УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко, асп.(Ин-т математики АН Украины, Киев),
В. В. Листопад, асп. (Киев. пед. ин-т),
И. А. Шевчук, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МОНОТОННОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Установлена равномерная оценка для монотонной аппроксимации многочленами функций с ухудшающейся гладкостью на концах отрезка.

Встановлена рівномірна оцінка для монотонної апроксимації многочленами функцій з гладкістю, що погіршується на кінцях відрізка.

Профессор R. A. De Vore в беседе с И. А. Шевчуком высказал предположение, что, используя способ доказательства статьи [1], можно получить следующий результат.

Теорема. *Пусть* $r \in N$, $r > 2$; $I := [-1; 1]$. *Если возрастающая и непрерывная на* I *функция* $f = f(x)$ *имеет на* $(-1; 1)$ *локально абсолютно непрерывную* $(r-1)$*-ю производную и* $|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \le 1$ *почти при всех* $x \in I$, *то для каждого натурального* $n \ge r-1$ *найдется возрастающий на* I *алгебраический многочлен* $P_n = P_n(x)$ *степени* $\le n$ *такой, что*

$$|f(x) - P_n(x)| \le cn^{-r}, \; c = c(r) = \text{const}, \; x \in I. \tag{1}$$

Для случаев $r = 1, 2$ справедливость данной теоремы установлена в работе [2].

Отметим, что соответствующие оценки для аппроксимации без ограничений получены в работе [3] (см. также [4], гл. IX).

В настоящей статье доказывается сформулированная выше теорема.

1. Воспользуемся следующими обозначениями из [1]: $g = g(x)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция; $L(x, g, [a, b])$ — многочлен Лагранжа степени $\le r-2$, который интерполирует функцию g в точках $a + i(b-a)/(r-2)$, $i = \overline{0, r-2}$; $\Phi = \Phi(x)$ — дифференцируемая на I функция;

$$\mathcal{L}(x, \Phi) = \Phi(-1) + \int_1^x L(y, \Phi', [-1 + 2/r; 1 - 2/r])\, dy;$$

c_i — различные положительные числа, которые зависят от r;

$$\Delta_n(y) := n^{-2} + \sqrt{1-y^2}\,/n, \; y \in I, \; \Delta := \Delta_n(x), \; x \in I;$$

$$\beta := \arccos x, \; x \in I, \; \alpha := \arccos y, \; y \in I;$$

$$\mathcal{J}_n(t) := \left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^{34(r-1)} \Bigg/ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin nu/2}{\sin u/2}\right)^{34(r-1)} du$$

— ядро типа Джексона,

$$\mathcal{D}_n(y, x) := \frac{1}{(34(r-1)-1)!} \frac{\partial^{34(r-1)}}{\partial x^{34(r-1)}} (x-y)^{34(r-1)-1} \int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} \mathcal{J}_n(t)\, dt$$

— многочленное ядро типа Дзядыка;

$$x_0 := 1; \; x_j := \cos j\pi/n, \; I_j := [x_j, x_{j-1}],$$

$$\overline{x}_j := \cos(j\pi/n - \pi/2n), \quad j = \overline{1, n};$$

$$x_j^0 := \cos(j\pi/n - \pi/4n), \quad j < n/2;$$

$$x_j^0 := \cos(j\pi/n - 3\pi/4n), \quad j \geq n/2;$$

$$h_j := x_{j-1} - x_j, \quad j = \overline{1, n};$$

$$t_j := (x - x_j^0)^{-2} \cos^2 2n \arccos x + (x - \bar{x}_j)^{-2} \sin^2 2n \arccos x,$$

$$T_j(x) := \frac{\int_{-1}^{x} t_j^{3(r-1)}(y)\,dy}{\int_{-1}^{1} t_j^{3(r-1)}(y)\,dy}, \quad \overline{T}_j(x) := \frac{\int_{-1}^{x} (x_{j-1} - y)(x_j - y)\, t_j^{3r-2}(y)\,dy}{\int_{-1}^{1} (x_{j-1} - y)(x_j - y)\, t_j^{3r-2}(y)\,dy}.$$

