УДК 517. 911

В. И. Ткаченко, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

Для линейной почти периодической системы с импульсным воздействием установлены условия приводимости линейной заменой с разрывной почти периодической матрицей к системе без импульсов и почти периодической по Бору правой частью. Изучается множество линейных почти периодических импульсных систем, все решения которых ограничены.

Для лінійної майже періодичної системи з імпульсною дією встановлено умови звідності лінійною заміною з розривною майже періодичною матрицею до системи без імпульсів і майже періодичною за Бором правою частиною. Вивчається множина лінійних майже періодичних імпульсних систем, всі розв'язки яких обмежені.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx / dt = A(t)x, \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x \big|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i) = B_i x, \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}$, t_i — строго возрастающая последовательность действительных чисел, $i \in \mathbb{Z}$, $x \in V^n$, $V^n \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, $A(t)$ — непрерывная функция со значениями в $L(n, V)$-множестве $(n \times n)$-матриц с элементами, принадлежащими V. Для матриц $B_i \in L(n, V)$ равномерно по $i \in \mathbb{Z}$ выполняется условие

$$0 < m \leq \| (E + B_i)^{-1} \| \leq M, \tag{2}$$

$\| \cdot \|$ — норма в V^n или соответствующая норма в $L(n, V)$, E — единичная матрица. В дальнейшем все кусочно-непрерывные функции считаем непрерывными слева.

Обозначим через $\Pi\Pi(\mathfrak{M})$ множество почти периодических последовательностей с элементами из пространства $\mathfrak{M}$[1, 2], $P\Pi(\mathfrak{M})$ — множество строго возрастающих последовательностей $\{t_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, с элементами из $\mathfrak{M}$, имеющих равностепенно почти периодические разности $t_n^j = t_{n+j} - t_n$. Разрывные почти периодические функции в смысле работ [2, 3] будем называть A-почти периодическими. Пусть $\mathcal{AP}(\mathfrak{M}, \{t_n\})$ — множество A-почти периодических функций со значениями в пространстве $\mathfrak{M}$ и разрывами в точках последовательности $\{t_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$; $\mathcal{BP}(\mathfrak{M})$ — множество почти периодических по Бору функций со значениями в пространстве $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) $A(t) \in \mathcal{BP}(L(n, V))$, $\{t_n, n \in \mathbb{Z}\} \in P\Pi(\mathbb{R})$, $\{B_i, i \in \mathbb{Z}\} \in \Pi\Pi(L(n, V))$, *замыкание множества собственных значений всех матриц* $(B_i + E)$, $i \in \mathbb{Z}$, *лежит в односвязной области комплексной плоскости, не содержащей нуля.*

Тогда существует невырожденная замена переменных $x = U(t)y$ *с кусочно-дифференцируемой матрицей* $U(t) \in \mathcal{AP}(L(n, V), \{t_n\})$, *приводящая систему* (1) *к системе без импульсов* $dy / dt = A_0(t)y$ *с непрерывной почти периодической по Бору матрицей* $A_0(t)$.

Доказательство. Докажем теорему для $V = \mathbb{R}$.

1. Построим невырожденную матрицу $U(t)$. Положим $U(t_1) = E_1$, где $E_1 = E$ или $E_1 = E' = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$,

$$\dot U(t_1) = \frac{d}{dt}U(t)\,|_{t=t_1} = 0.$$

Тогда $U(t_1 + 0) = (E + B_1)E_1$. Значение производной $\dot U(t_1 + 0)$ выбираем из условия непрерывности матрицы $A_0(t)$ в точке t_1:

$$\dot U(t_1 + 0) = [A(t_1)(E + B_1) - (E + B_1)A(t_1)]E_1.$$

Продолжим $U(t)$ на интервал $(t_1, t_2]$ так, чтобы $\dot U(t_2) = 0$, $U(t_2) = E_2$, где $E_2 = E$ или $E_2 = E'$ в зависимости от знака определителя $\det(E + B_1)E_1$, т. е. $\det(E + B_1)E_1E_2 > 0$. Представим $(E + B_1)E_1E_2$ в виде произведения C_1U_1 нижнетреугольной матрицы C_1 с положительной главной диагональю и ортогональной матрицы U_1, $\det U_1 = 1$. Матрица U_1 имеет вещественный логарифм $\ln U_1$ [4, с. 207].

