УДК 512.542

Аль-Дабабсех Авни Файез (Белорус. ун-т трансп., Гомель)

О τ-ЗАМКНУТЫХ ФОРМАЦИЯХ n-АРНЫХ ГРУПП

We prove that if G is a not one-element n-ary finite group belonging to τ-closed formation $\mathfrak{F}$, then $G/\mathrm{soc}(G) \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$, where $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ is an intersection of all maximal τ-closed subformations ofτ-closed formation of n-ary groups $\mathfrak{F}$.

Доведено, що якщо G — неодноелементна n-арна скінченна група, яка належить τ-замкненій формації $\mathfrak{F}$, то $G/\mathrm{soc}(G) \in \Phi_\tau(\mathfrak{F})$, де $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ — перетин всіх максимальних τ-замкнених підформацій τ-замкненої формації n-арних груп $\mathfrak{F}$.

Напомним, что система $\langle G, (\,)\rangle$ с одной n-арной операцией $(\,)$ называется n-арной группой [1, 2], если операция $(\,)$ ассоциативна и каждое из уравнений вида $(xa_1 \dots a_{n-1}) = a$, $(a_1 \dots a_{n-1}y) = a$ разрешимо в G. Будем использовать терминологию, принятую в работе С. А. Русакова [2]. В частности, следуя [2], всякую n-арную подгруппу n-арной группы G будем называть подгруппой G и если π — некоторая конгруэнция на G, то соответствующую фактор-систему $\langle G/\pi, (\,)\rangle$ (которая, очевидно, является n-арной группой) будем называть фактор-группой G (ср. с [2, с. 64]).

Совокупность n-арных групп $\mathfrak{X}$ называется классом или абстрактным классом, если с любой своей n-арной группой $\mathfrak{X}$ содержит и все ее изоморфные образы.

Следуя Л. А. Шеметкову [3], будем называть класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая фактор-группа любой n-арной группы G из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/\pi \in \mathfrak{F}$, $H/\varphi \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/\pi \cap \varphi \in \mathfrak{F}$.

Если формации n-арных групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ таковы, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то будем говорить, следуя общепринятой терминологии, что $\mathfrak{M}$— подформация $\mathfrak{F}$.

Понятно, что пересечение любой совокупности формаций n-арных групп снова является формацией. Формацией является и объединение любой цепи формаций n-арных групп.

К формациям приводят многие условия, накладываемые на классы n-арных групп. Такими условиями, как правило, являются различные ограничения конечности (в частности, формациями являются: класс всех одноэлементных n-арных групп (1), класс всех конечных n-арных групп $\mathfrak{G}$, класс всех периодических n-арных групп [2], класс n-арных групп с условиями минимальности или максимальности для конгруэнций [4] и др.). К формациям приводят и различные „π-ограничения" (в частности, для каждого непустого множества простых чисел класс всех конечных n-арных π-групп является формацией). Формацией является и каждый класс n-арных групп, определяемый той или иной системой тождеств (класс абелевых, класс полуабелевых n-арных групп и др.).

Ниже все рассматриваемые классы n-арных групп предполагаются входящими в класс конечных n-арных групп $\mathfrak{G}$.

Сопоставим каждой n-арной группе G некоторую ее совокупность подгрупп $\tau(G)$. Будем говорить, следуя Скибе [5], что τ — подгрупповой функтор, если выполняются следующие условия:

1) любая n-арная группа $G \in \tau(G)$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \to B$ и для любых подгрупп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $H^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

По аналогии с [5] подгрупповой функтор τ назовем:

1) замкнутым, если для любых n-арных групп G и $H \in \tau(G)$ $\tau(H) \subseteq \subseteq \tau(G)$;

2) тривиальным, если для любой n-арной группы G имеет место $\tau(G) = = \{G\}$;

3) единичным, если для любой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из всех подгрупп G.

Заметим, что тривиальный и единичный подгрупповой функторы являются примерами замкнутых функторов. Рассмотрим следующие примеры.

***Пример* 1.** Пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из всех инвариантных (полуинвариантных) подгрупп G. Тогда согласно предложению 6. 1 [2] τ — подгрупповой функтор. Нетрудно заметить, что такой функтор не является замкнутым.

Подгруппа H n-арной группы G называется субинвариантной в G, если в G имеется такой ряд подгрупп:

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_{t-1} \subseteq H_t = G,$$

где H_{i-1} — инвариантная в H_i подгруппа, $i = 1, 2, \ldots, t$.

