УДК 519.21
Д. В. Павлов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО БЛИЗЬКІСТЬ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ ОДНОРІДНИХ ТА ІЗОТРОПНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ, У ЯКИХ СПЕКТРАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ОДНАКОВІ НА ПЕВНІЙ МНОЖИНІ

We give examples of application of average theorem when obtaining various estimates of the closeness of correlation functions in the case where their spectral functions are the same on a certain set.

Наведено приклади застосування теореми про середнє для знаходження різних оцінок близькості кореляційних функцій, коли їх спектральні функції однакові на деякій множині.

Нехай $F_1(x)$, $F_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — дві функції розподілу.

У цій роботі використовуються такі ймовірнісні метрики [1]: рівномірна метрика (метрика Колмогорова)

$$\rho(F_1, F_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_1(x) - F_2(x)|;$$

середня метрика

$$\kappa_1(F_1, F_2) = \int_{\mathbb{R}} |F_1(x) - F_2(x)| dx.$$

Нехай $\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — середньоквадратично неперервні однорідні в широкому розумінні ізотропні випадкові поля з нульовим середнім.

Для такого поля $\gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, кореляційна функція $B_n(t, s) = B_n(|t - s|)$ має зображення [2]

$$B_n(t) = 2^{(n-2)/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{(n-2)/2}(\lambda t)}{(\lambda t)^{(n-2)/2}} d\Phi_n(\lambda) \quad \forall t \geq 0, \tag{1}$$

де $J_\nu(z)$ — циліндрична функція Бесселя першого роду, $\Phi_n(\lambda)$ — обмежена неперервна зліва функція, $\Phi_n(-\infty) = 0$, $B_n(0) = \int_0^\infty d\Phi_n(\lambda)$.

Якщо $B_n(0) = 1$, то Φ_n — функція розподілу. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $B_n(0) = 1$.

Нехай B_n, $B_{n,1}$, $B_{n,2}$ — кореляційні функції випадкових полів $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ відповідно, Φ_n, $\Phi_{n,1}$, $\Phi_{n,2}$ — відповідно їхні спектральні функції.

Позначимо

$$f_n(\lambda) = \Phi_{n,1}(\lambda) - \Phi_{n,2}(\lambda),$$

$$g_{n,t}(\lambda) = \frac{J_{(n-2)/2}(\lambda t)}{(\lambda t)^{(n-2)/2}}.$$

Покладемо

$$g_{n,t}(0) = \lim_{\lambda \to 0+} g_{n,t}(\lambda) = \frac{1}{2^{(n-2)/2} \Gamma(n/2)}.$$

Відомо [3], що

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}.$$

Звідси

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{J_{(n-2)/2}(\lambda t)}{(\lambda t)^{(n-2)/2}}\right) = -\frac{J_{n/2}(\lambda t)}{(\lambda t)^{(n-2)/2}}t,$$

тобто

$$g'_{n,t}(\lambda) = -\lambda t^2 g_{n+2,t}(\lambda), \tag{2}$$

$g_{n,t}$ — неперервна, неперервно диференційовна та інтегровна на $(0, +\infty)$.

Нехай Φ_n складається лише з абсолютно неперервної та дискретної складових. Проінтегруємо (1) частинами:

$$B_n(t) = 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_0^\infty g_{n,t}(\lambda)\,d\Phi_n(\lambda) =$$

$$= 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(g_{n,t}(\lambda)\Phi_n(\lambda)\Big|_{\lambda=0}^{\lambda\to+\infty} - \int\limits_0^\infty \Phi_n(\lambda)\,dg_{n,t}(\lambda)\right).$$

Нехай $t > 0$. Тоді, оскільки $\Phi_n(\lambda)$ обмежена і $\lim_{\lambda\to+\infty} g_{n,t}(\lambda) = 0$, то $\lim_{\lambda\to+\infty} g_{n,t}(\lambda)\Phi_n(\lambda) = 0$.

Нехай $t = 0$. Тоді $g_{n,t}(\lambda) = g_{n,1}(0) = \dfrac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\Phi_n(\lambda) = 1$. Отже, для $t = 0$ $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} g_{n,0}(\lambda)\Phi_n(\lambda) = \dfrac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}$.