Положим $U(t) = C_1(t)\exp(\varphi_1(t)\ln U_1)\exp(\psi_1(t)\ln \dot U(t_1 + 0))E_2^{-1}$, где $C_1(t)$ — невырожденная дифференцируемая матричная функция, удовлетворяющая условиям $C_1(t_1) = C_1$, $C_1(t_2) = E$, $C_1'(t_1) = C_1'(t_2) = 0$. Функция $C_1(t)$ существует в силу того, что C_1 — треугольная матрица с положительной отделенной от нуля диагональю.

Скалярные функции $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ имеют вид $\varphi_1(t) = \varphi\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)$, $\psi_1(t) = \psi\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые на $[0, 1]$ функции со свойствами $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 0$, $\psi'(0) = 1$, $\psi'(1) = 0$.

Построение функции $U(t)$ на интервалах $(t_2, t_3]$, $(t_0, t_1]$ и т. д. аналогично:

$$U(t) = C_n(t) \cdot e^{\varphi_n(t)\ln U_n}e^{\psi_n(t)\ln \dot U(t_n+0)}E_n^{-1}, \quad t \in (t_n, t_{n+1}], \tag{3}$$

где $\varphi_n(t) = \varphi\left(\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}\right)$, $\psi_n(t) = \psi\left(\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}\right)$, $C_nU_n = (E + B_n)E_nE_{n+1}$, $E_n = E$ или $E_n = E'$ в зависимости от знака $\det[(E + B_{n-1}) \ldots (E + B_1)(E + B_{n-1})E_1]$. Так построенная матричная функция $U(t)$ невырожденная, кусочно-дифференцируемая с разрывами в точках $\{t_n\}$.

2. Докажем A-почти периодичность функции $U(t)$ при разделенных моментах импульсов

$$t_n - t_{n-1} \geq \theta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

По лемме 22.10 [2] $\{A(t_n),\ n \in \mathbb{Z}\} \in \Pi\Pi(L(n, \mathbb{R}))$. Последовательность $\{\operatorname{sign}\det(E + B_n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ при условии (2) периодическая. Действительно, существует $\gamma > 0$ такое, что $|\det(E + B_i)| \geq \gamma > 0$, $i \in \mathbb{Z}$. Ввиду $\{B_n\} \in \Pi\Pi(L(n, \mathbb{R}))$ для $\gamma/3$ существует $p \in \mathbb{Z}$ такое, что для всех $i \in \mathbb{Z}$ $\|B_i - B_{i+p}\| < \gamma/3$, поэтому $\operatorname{sign}\det(E + B_i) = \operatorname{sign}\det(E + B_{i+p})$.

Как полученные с помощью элементарных операций, почти периодическими являются последовательности $\{U_n\}$, $\{C_n\}$, $\{\dot U(t_n + 0)\}$.

Следуя [5], запишем интегральную формулу Коши для $\ln U_n$

$$\ln U_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda E - U_n)^{-1} \ln\lambda \, d\lambda,$$

где Γ — замкнутый контур плоскости комплексного переменного λ, ограничивающий односвязную область Ω, содержащую замыкание множества собственных чисел матриц U_n, $n \in \mathbb{Z}$, и не содержащую точку $\lambda = 0$. При предположениях теоремы последовательность $(\lambda E - U_n)^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, ограничена и почти периодическая при $\lambda \in \Gamma$. Поэтому $\{\ln U_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \Pi\Pi(L(n, \mathbb{R}))$.

Докажем A-почти периодичность функции $\beta(t)$ вида

$$\beta(t) = \alpha\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right), \quad t \in (t_i, t_{i+1}],$$

где $\alpha(t)$ — гладкая ограниченная функция на $[0, 1]$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Используя условие (4), заключаем, что существует такое $\delta > 0$, что для t', t'', принадлежащих одному интервалу $(t_i, t_{i+1}]$ и $|t' - t''| < \delta$, выполняется неравенство $|\beta(t') - \beta(t'')| < \varepsilon$.

Для $\{t_n, n \in \mathbb{Z}\} \in P\Pi(\mathbb{R})$ и произвольного $\varepsilon_1 > 0$ существует относительно плотное множество чисел τ, для каждого из которых найдется натуральное q такое, что $|t_{j+q} - t_j - \tau| < \varepsilon_1$ $\forall j \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$t_j + \tau - \varepsilon_1 < t_{j+q} < t_j + \tau + \varepsilon_1, \tag{5}$$

$$t_{j+1} - t_j - 2\varepsilon_1 < t_{j+q+1} - t_{j+q} < t_{j+1} - t_j + 2\varepsilon_1. \tag{6}$$

