{1, n}$, α_k, $k = \overline{1, m}$, непрерывную производную второго порядка, H_i — непрерывно дифференцируемая функция и равномерно по x, μ, i справедливы равенства $H_{i+p} = H_i$, $Q_{i+p} = Q_i$.

Построим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, имеющую вид

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt} = f(t, y) + \mu g(t, y, \mu), \quad t \neq \theta_i, \\ \Delta y \big|_{t=\theta_i} = Q_i(y, \alpha) + \mu H_i(y, \mu, \alpha).\end{gathered} \tag{6}$$

Справедливо следующее свойство [10](A): если $x(t)$ и $y(t)$ — решения соответственно уравнений (1) и (6), имеющие одинаковые начальные условия и общую область определения, ξ_i — точки разрыва решения $x(t)$, то для каждого i справедливо равенство $x\,\theta_i) = y(\theta_i)$, если $\xi_i \geq \theta_i$, или равенство $x(\theta_i) = y(\theta_i +)$, если $\xi_i < \theta_i$.

Ниже значения функций и их производных в точках $(\theta_i, \varphi(\theta_i, \alpha_0), 0)$ и $(\theta_i, \varphi(\theta_i +, \alpha_0), 0)$ будем записывать без указания значений аргументов, отличая второй случай от первого верхним индексом +.

Произведения векторов и матриц будем определять по правилу умножения прямоугольных матриц.

Система уравнений в вариациях относительно решения $\varphi(t, \alpha_0)$ имеет вид

$$\frac{du}{dt} = A(t, \alpha_0)\, u, \quad t \neq \theta_i, \quad \Delta u\,|_{t=\theta_i} = P_i(\alpha_0)\, u, \tag{7}$$

где

$$A(t,\alpha_0) = \frac{\partial f(t,\varphi(t,\alpha_0))}{\partial x}, \quad P_i(\alpha_0) = (f-f^+)\frac{\partial t_i/\partial x}{1-(\partial t_i/\partial x)f} +$$

$$+\frac{\partial I_i}{\partial x}\left(E + f\frac{\partial t_i/\partial x}{1-(\partial t_i/\partial x)f}\right)f, \quad \det(E+P_i(\alpha_0)) \neq 0,$$

E — единичная $n\times n$ матрица.

Из предположения о минорах матрицы $\varphi'_\alpha(0,\alpha_0)$ вытекает, что уравнение (7) допускает m линейно-независимых ω-периодических решений $\partial\varphi(t,\alpha_0)/\partial\alpha_k$, $k=\overline{1,m}$. Отсюда в свою очередь следует, что сопряженная к (7) система также имеет m ω-периодических решений ψ_k, $k=\overline{1,m}$. Составим из них матрицу $\Psi(t,\alpha_0)$ размера $m\times n$.

Рассмотрим теперь линейную неоднородную систему

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = A(t,\alpha_0)x + g(t,\varphi(t,\alpha_0),0), \quad t\neq\theta_i,\\ \Delta x\big|_{t=\theta_i} = P_i(\alpha_0)x + H_i(\varphi(\theta_i,\alpha_0),0,\alpha_0).\end{gathered} \tag{8}$$

Известно [3], что это уравнение допускает ω-периодическое решение тогда и только тогда, когда справедливо равенство $\nu(\alpha_0)=0$, где

$$\nu(\alpha) = \int_0^\omega \Psi(t,\alpha)g(t,\varphi(t,\alpha),0)\,dt + \sum_{i=1}^p \Psi(\theta_i,\alpha)H_i(\varphi(\theta_i,\alpha),0,\alpha).$$

В этом случае ω-периодическое решение системы (8) имеет вид

$$\delta(t,\gamma) = \gamma_1\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} + \ldots + \gamma_m\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_m} + \zeta(t),$$

где $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m)$ — вещественнозначный вектор, ζ — частное ω-периодическое решение системы (8).

Теорема 1. *Пусть справедливы перечисленные для системы* (1) *условия. Тогда если* $\alpha=\alpha_0$ *есть корень уравнения* $\sigma(\alpha)=0$, *в котором*

$$\sigma(\alpha) = \int_0^\omega \Psi(t,\alpha)g(t,\varphi(t,\alpha),0)dt + \sum_{i=1}^p \Psi(\theta_i,\alpha)\left\{\left[\left(E+\frac{\partial I_i}{\partial x}\right)f - f^+\right]\frac{\tau_i}{1-(\partial t_i/\partial x)f} + W_i\right\}$$

удовлетворяет неравенству

$$\det\left(\frac{\partial\sigma(\alpha_0)}{\partial\alpha}\right) \neq 0,$$

то система (1) *при достаточно малом* $|\mu|$ *допускает* ω*-периодическое решение вида* $x=\varphi(t,\alpha_0)+\mu\xi$, *где функция* ξ *при* $\mu\to 0$ *стремится в* B*-топологии к одному из решений* $\delta(t,\gamma)$, *в котором вектор* γ *определяется из невырожденной линейной системы.*