Оскільки $\lim\limits_{\lambda\to 0+} g_{n,t}(\lambda) = \dfrac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)} = \text{const}$, то

$$\lim_{\lambda\to 0+} g_{n,t}(\lambda)\Phi_n(\lambda) = \frac{\lim_{\lambda\to 0+}\Phi_n(\lambda)}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}.$$

Отже,

$$B_n(t) = 1_{t=0} - \lim_{\lambda\to 0+}\Phi_n(\lambda) - 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_0^{+\infty}\Phi_n(\lambda)\,d\left(\frac{J_{(n-2)/2}(\lambda t)}{(\lambda t)^{(n-2)/2}}\right). \tag{3}$$

Позначимо $\delta_{\Phi_n} = \lim_{\lambda\to 0+}\Phi_n(\lambda)$; $m_\nu = \inf\{z > 0 \mid J_\nu(z) = 0\}$ — перший додатний корінь функції $J_\nu(z)$.

Позначимо через $\mathrm{BV}([a;b])$ множину функцій обмеженої варіації [4] на $[a;b]$, а через $\mathrm{V}(f;[a;b])$ — варіацію функції $f \in \mathrm{BV}([a;b])$.

Теорема 1. *Нехай* $\Phi_{n,1} - \Phi_{n,2}$ *складається лише з абсолютно неперервної та дискретної складових, тобто сингулярні складові функцій* $\Phi_{n,1}$, $\Phi_{n,2}$ *або відсутні, або однакові.*

Нехай $\exists\, c \in [0; m_{n/2}]$ *таке, що* $\forall\,\lambda \geq c$ $\Phi_{n,1}(\lambda) = \Phi_{n,2}(\lambda)$. *Тоді*

$$\forall\, t \in [0;1] \quad \left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| \leq \left|2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{(n-2)/2}(ct)}{(ct)^{(n-2)/2}} - 1\right|\rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2}).$$

Доведення. Оскільки $c \in [0; m_{n/2}]$, $t \in [0;1]$, $\lambda \in [0;c]$, то $t\lambda \in [0;c]$; зрозуміло, що $g_{n+2,t}$ — знакостала на $[0;c]$. Звідси і з (2) на $[0;c]$ $g_{n,t}(\lambda)$ — монотонна. Тому за теоремою про середнє

$$\exists\,\Lambda_{n,t} \in \left[-\inf_{[0;c]} f_n;\ \sup_{[0;c]} f_n\right], \quad \text{тобто } \exists\,\Lambda_{n,t} \in [-\rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2}); \rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2})]$$

таке, що

$$\int_0^c f_n(\lambda)\,dg_{n,t}(\lambda) = \Lambda_{n,t}\big(g_{n,t}(c) - g_{n,t}(0)\big).$$

Якщо f_n неперервна, то $\exists\ \theta_{n,t}(\lambda) \in [0;c]:\ f_n(\theta_{n,t}) = \Lambda_{n,t}$,

$$\left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| = \left|-2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^c f_n(\lambda)\,dg_{n,t}(\lambda)\right| =$$

$$= \left|-2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Lambda_{n,t}\big(g_{n,t}(c) - g_{n,t}(0)\big)\right| \le$$

$$\le \left|2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{(n-2)/2}(ct)}{(ct)^{(n-2)/2}} - 1\right|\rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2}).$$

Теорема 2. *Нехай* $\Phi_{n,1} - \Phi_{n,2}$ *складається лише з абсолютно неперервної та дискретної складових.*

Нехай для фіксованого $c > 0\ \forall\lambda \ge c\ \ \Phi_{n,1}(\lambda) = \Phi_{n,2}(\lambda)$. *Нехай* $\alpha_{n,t,1} < \ldots$ $\ldots < \alpha_{n,t,k}$ *— послідовні й без пропусків корені функції* $g_{n+2,t}(\lambda t) = \dfrac{J_{n/2}(\lambda t)}{(\lambda t)^{n/2}}$, $\alpha_{n,t,k} < c$, $\alpha_{n,t,1} > 0$.