Оценим $|\beta(t + \tau) - \beta(t)|$ для $|t - t_j| < \varepsilon, j \in \mathbb{Z}$ Пусть $t_j + \varepsilon_1 < t < t_{j+1} - \varepsilon_1$. Тогда из неравенства (5) следует $t_{j+q} < t + \tau < t_{j+q+1}$,

$$|\beta(t + \tau) - \beta(t)| = \left|\alpha\left(\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}\right) - \alpha\left(\frac{t + \tau - t_{j+q}}{t_{j+q+1} - t_{j+q}}\right)\right|.$$

Оценим разность аргументов

$$\Delta_j = \left|\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} - \frac{t + \tau - t_{j+q}}{t_{j+q+1} - t_{j+q}}\right| = \left|\frac{t^1_{j+q}(t - t_j) - (t + \tau)t^1_j + t_{j+q}t^1_j}{t^1_j t^1_{j+q}}\right| =$$

$$= \frac{1}{t^1_j t^1_{j+q}}\left|(t - t_j)\left(t^1_{j+q} - t^1_j\right) + t^1_j\left(t_{j+q} - t_j - \tau\right)\right| .$$

Из формулы (6) вытекает $|t^1_{j+q} - t^1_j| < 2\varepsilon_1$. Поскольку $|t - t_j| < |t_{j+1} - t_j| = t^1_j$, то

$$\Delta_j \le \frac{t^1_j \cdot 2\varepsilon_1 + t^1_j \cdot \varepsilon_1}{t^1_j t^1_{j+q}} \le \frac{3\varepsilon_1}{t^1_{j+q}} \le \frac{3\varepsilon_1}{\theta}.$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon_1 < \delta\theta / 3$. При этом условии $\Delta < \delta$ и

$$\left|\alpha\left(\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}\right) - \alpha\left(\frac{t + \tau - t_{j+q}}{t_{j+q+1} - t_{j+q}}\right)\right| < \varepsilon,$$

т. е. для $|t-t_j|\geq\varepsilon$ выполняется $|\beta(t+\tau)-\beta(t)|<\varepsilon$. По построению таких почти периодов τ относительно плотное множество. $\beta(t)$ — A почти периодическая.

В формуле (3) функции $C_n(t)$, $\varphi_n(t)$, $\psi_n(t)$ имеют вид функции $\beta(t)$. По доказанному, они A-почти периодические. Как произведение ограниченных A-почти периодических функций с одинаковыми последовательностями разрывов функция $U(t)$ A-почти периодическая.

Докажем почти периодичность по Бору матрицы $A_0(t)$. По построению $A_0(t)$ непрерывна. С другой стороны, $A_0(t)=U^{-1}(AU-\dot U)$, поэтому $A_0(t)\in\mathcal{AP}(L(n,\mathbb{R}),\{t_n\})$. Тогда для произвольного $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что если t',t'' принадлежат одному отрезку $(t_n,t_{n+1}]$ и $|t'-t''|<\delta$, то $\|A_0(t')-A_0(t'')\|<\varepsilon$. Пусть t',t'' принадлежат разным интервалам $(t_n,t_{n+1}]$. Ввиду разделенности точек t_n можно считать точки t',t'' лежащими в соседних интервалах. Тогда, так как $A_0(t)$ непрерывна,

$$\|A_0(t')-A_0(t'')\|\leq\|A_0(t')-A_0(t_n)\|+\|A_0(t_n)-A_0(t'')\|<2\varepsilon.$$

Поэтому $A_0(t)$ равномерно непрерывна на оси, в частности для $\varepsilon>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon)<\varepsilon/3$ такое, что лишь только $|t'-t''|<\delta<\varepsilon/3$, то $\|A_0(t')-A_0(t'')\|<\varepsilon/3$.

Из A-почти периодичности $A_0(t)$ следует, что для $\delta<\varepsilon/3$ существует относительно плотное множество δ-почти периодов τ, т. е. для $|t-t_n|\geq\delta$ выполняется $\|A_0(t+\tau)-A_0(t)\|<\varepsilon/3$. Тогда для произвольного $t\in\mathbb{R}$ существует t' такое, что $|t'-t_n|\geq\delta$, $|t'-t|<\varepsilon/3$ и справедлива оценка

$$\|A_0(t+\tau)-A_0(t)\|\leq\|A_0(t+\tau)-A_0(t'+\tau)\|+\|A_0(t'+\tau)-A_0(t')\|+$$
$$+\|A_0(t')-A_0(t)\|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3=\varepsilon.$$

Тем самым показано, что τ является почти периодом функции $A_0(t)$, почти периодической по Бору.

