УДК 517.937

Ю. С. Эйдельман, канд. физ.-мат. наук (Воронеж. политехн. ин-т)

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости некоторых задач об определении неизвестной правой части дифференциального уравнения с неограниченным операторным коэффициентом по дополнительному краевому условию.

Одержані необхідні та достатні умови однозначної розв'язності деяких задач про визначення невідомої правої частини диференціального рівняння з необмеженним операторним коефіцієнтом за додатковою крайовою умовою.

1. В банаховом пространстве E рассматривается дифференциальное уравнение первого порядка

$$dv / dt = Av + f(t) + \varphi(t)p \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$v(0) = v_0, \ v(t_1) = v_1. \tag{2}$$

Здесь A — линейный неограниченный оператор, $f(t)$ и $\varphi(t)$ — непрерывные на отрезке $[0, t_1]$ соответственно векторная и скалярная функции, p — неизвестный параметр, принадлежащий E.

Аналогичная задача ставится для уравнения второго порядка:

$$d^2v / dt^2 = Av + f(t) + \varphi(t)p, \tag{3}$$

$$v(0) = v_0, \ v(t_1) = v_1, \ v'(0) = \hat{v}_0. \tag{4}$$

В задачах (1), (2) и (3), (4) одно из краевых условий является дополнительным. По этому условию требуется определить неизвестный элемент p в правой части дифференциального уравнения и соответствующее ему решение $v(t)$.

Задачи такого вида подробно изучались для $\varphi(t) \equiv 1$ (см. [1]) и для уравнений с самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве [2]. В настоящей работе при переменной $\varphi(t)$ и операторе A с, вообще говоря, неплотной областью определения делается предположение о равномерной непрерывности при $t > 0$ соответствующей оператору A полугруппы. При таком требовании с помощью теории Гельфанда устанавливаются необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемых задач в терминах расположения спектра неограниченного оператора и свойств функции $\varphi(t)$.

В статье используются обозначения: $D(U)$, $\rho(U)$, $\sigma(U)$, $R(\lambda; U) = (\lambda I - U)^{-1}$ — соответственно область определения, множество регулярных точек, спектр и резольвента оператора U; $L(E)$ — банахова алгебра линейных ограниченных преобразований пространства E в себя; $C\{I; G\}$ и $C^k\{I; G\}$ — пространства соответственно непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на промежутке I функций со значениями в банаховом пространстве G.

2. Следуя терминологии работы [3], введем следующие понятия.

***Определение* 1.** *Решением уравнения* (1) *называется функция* $v(t) \in C\{[0, t_1]; E\} \cap C^1\{(0, t_1]; E\} \cap C\{(0, t_1]; D(A)\}$, *удовлетворяющая этому уравнению при* $t \in (0, t_1]$. *Если* $v(t) \in C^1\{[0, t_1]; E\} \cap C\{[0, t_1]; D(A)\}$ *и удовлетворяет уравнению* (1) *на отрезке* $[0, t_1]$, *то такое решение называется строгим.*

Определение 2. *Решением уравнения* (3) *называется функция* $v(t) \in C\{[0, t_1]; E\} \cap C^2\{(0, t_1); E\} \cap C\{(0, t_1); D(A)\}$, *удовлетворяющая этому уравнению при* $t \in (0, t_1)$. *Если* $v(t) \in C^2\{[0, t_1]; E\} \cap C\{[0, t_1]; D(A)\}$ *и удовлетворяет уравнению* (3) *на отрезке* $[0, t_1]$, *то такое решение называется строгим.*

Определение 3. *Пара* $(v(t), p)$ *называется решением задачи* (1), (2), *если функция* $v(t)$ *является решением уравнения* (1) *с данным значением* p *и удовлетворяет краевым условиям* (2). *Если при этом решение* $v(t)$ *— строгое, то и* $(v(t), p)$ *будем называть строгим решением. Аналогично определяется решение и строгое решение задачи* (3), (4).

Относительно оператора A в уравнении (1) предполагаются выполненными следующие требования:

α_1) множество $\rho(A)$ непусто;

α_2) существует полугруппа $T(t)$ принадлежащих $L(E)$ операторов, которая непрерывна при $t > 0$ в равномерной операторной топологии и ограничена по норме, т. е. $\sup\limits_{t \in (0, t_1]} \| T(t) \| < \infty$;

α_3) $\lim\limits_{t \to 0+} T(t)x = x, x \in D(A)$;

α_4) $\dfrac{d}{dt} T(t)x = A\,T(t)x = T(t)A\,x, x \in D(A)$.