Тоді

$$\forall\, t \ge 0\ \ \left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| \le$$

$$\le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\left|\frac{J_{(n-2)/2}(\alpha_{n,t,1}t)}{(\alpha_{n,t,1}t)^{(n-2)/2}} - \frac{1}{2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}\right| + \right.$$

$$+ \left|\frac{J_{(n-2)/2}(ct)}{(ct)^{(n-2)/2}} - \frac{J_{(n-2)/2}(\alpha_{n,t,k}t)}{(\alpha_{n,t,k}t)^{(n-2)/2}}\right| +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{k-1}\left|\frac{J_{(n-2)/2}(\alpha_{n,t,j+1}t)}{(\alpha_{n,t,j+1}t)^{(n-2)/2}} - \frac{J_{(n-2)/2}(\alpha_{n,t,j}t)}{(\alpha_{n,t,j}t)^{(n-2)/2}}\right|\right)\rho(\Phi_{n1}, \Phi_{n,2}).$$

Доведення. З (3) випливає, що

$$\left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| = \left|-2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^c f_n(\lambda)\,dg_{n,t}(\lambda)\right| =$$

$$= 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left|\int_0^c f_n(\lambda)g'_{n,t}(\lambda)\,d\lambda\right| = 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left|t^2\int_0^c f_n(\lambda)\lambda g_{n+2,t}(\lambda)\,d\lambda\right| \le$$

$$\le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)t^2\int_0^c \left|f_n(\lambda)\lambda g_{n+2,t}(\lambda)\right|d\lambda.$$

За теоремою про середнє маємо

$$\exists\,\Lambda \in \left[0;\ \sup_{\lambda\in[0;c]}|f_n(\lambda)|\right]:\ \int_0^c \left|f_n(\lambda)\lambda g_{n+2,t}(\lambda)\right|d\lambda = \Lambda\int_0^c \left|\lambda g_{n+2,t}(\lambda)\right|d\lambda.$$

Звідси

$$\left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| \le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Lambda\int_0^c \left|t^2\lambda\, dg_{n+2,t}(\lambda)\right| d\lambda = $$

$$= 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Lambda\int_0^c \left|g'_{n,t}(\lambda)\right| d\lambda.$$

Для зручності покладемо $\alpha_{n,t,k+1} = c$, $\alpha_{n,t,0} = 0$. Зрозуміло, що

$$\int_0^c \left|g'_{n,t}(\lambda)\right| d\lambda = \sum_{j=0}^{k} \int_{\alpha_{n,t,j}}^{\alpha_{n,t,j+1}} \left|g'_{n,t}(\lambda)\right| d\lambda.$$

На $(\alpha_{n,t,2j-1}; \alpha_{n,t,2j})$ $g'_{n,t}(\lambda) < 0$, на $(\alpha_{n,t,2j}; \alpha_{n,t,2j+1})$ $g'_{n,t}(\lambda) > 0$. Отже,

$$\int_0^c \left|g'_{n,t}(\lambda)\right| d\lambda = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \int_{\alpha_{n,t,j}}^{\alpha_{n,t,j+1}} g'_{n,t}(\lambda)\, d\lambda = $$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \left(g_{n,t}(\alpha_{n,t,j+1}) - g_{n,t}(\alpha_{n,t,j})\right) = \sum_{j=0}^{k} \left|g_{n,t}(\alpha_{n,t,j+1}) - g_{n,t}(\alpha_{n,t,j})\right|.$$

Остаточно маємо

$$\left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| \le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Lambda \sum_{j=0}^{k} \left|g_{n,t}(\alpha_{n,t,j+1}) - g_{n,t}(\alpha_{n,t,j})\right| \le$$

$$\le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2}) \sum_{j=0}^{k} \left|g_{n,t}(\alpha_{n,t,j+1}) - g_{n,t}(\alpha_{n,t,j})\right|.$$

Теорема 3. *Нехай* $\Phi_{n,1} - \Phi_{n,2}$ *складається лише з абсолютно неперервної та дискретної складових і існує* $c > 0$ *таке, що для кожного* $\lambda \ge c$ $\Phi_{n,1}(\lambda) = \Phi_{n,2}(\lambda)$.