Доказательство. Начальное значение ω-периодического решения $x(t,\eta,\mu,\alpha)$, $x(0,\eta,\mu,\alpha)=\eta$ системы (6) полностью определяется из уравнения

$$D(\eta,\mu,\alpha) \equiv x(\omega,\eta,\mu,\alpha)-\eta = 0. \tag{9}$$

Рассуждая аналогично доказательству соответствующего предложения из

[7], с помощью исследования уравнения (9), используя теоремы о линейных импульсных системах [3] и зависимости решений от начальных данных и параметров, найдем, что если решение $\alpha = \alpha_0$ уравнения $\nu(\alpha) = 0$ таково, что

$$\det\left(\frac{\partial \nu(\alpha_0)}{\partial \alpha}\right) \neq 0,$$

то при достаточно малом $|\mu|$ система (6) допускает единственное ω-периодическое решение, которое стремится при $\mu \to 0$ к порождающему решению.

Дальше, используя соотношение

$$H_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0), 0, \alpha_0) = \frac{\partial \mathcal{J}_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0), 0, \alpha_0)}{\partial \mu},$$

получаем

$$H_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0), 0, \alpha_0) = \left[\left(E + \frac{\partial I_i}{\partial x}\right) f - f^+\right] \frac{\tau_i}{1 - (\partial t_i / \partial x) f} + W_i,$$

т. е. $\nu(\alpha_0) = \sigma(\alpha_0)$.

Утверждение о существовании ω-периодического решения системы (1) следует из свойства А).

Осуществим в уравнении (6) замену $y = \varphi(t, \alpha_0) + \mu z$ и перейдем к системе

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= A(t, \alpha_0) z + h(t, \alpha_0) + \mu F(t, z, \mu, \alpha_0), \quad t \neq \theta_i, \\ \Delta z|_{t=\theta_i} &= P_i(\alpha_0) z + \vartheta_i(\alpha_0) + \mu V_i(z, \mu, \alpha_0), \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$h(t, \alpha_0) = g(t, \varphi(t, \alpha_0), 0), \quad \vartheta_i(\alpha_0) = H_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0), 0, \alpha_0),$$

$$F(t, z, \mu, \alpha_0) = \frac{1}{\mu^2}\{f(t, \varphi(t, \alpha_0) + \mu z) - f(t, \varphi(t, \alpha_0)) - \mu A(t, \alpha_0) z +$$

$$+ \mu g(t, \varphi(t, \alpha_0) + \mu z, \mu) - \mu g(t, \varphi(t, \alpha_0), 0)\}, \quad V_i(z, \mu, \alpha_0) = \frac{1}{\mu^2}\{Q_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0) +$$

$$+ \mu z, \alpha_0) - Q_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0), \alpha_0) - \mu P_i(\alpha_0) z + \mu H_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0) + \mu z, \mu, \alpha_0) -$$

$$- \mu H_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0), 0, \alpha_0\}.$$

Обозначим

$$I(\gamma) = \int_0^\omega \Psi(t, \alpha_0) F(t, \delta(t, \gamma), 0, \alpha_0) dt + \sum_{i=1}^p \Psi(\theta_i, \alpha_0) V_i(\delta(\theta_i, \gamma), 0, \alpha_0).$$

На основании теоремы о существовании периодических решений квазилинейных систем [8] необходимым и достаточным условием существования ω-периодического решения системы (10), стремящегося при $\mu \to 0$ к решению $\delta(t, \gamma_0)$ уравнения (8), является соотношение $\det(\partial I(\gamma_0) / \partial I \gamma) \neq 0$, где $\gamma = \gamma_0$ есть решение уравнения $I(\gamma) = 0$.

Покажем, что последнее уравнение является линейным.

Заметим сначала, что

$$F_j(t, \delta(t, \gamma), 0, \alpha_0) = \frac{1}{2} \sum_{k,r=1}^n \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_r} \delta_k \delta_r + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_k} \delta_k + \frac{\partial g_j}{\partial \mu};$$

$$V_{ij}(\delta(\theta_i,\gamma),0,\alpha_0) = \frac{1}{2}\sum_{k,r=1}^{n}\frac{\partial^2 Q_{ij}}{\partial x_k\partial x_r}\delta_k\delta_r + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_k}\delta_k + \frac{\partial H_{ij}}{\partial\mu}.$$

Отсюда следует

$$l_s(\gamma) = \frac{1}{2}\gamma_q\gamma_\upsilon\Big[\int_0^\omega \psi_{js}\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\alpha_\upsilon}\,dt + \sum_{i=1}^{p}\psi_{js}\frac{\partial^2 Q_{ji}}{\partial x_k\partial x_r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\alpha_\upsilon}\Big] +$$

$$+\gamma_q\Big[\int_0^\omega \psi_{js}\Big(\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k\partial x_r}\zeta_r + \frac{\partial g_i}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q} + \sum_{i=1}^{p}\psi_{js}\Big(\frac{\partial^2 Q_{ji}}{\partial x_k\partial x_r}\zeta_r + \frac{\partial H_{ji}}{\partial x_k}\Big)\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q}\Big] + \ldots, \tag{11}$$

где $s = \overline{1, m}$, а ненаписанные слагаемые не зависят от γ_q.