Всюду далее без специальных оговорок будут использованы неравенства

$$\Delta_n^2(y) < 4\Delta(|x-y| + \Delta), \; 2(|x-y|+\Delta) > |x-y| + \Delta_n(y) > (|x-y|+\Delta)/2;$$

$$h_{j\pm 1} < 3h_j, \; \Delta < h_j < 5\Delta, \; x \in I_j.$$

2. Докажем вспомогательные предложения. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^r$ класс непрерывных на I функций f, имеющих на $(-1, 1)$ локально абсолютно непрерывную $(r-1)$-ю производную и таких, что

$$|f^{(r)}(x)(1-x^2)^{r/2}| \leq 1 \tag{2}$$

почти для всех $x \in I$.

Лемма 1. *Если $g \in \overset{\circ}{W}{}^r$, то справедливы неравенства*

$$|g(y) - L(y, g)| \leq c_1, \; y \in I, \tag{3}$$

$$|g(y) - g(x) - \int_x^y L(t, g', [x, x+\Delta])\,dt| \leq c_2 n^{-r} (|x-y| + \Delta)^{2r} \Delta^{-2r}, \; x \in I, \tag{4}$$

$$x + \Delta \in I, \; y \in I.$$

Доказательство. Обозначая $y_i = -1 + 2(i+1)/r$; $i = \overline{0, r-2}$, и пользуясь известным интегральным представлением для разделенной разности, а также условием (2), получаем

$$|g(y) - L(y,g)| = \Big| \int_{-1}^{y} (t - y_0) \ldots (t - y_{r-2}) \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{r-2}} g^{(r)}(y_0 +$$

$$+ (y_1 - y_0)t_1 + \ldots + (t - y_{r-2})t_{r-1})\,dt_{r-1} \ldots dt_1\,dt \Big| \leq \Big| \int_{-1}^{y} (t -$$

$$- y_0) \ldots (t - y_{r-2}) \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{r-2}} [1 - (y_0 + (y_1 - y_0)t_1 + \ldots$$

$$\ldots + (t - y_{r-2})t_{r-1})^2]^{-r/2}\,dt_{r-1} \ldots dt_1\,dt \Big| \leq \Big| \int_{-1}^{y} (t - y_0) \ldots (t -$$

$$- y_{r-2}) \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{r-2}} [2(1 - (y_0 + (y_1 - y_0)t_1 + \ldots + (t -$$

$$- y_{r-2})t_{r-1}))]^{-r/2}\,dt_{r-1} \ldots dt_1\,dt \Big| + \Big| \int_{-1}^{y} (t - y_0) \ldots (t -$$

$$- y_{r-2}) \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{r-2}} [2(1 + (y_0 + (y_1 - y_0)t_1 + \ldots + (t -$$

$$- y_{r-2})t_{r-1}))]^{-r/2}\,dt_{r-1} \ldots dt_1\,dt \Big| =: G_1(y) + G_2(y).$$

Оценим $G_2(y)$ ($G_1(y)$ оценивается аналогично). Положим $g_r(t) = (1+t)^{r/2-1}$, если r — нечетное, $g_r(t) = (1+t)^{r/2-1} \ln(1+t)$, если r — четное. Поскольку [4, с. 160, 161; 5] $|g_r(t) - L(t, g_r, I)| \leq c_3$, то

$$G_2(y) = c_4 \int_{-1}^{y} |g_r(t) - L(t, g_r, I)|\,dt \leq c_1.$$

т. е. неравенство (3) доказано.