Тоді

$$\forall t \ge 0 \quad \left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| \le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2}) \cdot V\left(g_{n,t}; [0; c]\right).$$

Доведення. Нехай $A = \left\{x \in [0; c] \mid g'_{n,t}(x) \ge 0\right\}$. Покладемо

$$\bar{f}_n(\lambda) = \begin{cases} f_n(\lambda) & \forall \lambda \in A, \\ -f_n(\lambda) & \forall \lambda \in [0; c] \setminus A, \end{cases}$$

$$h_{n,t}(\lambda) = \left|g'_{n,t}(\lambda)\right|.$$

Тоді

$$\int_0^c f_n(\lambda) g'_{n,t}(\lambda)\, d\lambda = \int_0^c \bar{f}_n(\lambda) h_{n,t}(\lambda)\, d\lambda.$$

Очевидно, що $h_{n,t}(\lambda) \ge 0$. Отже, за теоремою про середнє

$$\exists \Lambda \in \left[-\rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2}); \rho(\Phi_{n,1}, \Phi_{n,2})\right]:$$

$$\int_0^c \bar{f}_n(\lambda) h_{n,t}(\lambda)\, d\lambda = \Lambda \int_0^c h_{n,t}(\lambda)\, d\lambda = \Lambda \cdot V\left(g_{n,t}; [0; c]\right).$$

Остання рівність випливає з [4; с. 249]. Звідси

$$\left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| = 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left|\int_0^c f_n(\lambda) g'_{n,t}(\lambda)\,d\lambda\right| \le$$

$$\le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) V\left(g_{n,t};[0;c]\right)\rho(\Phi_{n,1},\Phi_{n,2}).$$

Наступна теорема дає оцінку для малих t.

Теорема 4. *Нехай* $\Phi_{n,1}-\Phi_{n,2}$ *складається лише з абсолютно неперервної та дискретної складових і існує* $c>0$ *таке, що* $\forall\,\lambda \ge c \quad \Phi_{n,1}(\lambda) = \Phi_{n,2}(\lambda)$.

Тоді

$$\forall t > 0 \quad \left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| \le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) t \sup_{\lambda\in[0;c]}\left|\frac{J_{n/2}(\lambda t)}{(t\lambda)^{(n-2)/2}}\right| \kappa_1(\Phi_{n,1},\Phi_{n,2}).$$

Доведення. Нехай $B = \{\lambda \in [0;c] \mid f_n(\lambda) \ge 0\}$ і

$$\bar{h}_n(\lambda) = \begin{cases} g'_{n,t}(\lambda) & \forall \lambda \in B, \\ -g'_{n,t}(\lambda)\,. & \forall\lambda\in[0;c]\setminus B. \end{cases}$$

За теоремою про середнє (оскільки $\bar{h}_{n,t}$ неперервна)

$$\exists\theta\in[0;c]\colon \int_0^c f_n(\lambda) g'_{n,t}(\lambda)\,d\lambda = \int_0^c |f_n(\lambda)|\bar{h}_{n,t}(\lambda)\,d\lambda = \bar{h}_{n,t}(\theta)\int_0^c |f_n(\lambda)|\,d\lambda.$$

Отже,

$$\left|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)\right| \le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left|\int_0^c f_n(\lambda) g'_{n,t}(\lambda)\,d\lambda\right| =$$

$$= 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left|g'_{n,t}(\lambda)\right|\int_0^c |f_n(\lambda)|\,d\lambda \le$$

$$\le 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sup_{\lambda\in[0;c]}\left|\frac{J_{n/2}(\lambda t)}{\lambda^{(n-2)/2}\, t^{(n-4)/2}}\right|\kappa_1(\Phi_{n,1},\Phi_{n,2}).$$

Теорему доведено.

Результатів, що стосуються використання апарату ймовірнісних метрик у спектральній теорії випадкових полів, відомо небагато (див., наприклад, [5–8]). У цій роботі продовжуються дослідження роботи [5].

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 415 с.
2. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей. – Киев: Выща. шк., 1980. – 207 с.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. – М., 1949. – 298 с.
4. *Дороговцев А. Я.* Математический анализ. – Киев: Выща шк., 1985. – 528 с.
5. *Павлов Д. В.* Деякі співвідношення ймовірнісних метрик для випадкових полів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 2. – С. 135–141.
6. *Olenko A. Ya.* On proximity of the spectral functions of homogeneous isotropic fields // Theory Probab. Math. Statist. – 1993. – **46**. – P. 117–119.
7. *Olenko A. Ya.* On properties of spectral and correlation functions // 4th World Congr. Bernoulli Soc.: Abstrs. – Vienna, 1996. – P. 363–364.
8. *Оленко А. Я, Павлов Д. В.* Деякі оцінки близькості кореляційних та спектральних функцій випадкових полів // Нац. ун-т "Києво-Могилянська Академія". Наук. зап. Фіз.-мат. науки. – 2000. – **18**. – С. 17–19.

Одержано 16.06.99