3. Пусть расположение моментов импульсного воздействия t_n произвольно. Для $\varepsilon=1$ существует относительно плотное множество чисел τ, для которых $|t_j^q-\tau|<1$ $\forall j\in\mathbb{Z}$. Выберем $\tau>2$, тогда $t_{j+q}-t_j>\tau-1>1$ $\forall j\in\mathbb{Z}$. Последовательность $\{t_{j+ql}, i\in\mathbb{Z}\}\in P\Pi(\mathbb{R})$ и ее элементы разделены. Для произвольного $\varepsilon>0$ последовательности $t_j^l, j\in\mathbb{Z}$, имеют относительно плотное множество кратных q почти периодов. Действительно, для ε/q существует относительно плотное множество почти периодов. Пусть τ — один из них, т.е. $\left|t_{j+\tau}^l-t_j^l\right|<\varepsilon/q$ $\forall j\in\mathbb{Z}$. Тогда

$$\left|t_{j+q\tau}^l-t_j^l\right|\leq\left|t_{j+q\tau}^l-t_{j+q\tau-\tau}^l\right|+\ldots+\left|t_{j+\tau}^l-t_j^l\right|<q\frac{\varepsilon}{q}=\varepsilon.$$

$q\tau$ является ε-почти периодом последовательности $t_j^l, j\in\mathbb{Z}$. Таких ε-почти периодов относительно плотное множество.

Рассмотрим подпоследовательность $\{t_{1+jq}\, j\in\mathbb{Z}\}$ последовательности $\{t_n, n\in\mathbb{Z}\}$. Ее элементы разделены и $\{t_{1+jq}\, j\in\mathbb{Z}\}\in P\Pi(\mathbb{R})$. Подпоследовательность $\{B_{1+qj}, j \in \mathbb{Z}\}$ последовательности $\{B_n, n \in \mathbb{Z}\}$ по тем же соображениям почти периодическая, имеющая для всех $\varepsilon > 0$ относительно плотное множество кратных $q\varepsilon$-почти периодов. Использовав п. 2 доказательства, построим замену переменных $x = U_1(t)y$ с $U_1(t) \in \mathcal{AP}(L(n, \mathcal{R}), \{t_{1+jq}, j \in \mathbb{Z}\})$, преобразующую импульсную систему (1) в импульсную систему с нулевыми импульсами в точках $t_{1+jq}, j \in \mathbb{Z}$. Матрица $A_1(t) = U_1^{-1}(AU_1 - \dot{U}_1)$ непрерывна на оси. По построению $A_1(t) \in \mathcal{AP}(L(n, \mathcal{R}), \{t_{1+jq}, j \in \mathbb{Z}\})$. По второй части доказательства $A_1(t) \in$ $\in \mathcal{BP}(L(n, \mathcal{R}))$.

Рассмотрим теперь последовательность импульсов $\{t_{2+jq}, j \in \mathbb{Z}\}$. Аналогично доказываем существование замены переменных $y_1 = U_2(t)y_1$ с матрицей $U_2(t) \in$ $\in \mathcal{AP}(L(n, \mathcal{R}), \{t_{2+jq}, j \in \mathbb{Z}\})$, „убивающей" импульсы в точках $t_{2+jq}, j \in \mathbb{Z}$, и почти периодической по Бору матрицей $A_2(t) = U_2^{-1}(A_1U_2 - \dot{U}_2)$.

Повторяя такую процедуру q раз, заменой $x = U_1(t)\, U_2(t) \ldots U_q(t)y = U(t)y$ приводим систему (1) к линейной непрерывной системе без импульсов и с почти периодической по Бору матрицей $A_0(t)$.

Последовательности разрывов функций $U_1(t)$ и $U_2(t)$ — это $\{t_{1+jq}\}$ и $\{t_{2+jq}\}$ соответственно. Они удовлетворяют условию $t_{2+(j-1)q} < t_{1+jq} < t_{2+jq}$, $j \in \mathbb{Z}$. Объединение этих множеств образует последовательность класса $P\Pi(\mathbb{R})$. Поэтому $U_1(t)$ и $U_2(t)$ можно рассматривать как две ограниченные A-почти периодические функции с совпадающими последовательностями разрывов. Их произведение A-почти периодично [2]. Повторяя эти рассуждения, доказываем A-почти периодичность $U(t)$.