Плотность $D(A)$ в E не предполагается.

Условиям α_1) — α_4) удовлетворяет оператор, для которого при некотором вещественном w справедлива оценка

$$\| R(z; A) \| \le M / (1 + |z|), \ \operatorname{Re} z \ge w. \tag{5}$$

Уравнения с таким оператором называются абстрактными параболическими. Соответствующая полугруппа $T(t)$ выражается через резольвенту в явном виде с помощью интеграла Данфорда [3, с. 308; 4, с. 87].

Если условие α_4) справедливо при $t = 0+$, то A является производящим оператором $T(t)$ в обычном смысле.

Другие данные задачи (1), (2) удовлетворяют условиям

β) $\varphi(t) \in C^1[0, t_1]$;

γ_1) $v_0, v_1 \in D(A), f(t) \in C^1\{[0, t_1]; E\}$.

Данные задачи (3), (4) удовлетворяют следующим требованиям:

α_5) $A = A_0^2$, где оператор A_0 удовлетворяет условиям α_1) — α_4);

γ_2) $v_0, v_1 \in D(A)$, $\dot v_0 \in D(A), f(t) \in C^1\{[0, t_1]; E\}$.

Условию α_5) удовлетворяет позитивный оператор [4, с. 304, 305]. Уравнения с таким оператором называются эллиптическими.

3. Перейдем к изложению результатов. Теоремы 1 и 3 формулируются в предположениях, что $v_0, v_1, f(t), \dot v_0$ — любые данные, удовлетворяющие соответственно условиям γ_1) и γ_2).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* α_1) — α_4) *и* β).

Задача (1), (2) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены требования: если* $\int_0^{t_1} \exp\{z(t_1 - s)\}\, \varphi(s)\, ds = 0$, *то* $z \in \rho(A)$; $\varphi(t_1) \ne 0$.

Поскольку $D(A)$ может не быть полным в E, то для того, чтобы решение было строгим, должно выполняться условие согласования.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(t_1) \neq 0$. *Если*

$$\varphi(0)(Av_1 + f(t_1)) - \varphi(t_1)(Av_0 + f(0)) \in \overline{D(A)}, \tag{6}$$

то решение $(v(t), p)$ *задачи* (1), (2) *является строгим.*

Теоремы 1 и 2 обобщают соответствующий результат работы [1] на случай $\overline{D(A)} \neq E$.

Аналогичные утверждения справедливы для задачи (3), (4).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* α_5) *и* β).

Задача (3), (4) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнены требования: если* $\int_0^{t_1} (\operatorname{sh}\{z(t_1 - s)\}/z)\,\varphi(s)\,ds \neq 0$, *то* $z^2 \in \rho(A)$; $\varphi(0) \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(0) \neq 0$. *Если*

$$\varphi(0)(Av_1 + f(t_1)) - \varphi(t_1)(Av_0 + A_0\dot{v}_0 + f(0)) \in \overline{D(A_0)}, \tag{7}$$

то решение $(v(t), p)$ *задачи* (3), (4) *является строгим.*

4. Докажем сформулированные утверждения.

Приведенные выше условия позволяют применить стандартные формулы для решения рассматриваемых дифференциальных уравнений при $\overline{D(A)} \neq E$. Рассмотрим уравнение

$$dv/dt = Av + g(t),\ 0 < t \leq t_2,\ t_2 \leq t_1. \tag{8}$$

Лемма. *Пусть оператор* A *удовлетворяет условиям* α_1) — α_4), *а* $g(t) \in C^1\{[0, t_1]; E\}$.

Тогда функция $y(t) = \int_0^t T(t-s)g(s)\,ds$ *является решением уравнения* (8) *и удовлетворяет соотношению*

$$Ay(t) = T(t)g(0) + \int_0^t T(t-s)g'(s)\,ds - g(t). \tag{9}$$

Каждое решение (8) *определяется равенством* $v(t) = T(t)v(0) + y(t)$.

Доказательство леммы непосредственно вытекает из теорем и формул, приведенных в [4, с. 158 – 160, 164, 170, 171].