Дважды дифференцируя выражение

$$\varphi(t,\alpha) = \varphi(0,\alpha) + \int_0^t f(t,\varphi(t,\alpha))dt + \sum_{0<\theta_i<t} I_i(\varphi(\theta_i,\alpha)),$$

найдем, что функция $\partial^2\varphi/\partial\alpha_q\partial\alpha_r$ при $\alpha = \alpha_0$ является ω-периодическим решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A(t,\alpha_0)\,u + \sum_{k,r=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_\upsilon}, \quad t \neq \theta_i, \\ \Delta u\big|_{t=\theta_i} &= P_i(\alpha_0)\,u + \sum_{k,r=1}^{n}\frac{\partial^2 Q_i}{\partial x_k\partial x_r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\alpha_\upsilon}. \end{aligned} \tag{12}$$

Но, как известно [3], для того чтобы система (12) имела ω-периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^\omega \Psi(t,\alpha_0)\sum_{k,r=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\alpha_\upsilon}dt + \sum_{i=1}^{n}\Psi(\theta_i,\alpha_0)\frac{\partial^2 Q_i}{\partial x_k\partial x_r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\alpha_q}\frac{\partial\varphi_r}{\partial\alpha_\upsilon} = 0.$$

Отсюда следует, что коэффициент при $\gamma_q\gamma_r$ в (11) равен нулю. Таким образом, вектор γ есть решение линейной системы, невырожденность матрицы коэффициентов в которой вытекает из доказанной выше единственности ω-периодического решения системы (6). Теорема доказана.

2. Уравнения с разрывной правой частью. На множестве Ω, определенном в п. 1, рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu g(t,x,\mu). \tag{13}$$

Пусть S_i — последовательность поверхностей, задаваемых уравнениями $t = t_i(x) + \mu\tau_i(x,\mu)$, в которых функции t_i и τ_i определены для $x \in \Omega_x$ и $\mu \in (-\mu_0;\mu_0)$, $t_{i+1}(x) - t_i(x) \geq \gamma > 0$ для всех $x \in \Omega_x$ и $i = 0, \pm 1, \ldots$.

Обозначим через Ω_i область, расположенную между поверхностями S_i и S_{i+1}, A_i и A_{i+1} — открытые подмножества Ω_i, частью границы которых являются соответственно поверхности S_i и S_{i+1}. Будем предполагать, что для каждого i

$$f \in C^{(0,2)}(\Omega_i) \cap C^{(1,2)}(A_i \cup A_{i+1}), \quad g \in C^{(0,1,1)}(\Omega_i) \cap C^{(1,2,2)}(A_i \cup A_{i+1}).$$

Функции f и g, их производные непрерывны вплоть до множеств S_i и S_{i+1} на которых они имеют разрывы первого рода. Пусть также существуют действительное число $\omega > 0$ и целое число $p > 0$ такие, что равномерно в области Ω справедливы равенства

$$f(t+\omega, x) = f(t, x), \quad g(t+\omega, x, \mu) = g(t, x, \mu), \quad t_{i+p} = t_i + \omega, \quad \tau_{i+p} = \tau_i.$$

Допустим, что порождающая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{14}$$

имеет m-параметрическое $m < n$ семейство ω-периодических решений $\varphi(t, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Для некоторого значения $\alpha = \alpha_0$ существует отличный от нуля минор матрицы $\partial\varphi(0, \alpha_0) / \partial\alpha$. Пусть порождающее решение таково, что

$$1 - \frac{\partial t_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0))}{\partial x} f^{\pm} \neq 0,$$

где знаки + и − используются для обозначения предельных значений функций при $t \to \theta_i \pm$, $x = \varphi(\theta_i, \alpha_0)$, $\alpha = \alpha_0$.