4. В случае комплексного пространства $V = \mathbb{C}$ первая часть доказательства теоремы упрощается. Положим для всех точек $t = t_n$ $U(t_n) = E$. Тогда $U(t_n +$ $+ 0) = (E + B_n)$. Аналогично случаю $V = \mathbb{R}$ $\dot{U}(t_n) = 0$, а $\dot{U}(t_n + 0)$ выбирается из условия непрерывности матрицы $A_0(t)$. На отрезке $(t_n, t_{n+1}]$ соединяем $(E +$ $+ B_n)$ с единичной матрицей E:

$$U_n(t) = \exp(\varphi_n(t) \ln U(t_n + 0)) \exp(\psi_n(t) \dot{U}(t_n + 0)),$$

где $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, такие же, как и в случае $V = \mathbb{R}$. Для невырожденной матрицы $U(t_n + 0) = (E + B_n)$ всегда существует комплекснозначный логарифм. Доказательство A-почти периодичности функции $U(t)$ аналогично случаю $V = \mathbb{R}$. Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Теорема остается справедливой, если в системе (1) моменты импульсного воздействия разделены $t_n - t_{n-1} \geq \theta > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ и $A(t) \in \mathcal{AP}(L(n, V), \{t_n\})$.

Лемма 1. *Пусть* $\{t_n\} \in P\Pi(\mathbb{R})$, $t_n - t_{n-1} \geq \theta > 0$, $a(t) \in \mathcal{AP}(\mathfrak{M}, \{t_n\})$, $\alpha(s)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *непрерывная функция, линейная на отрезках* $[t_n, t_{n+1}]$, *и* $\alpha(n) = t_n$. *Тогда функция* $b(s) = a(\alpha(s))$ *принадлежит пространству* $\mathcal{AP}(\mathfrak{M}, \{n\})$.

Доказательство. По определению A-почти периодичности для $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для принадлежащих одному интервалу $(t_k, t_{k+1}]$ чисел t', t'' и $|t' - t''| < \delta$ выполняется $\| a(t') - a(t'') \| < \varepsilon/2$. Повторяя рассуждения леммы 23.1 из [2], можно показать, что существует относительно плотное множество Γ чисел τ таких, что τ является $\varepsilon/2$-почти периодом функции $a(t)$ и для $\tau \in \Gamma$ существует целое p такое, что $|t_{n+p} - t_n - \tau| < \delta/3$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$|\alpha(s+p) - \alpha(s) - \tau| < \delta \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Действительно, на отрезках $(t_n, t_{n+1}]$ функция $\alpha(s)$ имеет вид $\alpha(s) = t_n + (s - n)(t_{n+1} - t_n)$, поэтому для $s \in (t_n, t_{n+1}]$

$$|\alpha(s+p) - \alpha(s) - \tau| = |t_{n+p} - t_n + (s-n)(t_{n+p+1} - t_{n+p} - t_{n+1} +$$

$$+ t_n) - \tau| \le |t_{n+p} - t_n - \tau| + |s-n|\,|t^1_{n+p} - t^1_n| < \delta.$$

Оценим $\|b(s+p) - b(s)\|$ для $|s-n| > \varepsilon$:

$$\|b(s+p) - b(s)\| \le \|a(\alpha(s+p)) - a(\alpha(s) + \tau)\| + \|a(\alpha(s) + \tau) - a(\alpha(s))\|.$$

Так как τ является $\varepsilon/2$-почти периодом функции $a(t)$, то

$$\|a(\alpha(s) + \tau) - a(\alpha(s))\| < \varepsilon/2, \quad |s-n| > \varepsilon,$$

поэтому $|\alpha(s) - t_n| \ge \theta\varepsilon \ge \delta$. Ввиду (7) $\alpha(s+p)$ и $\alpha(s) + \tau$ принадлежат одному интервалу непрерывности функции $a(t)$. Отсюда следует $\|a(\alpha(s+p)) - a(\alpha(s) + \tau)\| < \varepsilon/2$. Тем самым доказано, что $\|b(s+p) - b(s)\| > \varepsilon$, для $|s-n| > \varepsilon$; $b(s)$ — A-почти периодическая.

Лемма 2. *Пусть* $\{a_n\} \in \Pi\Pi(\mathbb{C})$, $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{Z}$ *и выполняется условие* $\mathrm{cl}\,\{a_{n+1}/a_n, n \in \mathbb{Z}\} \ne S_1$, *где* $\mathrm{cl}\,M$ *— замыкание множества* M *на комплексной плоскости,* S_1 *— окружность* $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

Тогда $a_n = \exp i(nc + \omega_n)$, *где* $c = \mathrm{const}$, $\omega_n \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$.