***Замечание* 1.** Если условиям α_1) – α_4) удовлетворяет оператор $-A$, то решение уравнения (8) представимо в виде

$$v(t) = T(t_2 - t)v(t_2) - \int_t^{t_2} T(s-t)g(s)\,ds, \tag{10}$$

где $T(\tau)$ — полугруппа, соответствующая оператору $-A$, а интегральный член удовлетворяет соотношению

$$-A\int_t^{t_2} T(s-t)g(s)\,ds = T(t_2 - t)g(t_2) - g(t) - \int_t^{t_2} T(s-t)g'(s)\,ds,\ 0 \leq t < t_2. \tag{11}$$

***Доказательство теоремы* 1.** В силу леммы и условий γ_1) и β) каждое решение уравнения (1) можно представить в виде

$$v(t) = T(t)v(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds + \int_0^t T(t-s)\,\varphi(s)p\,ds,$$

откуда, учитывая краевые условия (2), получаем уравнение относительно неизвестного p

$$Bp = \int_0^{t_1} T(t_1 - s)\,\varphi(s)p\,ds = w, \tag{12}$$

где

$$w = v_1 - T(t_1)v_0 - \int_0^{t_1} T(t_1 - s) f(s)\, ds. \tag{13}$$

Однозначная разрешимость задачи (1), (2) при любых данных, удовлетворяющих условию γ_1), равносильна существованию при любом $w \in D(A)$ единственного решения уравнения (12), что, в свою очередь, эквивалентно тому, что для оператора $W = (\lambda_0 I - A)B$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, нуль является регулярной точкой.

Как показано в [4, с. 43 — 45] из условий $\alpha_1) - \alpha_4)$ вытекает, что при некотором вещественном w оператор A в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > w$ имеет резольвенту, которая представима в виде

$$R(\lambda, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)\, dt. \tag{14}$$

В силу условия α_2) этот интеграл сходится по норме пространства $L(E)$.

Операторы $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \rho(A)$; $T(t)$, $t > 0$ образуют семейство коммутирующих друг с другом операторов. Каждое такое семейство содержится [5, с. 315] в некоторой замкнутой коммутативной алгебре M, входящей в алгебру $L(E)$. При этом для каждого $H \in M$ его спектр как элемента M совпадает с $\sigma(H)$. Пусть $S(M)$ — множество комплексных ненулевых гомоморфизмов $m: M \to \mathbb{C}$ [5, с. 259]. Тогда [5, с. 297] для каждого $H \in M$

$$\sigma(H) = \{m(H): m \in S(M)\}. \tag{15}$$

Далее [6, с. 203 — 205], $S(M)$ можно представить в виде $S(M) = S_1 \cup S_0$, где

$$m(R(\lambda; A)) = 1/(\lambda - z(m)),\ m \in S_1, \tag{16}$$

причем $\{z(m): m \in S_1\} = \sigma(A)$ и

$$m(R(\lambda; A)) \equiv 0,\quad m \in S_0. \tag{17}$$

Применяя к (14) гомоморфизмы из $S(M)$, получаем

$$m(R(\lambda; A)) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t)\, m(T(t))\, dt,$$

откуда в силу (16), (17) и свойств преобразования Лапласа имеем

$$m(T(t)) = \exp\{z(m)t\},\ m \in S_1, \tag{18}$$

$$m(T(t)) = 0,\ m \in S_0,\ t > 0. \tag{19}$$

Пусть $m \in S_1$. Тогда, поскольку $(\lambda_0 I - A)^{-1} W = B$, в силу (16), (18) и (12) с учетом сходимости интеграла (12) по норме пространства $L(E)$ получим

$$(\lambda_0 - z(m))^{-1} m(W) = \int_0^{t_1} \exp\{z(m)(t_1 - s)\}\, \varphi(s)\, ds, \tag{20}$$

где $\{z(m): m \in S_1\} = \sigma(A.)$.

Пусть $m \in S_0$. Тогда в силу (12) и (17) $m(B) = 0$ и поэтому $m(W) = m(\lambda_0 B - - AB) = -m(AB)$. В силу (9)

$$AB = T(t_1)\varphi(0) + \int_0^{t_1} T(t_1 - s)\, \varphi'(s)\, ds - \varphi(t_1) I \tag{21}$$

и, таким образом, в силу (19)

$$m(W) = \varphi(t_1), m \in S_0. \tag{22}$$

Из соотношений (20) и (22) в силу (15) вытекает утверждение теоремы.