***Пример* 2.** Пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из субинвариантных подгрупп G. Тогда вследствие примера 1 и теоремы 1 (см. ниже) τ — замкнутый подгрупповой функтор.

***Пример* 3.** Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. И пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ совпадает с совокупностью всех тех подгрупп из G, индексы которых не делятся на числа из π. Можно показать, что τ — замкнутый подгрупповой функтор.

Подгруппа H n-арной группы G называется абнормальной в G, если всегда из $H \subseteq M \subseteq G$, где M — подгруппа в G, следует, что $M = N_G(M)$.

***Пример* 4.** Пусть для каждой n-арной группы G система $\tau(G)$ состоит из всех абнормальных в G подгрупп. Тогда τ — подгрупповой функтор.

Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_i \mid i \in I\}$ определим их пересечение $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ и положим $\tau(G) = \bigcap_{i \in I} \tau_i(G)$ для любой n-арной группы G. Легко видеть, то если все функторы из $\{\tau_i \mid i \in I\}$ замкнуты, то их пересечение $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ также является замкнутым функтором.

Будем писать $\tau_1 \leq \tau_2$, если в любой n-арной группе G выполняется $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$.

Пусть теперь τ — произвольный подгрупповой функтор, $\overline{\tau}$ — пересечение всех таких замкнутых функторов τ_i, что $\tau \leq \tau_i$. Функтор $\overline{\tau}$ называется [5] замыканием функтора τ.

Теорема 1. *$T \in \overline{\tau}(G)$ тогда и только тогда, когда найдется такое число t, что в n-арной группе G имеется такой ряд подгрупп:*

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots \subseteq T_{t-1} \subseteq T_t = G,$$

где $T_{i-1} \in \tau(T_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$.

В дальнейшем τ — некоторый подгрупповой функтор.

Введем следующие операции на классах n-арных групп. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс n-арных групп. Тогда:

$G \in H\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G является эпиморфным образом некоторой n-арной группы $A \in \mathfrak{X}$;

$G \in R_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в G имеется набор конгруэнций π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_t$, $t \geq 2$, такой, что

$$\bigcap_{i=1}^{t} \pi_i = \Delta, \quad \frac{G}{\pi_i} \in \mathfrak{X}, \qquad i = 1, 2, \ldots, t;$$

$G \in D\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $G = G_1 \times \ldots \times G_t$, где каждая n-арная группа $G_i \in \mathfrak{X}$;

$G \in S_\tau\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $G \in \tau(A)$ для некоторой n-арной группы $A \in \mathfrak{X}$.

Пусть U — некоторая операция на классах n-арных групп. Тогда если $U\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, то говорят, что класс $\mathfrak{X}$ U-замкнут, и если U_1 и U_2 — две операции на классах n-арных групп, то операцию U_1U_2 определяют равенством

$$U_1U_2(\mathfrak{X}) = U_1(U_2\mathfrak{X}).$$

Можно показать, что класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ является формацией тогда и только тогда, когда он H-замкнут и R_0-замкнут. Класс n-арных групп $\mathfrak{F}$ называется полуформацией, если он H-замкнут. Следуя [5], класс $\mathfrak{F}$ назовем τ-замкнутым, если $S_\tau\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пересечение всех тех τ-замкнутых полуформаций, которые содержат данный класс n-арных групп $\mathfrak{X}$, будем называть τ-замкнутой полуформацией, порожденной $\mathfrak{X}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая полуформация, порожденная классом n-арных групп $\mathfrak{X}$. Тогда*

$$\mathfrak{F} = HS_\tau\mathfrak{X}.$$

Пусть $\tau \operatorname{form} \mathfrak{X}$ — пересечение всех τ-замкнутых формаций, содержащих совокупность n-арных групп $\mathfrak{X}$. Такую формацию называем τ-замкнутой, порожденной $\mathfrak{X}$. Для произвольной совокупности n-арных групп $\mathfrak{X}$ символом $(\mathfrak{X})$ обозначают абстрактное замыкание $\mathfrak{X}$, т. е. $G \in (\mathfrak{X})$ тогда и только тогда, когда $G \cong A$ для некоторой n-арной группы $A \in \mathfrak{X}$.

Теорема 3. *Для любой совокупности n-арных групп $\mathfrak{X}$ справедливо равенство*

$$\tau \operatorname{form} \mathfrak{X} = HR_0S_\tau(\mathfrak{X}).$$

Напомним, что через $\operatorname{form} \mathfrak{X}$ обозначается [4] формация, порожденная $\mathfrak{X}$.