Доказательство. Если $\mathrm{cl}\,\{b_n, n \in \mathbb{Z}\} \ne S_1$ для $\{b_n\} \in \Pi\Pi(\mathbb{C})$, $|b_n| = 1$, то $b_n = \exp i\,\beta_n$, $\{\beta_n\} \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$, $\beta \in [0, 2\pi)$. Это доказывается применением интегральной формулы Коши для β_n:

$$\beta_n = (1/i)\ln b_n = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\ln\lambda\, d\lambda}{b_n - \lambda},$$

где Γ — замкнутый контур комплексной плоскости, ограничивающий односвязную область, содержащую множество $\mathrm{cl}\,\{b_n\}$ и не содержащую точку 0.

Считаем, не умаляя общности, $|\beta_n| \le C < \pi$. Пусть $a_0 = \exp i\,\alpha_0$. Фиксируем α_0. Учитывая, что $a_{n+1} = a_n b_n = a_n e^{i\beta_n}$, последовательно однозначно строим $a_n = e^{i\alpha_n}$. Определим функцию $a(t)$ следующим образом: $a(t) = \exp i(\alpha_n + (t - n)\beta_n)$, $t \in [n, n+1]$. Функция $a(t)$ — почти периодическая по Бору. Пусть p является ε-почти периодом $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Тогда p — ε-почти период функции $a(t)$. Если $t \in (n, n+1)$, то $t + p \in (n+p, n+p+1)$ и

$$|a(t+p) - a(t)| = |e^{i(\alpha_{n+p} + (t-n)\beta_{n+p})} - e^{i(\alpha_n + (t-n)\beta_n)}| =$$

$$= |a_{n+p}e^{i(t-n)\beta_{n+p}} - a_n e^{i(t-n)\beta_n}| \le |a_{n+p} - a_n| + |e^{i(t-n)\beta_{n+p}} - e^{i(t-n)\beta_n}|.$$

Для $t \in [n, n+1]$ при $|\beta_{n+p} - \beta_n| < \varepsilon$ выполняется

$$|\beta_{n+p}(t-n) - \beta_n(t-n)| = |t-n||\beta_{n+p} - \beta_n| < \varepsilon.$$

Поэтому $|a(t+p) - a(t)| < \varepsilon$, $t \in \mathbb{R}$. По теореме об аргументе [6] существуют $c = \mathrm{const}$ и функция $\omega(t) \in \mathcal{BP}(\mathbb{R})$ такие, что $a(t) = \exp i\,(ct + \omega(t))$. Но $a(n) = a_n$, значит $a_n = \exp i\,(cn + \omega(n))$.

Теорема 2. *Пусть* $\{a_n\} \in \Pi\Pi(\mathbb{C})$ и $|a_n| = 1$. *Тогда последовательность* $\{a_n\}$ *распадается на* p *почти периодических подпоследовательностей* $\{c_s^k,\ s \in \mathbb{Z}\}$, $k = \overline{1, p}$, $c_s^k = a_{k+sp}$ *таких, что*

$$c_s^k = \exp i\,(d_k s + \alpha_k(s)),\ \ s \in \mathbb{Z},$$

где $d_k = \mathrm{const}$, $\alpha_k(s) \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$, p *— некоторое натуральное число.*

Доказательство. Пусть p является ε-почти периодом последовательности $\{a_n\}$. Тогда

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_n||(a_{n+p}/a_n) - 1| = |b_n - 1| < \varepsilon,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

При достаточно малом ε $\mathrm{cl}\{b_n, n \in \mathbb{Z}\} \neq S_1$. Согласно лемме 2 $b_n = e^{i\alpha_n}$, $\{\alpha_n\} \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$. Тогда последовательность $c_s^k = a_{k+sp}$, $s \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет условиям леммы 2. Она представима в виде $c_s^k = \exp i\,(d_k s + \alpha_k(s))$, где $\{\alpha_k(s)\} \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$, $d_k = \mathrm{const}$. Теорема доказана.

Для отделенных от нуля функций из $\mathcal{AP}(\mathbb{C}, \{t_n\})$ справедлив следующий аналог теоремы об аргументе.

Теорема 3. *Если* $a(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{C}, \{t_n\})$, $t_n - t_{n-1} \geq \theta > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $|a(t)| = 1$, *то существует функция* $\gamma(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \{t_n\})$ *и действительные числа* $d_1, \ldots, d_k$ *такие, что*

$$a(t) = \exp i\,(d_k t + \gamma(t)),\ \ t \in (t_{k+sp-1}, t_{k+sp}],\ \ s \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Доказательство. Докажем сначала представление (8) для функции $b(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{C}, \{n\})$, $|b(t)| = 1$.