Замечания. 2. Требование дифференцируемости функции $f(t)$ можно заменить на $f(t) \in C\{[0, t_1]; D(A)\}$.

3. Если оператор A удовлетворяет условию (5), то требования на $v_0, f(t)$ можно ослабить до ограничений $v_0 \in \overline{D(A)}, f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера [3].

Доказательство теоремы 2. Как показано в [3, с. 309], из (14) вытекает, что оператор A удовлетворяет условиям Хилле – Филлипса. Поэтому в силу теоремы [3, с. 301] для доказательства теоремы 2 требуется показать, что $q = A v_0 + \varphi(0)p + f(0) \in \overline{D(A)}$.

В силу условия α_4)

$$T(t)x = T(t)(\lambda I - A)R(\lambda; A)x = \lambda R(\lambda; A)T(t)x - \\ - \frac{d}{dt} T(t)R(\lambda; A)x \in \overline{D(A)}, t > 0, x \in E.$$

Поэтому из (21), (13) и (9) вытекает

$$ABx = -\varphi(t_1)x + r, x \in E, \tag{23}$$

$$Aw = Av_1 + f(t_1) + r. \tag{24}$$

Здесь и далее r означает некоторый элемент $\overline{D(A)}$.

Так как p — решение (12), с учетом (21) и (24) имеем

$$ABq = -\varphi(t_1)Av_0 + \varphi(0)ABp - \varphi(t_1)f(0) + r = \\ = -\varphi(t_1)(Av_0 + f(0)) + \varphi(0)(Av_1 + f(t_1)) + r,$$

т. е. в силу (23)

$$q = (1/\varphi(t_1))[\varphi(t_1)(Av_0 + f(0)) - \varphi(0)(Av_1 + f(t_1))] + r,$$

откуда в силу (6) следует требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 3. Запишем уравнение (3) в виде

$$d^2v/dt^2 - A_0^2 v = \varphi(t)p + f(t),$$

или

$$dw/dt - A_0 w = \varphi(t)p + f(t), \tag{25}$$

где

$$w(t) = dv/dt + A_0 v. \tag{26}$$

Пусть $T(t)$ — полугруппа, соответствующая оператору $-A_0$ по правилам α_3), α_4). В силу условия γ_2) и замечания к лемме решение уравнения (25) можно представить в виде

$$w(t) = T(t_1 - t)w_1 + (G\varphi)(t)p + (Gf)(t), \tag{27}$$

где

$$w(t_1) = w_1 \in D(A_0), (Gh)(t) = -\int_t^{t_1} T(\tau - t)h(\tau)d\tau. \tag{28}$$

Поскольку все слагаемые в (27) принадлежат $C^1\{[0, t_1]; E\}$, функцию $v(t)$

согласно лемме представим в виде

$$v(t) = T(t)v(0) + \int_0^t T(t-s)w(s)ds,$$

откуда с учетом (27), (28) получим

$$v(t) = T(t)v(0) + D(t)w_1 + (F\varphi)(t)p + (Ff)(t), \tag{29}$$

где

$$D(t) = \int_0^t T(t-s)T(t_1-s)ds = \int_0^t T(t_1+t-2s)ds, \tag{30}$$

$$(Fh)(t) = \int_0^t T(t-s)(Gh)(s)ds. \tag{31}$$

В силу краевых условий (4) из (29) и (27) с учетом (26) получаем соотношения

$$T(t_1)v_0 + D(t_1)w_1 + (F\varphi)(t_1)p + (Ff)(t_1) = v_1,$$

$$T(t_1)w_1 + (G\varphi)(0)p + (Gf)(0) = \dot v_0 + A_0 v_0.$$

Неизвестными здесь являются элементы $p \in E$, $w_1 \in D(A_0)$, относительно которых получим систему

$$\begin{aligned} D(t_1)w_1 + (F\varphi)(t_1)p &= v_1 - (Ff)(t_1) - T(t_1)v_0, \\ T(t_1)w_1 + (G\varphi)(0)p &= \dot v_0 + A_0v_0 - (Gf)(0). \end{aligned} \tag{32}$$