Для каждого i осуществим следующее построение. Пусть $x_0(t)$, $x_0(\theta_i) = x$ — решение уравнения (13), ξ_i — решение уравнения $\xi = t_i(x_0(\xi)) + \mu\tau_i(x_0(\xi), \mu)$. Пусть для определенности $\xi_i \geq \theta_i$. Предположим, сохраняя гладкость, функции f и g с области Ω_i на множество $\Omega_x \times (\theta_i, \theta_{i+1}) \times (-\mu_0, \mu_0)$ с условием, что эти функции вместе с их производными будут непрерывными вплоть до плоскостей $t = \theta_i$ и $t = \theta_{i+1}$. Обозначим полученные расширения f_1 и g_1 и построим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x) + \mu g_1(t, x, \mu).$$

Пусть $x_1(t)$, $x_1(\xi_i) = x_0(\xi_i)$ — решение этой системы. Определим отображение $\mathcal{J}_i : (x, \mu, \alpha) \to x_1(\theta_i)$. Используя лемму Адамара, дифференцируемость решений системы (13), по начальным данным и параметру найдем, что $\mathcal{J}_i(x, \mu, \alpha) = Q_i(x, \alpha) + \mu H_i(x, \mu, \alpha)$.

Построим систему уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(t, y) + \mu g_1(t, y, \mu), \quad t \neq \theta_i, \\ \Delta y\big|_{t=\theta_i} &= Q_i(y, \alpha) + \mu H_i(y, \mu, \alpha). \end{aligned} \tag{15}$$

Системы (13) и (15) удовлетворяют свойству A), определенному выше для импульсных систем (1) и (6).

Система уравнений в вариациях для решения $\varphi(t, \alpha_0)$ имеет вид

$$\frac{du}{dt} = A(t, \alpha_0)u, \quad t \neq \theta_i, \quad \Delta u\big|_{t=\theta_i} = P_i(\alpha_0)u, \tag{16}$$

где

$$A(t, \alpha_0) = \frac{\partial f(t, \varphi(t, \alpha_0))}{\partial x}, \quad P_i(\alpha_0) = (f^- - f^+)\frac{\partial t_i/\partial x}{1 - (\partial t_i/\partial x)f^-},$$

$$\det(E + P_i(\alpha_0)) \neq 0, \quad i = \overline{1, p}.$$

Построим ω-периодическое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \alpha_0)x + g(t, \varphi(t, \alpha_0), 0), \quad t \neq \theta_i,$$

$$\Delta x\big|_{t=\theta_i} = P_i(\alpha_0)x + H_i(\varphi(\theta_i, \alpha_0), 0)$$

в виде

$$\delta(t, \gamma) = \gamma_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} + \ldots + \gamma_m \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_m} + \zeta(t),$$

где $\zeta(t)$ — частное ω-периодическое решение этого уравнения.

Пусть ψ_k, $k = \overline{1, m}$, — ω-периодические линейно-независимые решения уравнения, сопряженного к (16). Составим из них матрицу $\Psi(t, \alpha_0)$ размера $m \times n$. Аналогично теореме 1 на основе свойства A) доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть система* (13) *удовлетворяет перечисленным условиям. Тогда если корень* $\alpha = \alpha_0$ *уравнения* $\sigma(\alpha) = 0$, *где*

$$\sigma(\alpha) = \int_0^{\omega} \Psi(t, \alpha) g(t, \varphi(t, \alpha), 0)\, dt + \sum_{i=1}^{p} \Psi(\theta_i, \alpha)(f^- - f^+) \frac{\tau_i}{1 - (\partial t_i / \partial x) f^-},$$

удовлетворяет условию

$$\det\left(\frac{\partial\sigma(\alpha_0)}{\partial\alpha}\right) \neq 0,$$

то система (13) *при достаточно малом* $|\mu|$ *допускает* ω*-периодическое решение вида* $x = \varphi(t, \alpha_0) + \mu\xi$, *где функция* ξ *при* $\mu \to 0$ *стремится в B-топологии к одному из решений* $\delta(t, \gamma)$. *Вектор* γ *определяется как решение невырожденной линейной системы.*

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев : Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. *Самойлéнко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками // Мат. физика. – 1971.– Вып. 9. – С. 101 – 117.
3. *Самойленко А. М, Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев : Вища шк., 1987. – 288 с.
4. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
5. *Неймарк Ю. И., Шильников Л. П.* О применении малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1959.– N6. – С. 51 – 59.
6. *Козловский М. З.* Об условиях существования периодических решений системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, содержащими малый параметр // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**. – Вып. 9. – С. 738 – 745.
7. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М. : Гостехиздат, 1956. – 491 с.
8. *Самойленко А. М, Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Дифференциальные свойства решений и интегральных поверхностей нелинейных импульсных систем. – Киев, 1990. – 50 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90. 37).
9. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О дифференциальной зависимости решений импульсных систем от начальных данных // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**. –№8. – С. 1028 – 1033.
10. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О методе сравнения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения.– 1990.– **26**.–№9.– С. 1475–1483.

Получено 04. 04. 91.