Если такая функция $b(t)$ дополнительно удовлетворяет условию $b(n) = 1$, то $b(t) = \exp i\,\omega(t)$, где $\omega(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \{n\})$. Докажем это. На каждом участке непрерывности построим непрерывную функцию $\omega(t)$, удовлетворяющую условию $b(t) = \exp i\,\omega(t)$, $\omega(n) = 0$. Для ε-почти периода q функции $b(t)$ выполняется $|b(t+q) - b(t)| < \varepsilon$, $|t-n| > \varepsilon$. Заметим, что q целое. Из доказательства теоремы об аргументе функции из $\mathcal{BP}(\mathbb{C})$ [6] следует, что для $t \in [n-1, n]$ существует целое k_n такое, что $|\omega(t+q) - \omega(t) - 2\pi k_n| < \varepsilon$. Но $\omega(n+q) = \omega(n) = 0$, поэтому $k_n = 0$, а $\omega(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}, \{n\})$.

Пусть теперь функция $b(t)$ в точках $t = n$ принимает значения b_n, $\{b_n\} \in \Pi\Pi(\mathbb{C})$. По теореме 2 существует натуральное p такое, что $b_{k+sp} = \exp i\,(d_k sp + \beta_{k+sp})$, $s \in \mathbb{Z}$. Тогда для $t \in (k+sp-1, k+sp]$

$$b(t) = \exp i\,(\omega(t) + d_k sp + \beta_{k+sp}) =$$

$$= \exp i\,[d_k t + d_k(sp - t) + \beta_{k+sp} + \omega(t)] = \exp i[d_k t + \gamma_k(t)]. \tag{9}$$

Функция $\gamma_k(t)$ определена для $t \in (k+sp-1, k+sp]$, $s \in \mathbb{Z}$. Она A-почти периодическая для этих t. Рассматривая интервалы для всех $k = \overline{1, p}$, легко показать, что функция $\gamma(t)$, равная $\gamma_k(t)$ для $t \in (k+sp-1, k+sp]$, A-почти периодическая.

Функция $a(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{C}, \{t_n\})$ по лемме 1 представима в виде $a(t) = b(\delta(t))$, где $\delta(t) = n + \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n}$, $t \in (t_n, t_{n+1}]$. Подставляя это выражение в (9), получаем формулу (8). Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $a(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{C}, \{t_n\})$, $t_n - t_{n-1} \ge \theta > 0$, $|a(t)| = 1$. *Обозначим* $b_n = \frac{a(t_n+0)}{a(t_n)}$. *Тогда существует натуральное* p *такое, что последовательность* $c_n = b_n b_{n+1} \ldots b_{n+p-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, *имеет вид* $c_n = \exp i\,\gamma_n$, $\gamma_n \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$.

Доказательство. Используя представление (8), получаем

$$b_n = \frac{a(t_n+0)}{a(t_n)} = \exp i\,[(d_2-d_1)t_n + \alpha(n+0) - \alpha(n)],$$

$$b_{n+1} = \frac{a(t_{n+1}+0)}{a(t_{n+1})} = \exp i\,[(d_3-d_2)t_{n+1} + \alpha(n+1+0) - \alpha(n+1)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{n+p-1} = \frac{a(t_{n+p-1}+0)}{a(t_{n+p-1})} = \exp i\,[(d_1-d_p)t_{n+p-1} + \alpha(n+p-1+0) - \alpha(n+p-1)].$$

Тогда

$$b_n \ldots b_{n+p-1} = \exp i\,[(d_3-d_2)(t_{n+1}-t_n) + \ldots + (d_1-d_p)(t_{n+p-1}-t_n) + \omega(n)],$$

где $\omega(n) \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$ как сумма почти периодических последовательностей. По определению, $\{t_n\} \in P\Pi(\mathbb{R})$, поэтому разности $t_{n+j} - t_n$ почти периодические по n. Отсюда следует вид последовательности $\{c_n\}$.

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} dx/dt &= 0, \quad t \ne n, \\ \Delta x|_{t=n} &= (e^{in}-1)x, \end{aligned} \tag{10}$$

$x \in \mathbb{C}$. Для этой системы не существует замены переменных $x = U(t)y$, $U(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{C}, \{n\})$, $|U(t)| \ge \alpha > 0$, приводящей ее к уравнению с почти периодическим по Бору коэффициентом без импульсов. В противном случае должна существовать отделенная от нуля функция $U(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{C}, \{n\})$, для которой $b_n = \dfrac{U(n+0)}{U(n)} = e^{in}$, что невозможно в силу следствия 1. Заметим, что последовательность $c_n = n \pmod{2\pi}$ не почти периодическая. Она не имеет ε-почти периодов для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Запишем действительнозначный аналог системы (10):

$$\begin{aligned} dy/dt &= 0, \quad t \ne n, \\ \Delta y &= (B_n - E)\,y, \end{aligned} \tag{11}$$