Пусть $\lambda_0 \in \rho(A_0)$. Применяя к первому уравнению системы оператор $(\lambda_0 I - A_0)^2$, а ко второму — оператор $\lambda_0 I - A_0$, и, обозначая $(\lambda_0 I - A_0)w_1 = q$, $(\lambda_0 I - A_0)^2(v_1 - (Ff)(t_1) - T(t_1)v_0) = a_1$, $(\lambda_0 I - A_0)(\dot v_0 + A_0 v_0 - (Gf)(0)) = a_2$, получаем систему

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I - A_0)D(t_1)q + (\lambda_0 I - A_0)^2(F\varphi)(t_1)p &= a_1, \\ T(t_1)q + (\lambda_0 I - A_0)(G\varphi)(0)p &= a_2. \end{aligned} \tag{33}$$

Коэффициентами этой системы являются принадлежащие $L(E)$ коммутирующие друг с другом операторы. Однозначная разрешимость исходной задачи при любых данных, удовлетворяющих условию γ_2), равносильна существованию единственного решения (33) при любых $a_1, a_2 \in E$, что в свою очередь эквивалентно существованию матрицы, обратной матрице системы. Последнее утверждение справедливо тогда и только тогда [7, с. 423], когда определитель системы — оператор $W = (\lambda_0 I - A_0)^2 B$, где $B = D(t_1)(G\varphi)(0) - T(t_1)(F\varphi)(t_1)$, — имеет принадлежащий $L(E)$ обратный.

В силу (28), (30), (31) имеем

$$B = -\int_0^{t_1} T(2t_1 - 2s)\,ds \int_0^{t_1} T(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + T(t_1)\int_0^{t_1} T(t_1 - s) \times$$

$$\times \int_s^{t_1} T(\tau - s)\,\varphi(\tau)\,d\tau\,ds = \int_0^{t_1} \varphi(\tau)\,d\tau \int_0^{\tau} T(2t_1 + \tau - 2s)\,ds -$$

$$- \int_0^{t_1} \varphi(\tau)\,d\tau \int_0^{t_1} T(2t_1 + \tau - 2s)\,ds,$$

т. е.

$$B = -\int_0^{t_1}\int_\tau^{t_1} T(2t_1+\tau-2s)\,ds\,\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{34}$$

Из формулы, приведенной в [3, с. 308], вытекает равенство

$$-A_0\int_{s_1}^{s_2} T(\tau)d\tau = T(s_2)-T(s_1), \tag{35}$$

поэтому внутренний интеграл в (34) удовлетворяет соотношению

$$-A_0\int_\tau^{t_1} T(2t_1+\tau-2s)\,ds = (1/2)[T(2t_1-\tau)-T(\tau)].$$

Далее, в силу (9) и (11)

$$A_0^2B = -(1/2)A_0\int_0^{t_1} T(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau + (1/2)A_0T(t_1)\int_0^{t_1} T(t_1-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau =$$
$$= (1/2)\{-\varphi(0)I + T(t_1)\,\varphi(t_1) - T(2t_1)\,\varphi(0) + T(t_1)\,\varphi(t_1) -$$
$$-\int_0^{t_1}[T(\tau)+T(2t_1-\tau)]\,\varphi'(\tau)\,d\tau\}. \tag{36}$$

Дальнейшие рассуждения такие же, как и при доказательстве теоремы 1. При $m\in S_1$ имеем $m(W) = (\lambda_0-z(m))^2\,m(B)$, откуда в силу (34)

$$m(W) = -(\lambda_0-z(m))^2\int_0^{t_1}\int_\tau^{t_1}\exp\{-z(m)\,(2t_1+\tau-2s)\}\,ds\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

или

$$m(W) = -\frac{\exp\{-z(m)t_1\}}{(\lambda_0-z(m))^2}\int_0^{t_1}\frac{\operatorname{sh}\{z(m)(t_1-\tau)\}}{z(m)}\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{37}$$

где $\{z(m)\colon m\in S_1\} = \sigma(A_0)$.

При $m\in S_0$ в силу (36) имеем

$$m(W) = m(AB) = -(1/2)\,\varphi(0). \tag{38}$$

Далее, если

$$g(z) = \int_0^{t_1}(\operatorname{sh}\{z(t_1-s)\}/z)\,\varphi(s)\,ds = 0$$

и $z\in\sigma(-A_0)$, то $g(-z)=0$ и $-z\in\sigma(A_0)$. С учетом этого замечания из (37) и (38) в силу (15) вытекает утверждение теоремы.