***Следствие* 1.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность n-арных групп, $\mathfrak{M} = S_\tau(\mathfrak{X})$. Тогда*

$$\tau \operatorname{form} \mathfrak{X} = \operatorname{form} \mathfrak{M}.$$

***Следствие* 2.** *Для любой совокупности τ-замкнутых формаций $\{\mathfrak{M}_i \mid i \in \in I\}$ имеет место*

$$\tau \operatorname{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i\right) = \operatorname{form}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{M}_i\right).$$

По аналогии с [5] n-арную группу G назовем τ-критической, если G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{H}$ для некоторых двух τ-замкнутых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ — τ-замкнутая полуформация n-арных групп и $A \in \in \mathfrak{F} = \tau\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Тогда если $A \notin \mathfrak{X}$, то в $\mathfrak{F}$ найдется n-арная группа H с такими конгруэнциями $\varphi, \pi_1, \ldots, \pi_t, \psi_1, \ldots, \psi_t$, $t \geq 2$, что выполняются следующие условия:*

1) $H/\pi \cong A$ *и* $\pi_1 \cap \ldots \cap \pi_t = \Delta$;

2) H/π_i — *τ-критическая n-арная группа с монолитической конгруэнцией* ψ_i/π_i;

3) $\gamma_i = \pi_1 \cap \ldots \cap \pi_{i-1} \cap \psi_i\pi_{i+1} \cap \pi_t$ — *минимальмая конгруэнция на H, причем $\gamma_i \not\subseteq \pi$ и $\pi_i\gamma_i = \psi_i$;*

4) $\psi_1 \cap \ldots \cap \psi_t \subseteq \psi$, *где $\pi \subseteq \psi$ и ψ/π — цокольная конгруэнция* [4] *на* H/π.

Следуя [4], через $\mathrm{soc}(\mathfrak{F})$ будем обозначать конгруэнцию, порожденную всеми минимальными конгруэнциями на G. Такая конгруэнция называется цокольной.

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{X}$ — τ-замкнутая полуформация и $G \in \tau\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}\backslash(1)$. Тогда*

$$\frac{G}{\mathrm{soc}(G)} \in \tau\,\mathrm{form}\left(\frac{A}{\mathrm{soc}(A)}\,\middle|\, A \in \mathfrak{X}\right).$$

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутые формации и $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Тогда если не существует такой τ-замкнутой формации $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{M}$ называется максимальной τ-замкнутой подформацией в $\mathfrak{F}$. Обозначим через $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ пересечение всех максимальных τ-замкнутых подформаций τ-замкнутой формации $\mathfrak{F}$ (полагаем $\Phi_\tau(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, если в $\mathfrak{F}$ нет подформаций такого типа).

Пусть $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутая формация n-арных групп, $G \in \mathfrak{F}$. Будем говорить, что G является τ-необразующей для $\mathfrak{F}$, если всегда из $\mathfrak{F} = \tau\,\mathrm{form}\,(\mathfrak{X} \cup \cup \{G\})$ следует, что $\mathfrak{F} = \tau\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F} \neq (1)$ — непустая τ-замкнутая формация n-арных групп. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Phi_\tau(\mathfrak{F})$ *состоит из всех τ-необразующих для $\mathfrak{F}$ n-арных групп;*

2) *если $\mathfrak{M}$ — τ-замкнутая подформация формации $\mathfrak{F}$, то* $\Phi_\tau(\mathfrak{M}) \subseteq \subseteq \Phi_\tau(\mathfrak{F})$.

Теорема 7. *Пусть G — неодноэлементная n-арная группа, принадлежащая τ-замкнутой формации $\mathfrak{F}$. Тогда*

$$\frac{G}{\mathrm{soc}(G)} \in \Phi_\tau(\mathfrak{F}).$$

Отметим, что следствиями теоремы 7 являются: утверждение 1. 2. 28 из [5]; соответствующая теорема работы [6]; утверждение 53. 56 из [7]. Кроме того, из теоремы 7 вытекает много новых следствий, часть из которых являются новыми и в классе бинарных групп.

1. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 158 с.
2. *Русаков С. А.* Алгебраические n-арные системы. – Минск: Навука і тэхніка, 1992.
3. *Шеметков Л. А.* О произведении формаций алгебраических систем // Алгебра и логика. – 1984. – **23**, № 26. – С. 711–729.
4. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
5. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. – Минск, 1997.
6. *Herzfeld U. C.* Frattini classes of formations of finite groups // Boll. Unione mat. ital. – 1988. – **7**. – P. 601–611.
7. *Нейман Х.* Многообразия групп. – М.: Мир, 1969. – 264 с.

Получено 30.07.99