где $y \in \mathbb{R}^2$, $B_n = \begin{pmatrix} \cos n & \sin n \\ -\sin n & \cos n \end{pmatrix}$. Для системы (11) не существует замены переменных $y = U(t)z$ с $U(t) \in \mathcal{AP}(\mathbb{R}^2, \{n\})$, приводящей ее к системе с почти периодической по Бору матрицей и без импульсов. Все решения систем (10) и (11) ограничены, но не почти периодические.

Определение. *Расстоянием между системой* (1) *и системой*

$$dx / dt = A'(t)x, \quad t \neq t'_j, \qquad \Delta x \big|_{t = t'_j} = B'_j x \tag{12}$$

назовем число

$$d((1), (12)) = \max(\sup_{t \in \mathbb{R}} \| A(t) - A'(t) \|, \sup_{j \in \mathbb{Z}} \| t_j - t'_j \|, \sup_{j \in \mathbb{Z}} \| B_j - B'_j \|). \tag{13}$$

Рассмотрим множество $UP(n)$ систем (1), удовлетворяющих условиям:

1) $\{t_n\} \in P\Pi(\mathbb{R})$;

2) $A(t) \in \mathcal{BP}(L(n, \mathbb{C}))$, $A(t) + A^*(t) = 0$, $A^*(t)$ — сопряженная матрица;

3) $B_j \in \Pi\Pi(L(n, \mathbb{C}))$, причем матрицы $(B_j + E)$ унитарные, $j \in \mathbb{Z}$.

Все решения систем из $UP(n)$ ограничены. Обозначим через $UP_{\mathrm{sol}}(n)$ множество систем из $UP(n)$, все решения которых A-почти периодические.

Теорема 4. *В* $UP(n)$ *существуют области, не принадлежащие множеству* $UP_{\mathrm{sol}}(n)$.

Доказательство. Покажем, что окрестность системы (10) в множестве $UP(1)$ не принадлежит множеству $UP_{\mathrm{sol}}(1)$. Пусть система (12) при $x \in \mathbb{C}$, $t_j = j$, $j \in \mathbb{Z}$ принадлежит достаточно малой ε-окрестности системы (10). Тогда $\{B'_j\} \in \Pi\Pi(\mathbb{C})$ и $\sup | B'_j - e^{j n} | < \varepsilon$, поэтому $B'_j = \exp i\ (j + \beta_j)$, $\{\beta'_j\} \in \Pi\Pi(\mathbb{R})$; $A'(t) = ia'(t)$, $a'(t) \in \mathcal{BP}(\mathbb{R})$. Решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$ системы (12) лежит на окружности радиуса $|x_0|$. Оно имеет в точках $t = j$ скачки $b_j = \frac{x(j+0)}{x(j)} = \exp i\,(j + \beta_j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Согласно следствию 1 $x(t)$ не может быть A-почти периодическим.

Если в системе (12) $t_j \neq j$ и $\sup\limits_j | t_j - j | < \varepsilon$, то используя лемму 1, заменой времени сводим (12) к системе с импульсами в точках $t = j$, $j \in \mathbb{Z}$. Она лежит в окрестности системы (10) и согласно изложенному выше не имеет A-почти периодических решений.

При $n \geq 2$ система (12) с $x \in \mathbb{C}^n$, $A'(t) = 0$, $t_j = j$, $B'_j = \mathrm{diag}\,(e^{i\,j}, \ldots, e^{i\,j})$, $j \in \mathbb{Z}$, $i = \sqrt{-1}$, имеет окрестность в $UP(n)$, не принадлежащую $UP_{\mathrm{sol}}(n)$.

Замечание 2. Окрестность системы (11) в множестве двухмерных действительнозначных систем $UP(2)$ не принадлежит множеству $UP_{\mathrm{sol}}(2)$.

В случае систем без импульсов множество $UP_{\mathrm{sol}}(1)$ всюду плотно в множестве $UP(1)$ [7], в отличие от утверждения теоремы 4 для импульсных систем.

1. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971.– 309 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. – Киев, 1983. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 26).
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
6. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
7. *Kurzweil J., Velkovska A.* On linear differential equations with almost periodic coefficients and the property that the unit sphere is invariant // Lect. Notes Math. – 1983. – **1017**.– P. 364 – 368.

Получено 22. 04. 91