***Доказательство теоремы* 4.** В силу теоремы [3, с. 301] требуется проверить, что

$$q = A_0w_1+\varphi(t_1)p+f(t_1)\in\overline{D(A_0)},$$
$$-A_0v_0+w(0)\in\overline{D(A_0)}.$$

Поскольку в силу (26) $-A_0v_0+w(0) = \dot v_0$, второе требование в силу условия γ_2) выполняется автоматически.

Для проверки первого соотношения проведем такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 2. Так как $T(t)x\in\overline{D(A_0)}$ для всех $x\in E$, из (36) вытекает $ABx = (-1/2)\varphi(0)x+r$. Поскольку $\{w_1,p\}$ — решение системы (32), то

$$ABq = ABA_0w_1 + \varphi(t_1)ABp + ABf(t_1) = A_0(G\varphi)(0)(Av_1 -$$
$$- A(Ff)(t_1) - T(t_1)Av_0) - A(F\varphi)(t_1)(A_0\dot{v}_0 + Av_0 -$$
$$- A_0(Gf)(0)) + \varphi(t_1)[A_0D(t_1)(A_0\dot{v}_0 + Av_0 - A_0(Gf)(0)) -$$
$$- T(t_1)(Av_1 - A(Ff)(t_1) - T(t_1)Av_0)] + ABf(t_1).$$

Выделим в этом выражении члены, которые могут не принадлежать $\overline{D(A_0)}$. В силу (28) и (11)

$$A_0(Gh)(t) = T(t_1 - t)\,h(t_1) - h(t) - \int_t^{t_1} T(\tau - t)\,h'(\tau)\,d\tau; \tag{39}$$

в силу (30) и (35)

$$A_0D(t_1) = A_0\int_0^{t_1} T(2t_1 - 2s)\,ds = (1/2)\,[I - T(2t_1)];$$

в силу (31), (39), (35) и (9)

$$A_0(Fh)(t_1) = A_0\int_0^{t_1} T(t_1 - s)\,\{T(t_1 - s)h(t_1) - h(s) - \int_s^{t_1} T(\tau - s)h'(\tau)\,d\tau\}\,ds =$$
$$= (1/2)\,[I - T(2t_1)]\,h(t_1) + T(t_1)h(0) + \int_0^{t_1} T(t_1 - s)h'(s)\,ds -$$
$$- h(t_1) + \int_0^{t_1} h'(\tau)\,d\tau\,(-A_0)\int_0^{\tau} T(t_1 + \tau - 2s)\,ds = -(1/2)h(t_1) -$$
$$- (1/2)T(2t_1)\,h(t_1) + T(t_1)\,h(0) + (1/2)\int_0^{t_1} [T(t_1 - \tau) + T(t_1 + \tau)]\,h'(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, получаем

$$-(1/2)\varphi(0)q = -\varphi(0)(Av_1 + \tfrac{1}{2}f(t_1)) + (1/2)\varphi(t_1)(A_0\dot{v}_0 + Av_0 + f(0)) +$$
$$+ \varphi(t_1)(1/2)(A_0\dot{v}_0 + Av_0 + f(0)) - (1/2)\varphi(0)f(t_1) + r =$$
$$= \varphi(t_1)(A_0\dot{v}_0 + Av_0 + f(0)) - \varphi(0)(Av_1 + f(t_1)) + r,$$

откуда в силу $\varphi(0) \neq 0$ и условия (7) следует $q \in \overline{D(A_0)}$.

1. *Эйдельман Ю. С.* Условия разрешимости обратных задач для эволюционных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – №7. – С. 24 – 27.
2. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, №9. – С. 1598 – 1608.
3. *Da Prato G., Sinestrari E.* Differential operators with non–dense domain // Ann. Scuola norm. super. Pisa Sci. fis. e mat. – 1987. – **14**, №2. – P. 285 – 344.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М. : Наука, 1967. – 464 с.
5. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М. : Мир, 1975. – 448 с.
6. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 832 с.
7. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. – М. : Наука, 1962. – 480 с.

Получено 04. 06. 91