Зафиксируем $x \in I$. Обозначив $\bar{y}_i := x + i\Delta / (r-2)$, $i = \overline{0,\ r-2}$, получим

$$| g(y) - g(x) - \int_x^y L(t, g', [x; x+\Delta])\, dt | \le \Big| \int_x^y (t - \bar{y}_0) \ldots (t - \bar{y}_{r-2}) \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{r-2}} [1 -$$

$$- (\bar{y}_0 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_0)\, t_1 + \ldots + (t - \bar{y}_{r-2})\, t_{r-1})^2]^{-r/2}\, dt_{r-1} \ldots dt \Big| =: \overline{G}(y).$$

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $-1 + n^{-2} \le x,\ x + \Delta \le 1 - n^{-2},\ -1 + n^{-2} \le y \le 1 - n^{-2}$. Тогда очевидно

$$(1 - x^2)^{-1/2} < 2(n\Delta)^{-1},\ (1 - y^2)^{-1/2} < 16 n^{-1} \Delta^{-2}(|x - y| + \Delta),$$

поэтому

$$\overline{G}(y) \le (|x - y| + \Delta)^r \max\{(1 - x^2)^{-r/2}, (1 - y^2)^{-r/2}\} / (r-1)! \le$$

$$\le (16^r / (r-1)!)\, (1 / n^r)\, ((|x - y| + \Delta) / \Delta)^{2r}.$$

2. Пусть $xy > 0$. Положив для определенности $x \in [-1; 0)$ (а значит, и $y \in [-1; 0)$), обозначим $x^* = \min\{x, y\}$, $y^* = \max\{x, y\}$. С учетом случая 1 рассмотрим только случай $x^* < -1 + n^{-2}$. Положим $\bar{g}_r(t) = (1 + t)^{r/2-1}$, если r — нечетное, иначе $\bar{g}_r(t) = (1 + t)^{r/2-1} \ln((1 + t) / (1 + y^*))$. Замечая, что $|\bar{g}_r(t)| \le \le (1 + y^*)^{r/2-1}$ при $t \in [-1; y^*]$, имеем

$$\overline{G}(y) \le c_5 \,|\int_x^y [\bar{g}_r(t) - L(t, \bar{g}_r, [x, x + \Delta])]\, dt\,| \le$$

$$\le c_5 \int_x^y (1 + y^*)^{r/2-1} (1 + c_6((|x - y| + \Delta) / \Delta)^{r-2})\, dt \le$$

$$\le c_7 (|x - y| + \Delta)^{r/2} (|x - y| + \Delta)^{r-2} \Delta^{2-r} \le c_7 \cdot 16^{r/2} n^{-r} (|x - y| + \Delta)^{2r} \Delta^{-2r}.$$

3. Для остальных случаев $c_8 \le n^{-r} \Delta^{-2r} (|x - y| + \Delta)^{2r}$, поэтому оценка (4) следует из вытекающего из (3) неравенства

$$\Big| g(y) - g(x) - \int_x^y L(t, g', [x; x + \Delta])\, dt \Big| = \Big| \int_x^y (g'(t) - L(t, g', [x; x + \Delta]))\, dt \Big| =$$

$$= \Big| \int_x^y [g'(t) - \mathcal{L}(t, g) - L(t, g' - \mathcal{L}', [x; x + \Delta])]\, dt \Big| \le c_9.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть заданы функция* $\Phi \in \mathring{W}^r$ *и множество* $F \subset I$. *Если при* $x \in F$ *имеем* $\Phi'(x) = 0$, *то многочлен*

$$D_n(x, \Phi) := \int_{-1}^1 [\Phi(y) - \mathcal{L}(y, \Phi)]\, \mathcal{D}_n(y, x)\, dy + \mathcal{L}(x, \Phi)$$

степени $< 17(r-1)(n-1)$ *приближает функцию* $\Phi = \Phi^{(0)}$ *и ее производную* $\Phi' = \Phi^{(1)}$ *так, что*

$$|\Phi^{(p)}(x) - D_n^{(p)}(x, \Phi)| \le c_{10} \Delta^{-p} (\Delta / (\operatorname{dist}(x, I \setminus F) + \Delta))^{13(r-1)} n^{-r},$$

$$(\le c_{11} \Delta^{-p} n^{-r}),\ x \in I,\ p = 0 \vee 1.$$

Доказательство. Обозначим $g(x) := \Phi(x) - \mathcal{L}(x, \Phi)$ и заметим, что $g \in \mathring{W}^r$, $\| g \| \le c_1$. Так как на $F\ L(y) = g(y)$, то, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3 из [6] (считая $\varphi(t) = t^{r/2-1}$), сводим доказательство к оценке интеграла

$$\mathcal{I}_2 = \int_{I \setminus F} [L(y) - g(y)]\, \frac{\partial^p}{\partial x^p}\, \mathcal{D}_n(y, x)\, dy$$

и, пользуясь (4) и неравенством (4) из [6], получаем

$$|\mathcal{J}_2| \le 2\, c_9 n^{-r} \Delta^{15r-19-p} \int_{\operatorname{dist}(x,\, I|F)}^{\infty} (t+\Delta)^{18-15r}\, dt <$$

$$< c_{10}\, n^{-r} \Delta^{-p} (\Delta / (\Delta + \operatorname{dist}(x, I \mid F)))^{13(r-1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть множество* E *состоит из произвольных отрезков* I_{j_i}. *Многочлен*

$$Q_n(x, E) := n^{-r} \sum_i (T_{j_i}(x) - \overline{T}_{j_i}(x))$$

степени $< 2(2n-1)(3r-2)+3$ *удовлетворяет неравенствам:*

a) $|Q_n(x, E)| \le c_{12}\, n^{-r}, x \in I$;

b) $Q_n'(x, E) \ge -c_{13}\, \Delta^{-1} n^{-r}, x \in E$;

c) $Q_n'(x, E) \ge c_{14}\, n^{-r} \Delta^{-1} (\Delta / (\operatorname{dist}(x, E) + \Delta))^{13(r-1)}, x \in I \setminus E$.

Доказательство. С помощью неравенств (22) – (25) из [6] получаем

a) $$|Q_n(x, E)| \le n^{-r} \sum_i |T_{j_i}(x) - \overline{T}_{j_i}(x)| \le n^{-r} \sum_{j=1}^{n} c_{15} (h_j / (|x - x_j| +$$

$$+ h_j))^{6(r-1)-1} < c_{12}\, n^{-r} \sum_{j=1}^{n} h_j (\Delta(|x - x_j| + \Delta))^{(6(r-1)-2)/2} \times$$

$$\times (|x - x_j| + \Delta)^{1-6(r-1)} \le c_{12}\, \Delta^{3(r-1)-1} n^{-r} \int_{-1}^{1} (|x - t| +$$

$$+ \Delta)^{-3(r-1)}\, dt \le c_{12}\, n^{-r}, x \in I;$$

b) $$Q_n'(x, E) \ge n^{-r} \sum_i -\overline{T}_{j_i}'(x) \ge -c_{16}\, n^{-r}\, \overline{T}_{j^*}'(x) \ge -64^{3(r-1)+1} n^{-r} \times$$

$$\times \Delta_n^{-1}(x_{j^*})\, c_{16} \ge -c_{13}\, \Delta^{-1} n^{-r}, x \in E,$$

где индекс j^* выбран таким, чтобы $x \in I_{j^*}$;

c) $$Q_n'(x, E) \ge c_{17}\, n^{-r} h_j^{6(r-1)-1} (|x - x_j| + \Delta)^{-6(r-1)} \ge c_{18}\, n^{-r} (\Delta^2 / (|x -$$

$$- x_j| + \Delta))^{6(r-1)-1} (|x - x_j| + \Delta)^{-6(r-1)} \ge c_{14}\, n^{-r} \Delta^{-1} (\Delta / (\operatorname{dist}(x, E) +$$

$$+ \Delta))^{12(r-1)} \ge c_{14}\, n^{-r} \Delta^{-1} (\Delta / (\operatorname{dist}(x, E) + \Delta))^{13(r-1)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $0 \le g'(x) \le n^{-r} \Delta^{-1}$, $x \in I$, *тогда многочлен*

$$R_n(x, g) := g(-1) + \sum_{j=1}^{n} (g(x_{j-1}) - g(x_j))\, T_j(x)$$

степени $6(2n-1)(r-1)+1$ *не убывает на* I *и при этом*

$$|g(x) - R_n(x, g)| \le c_{19}\, n^{-r}, x \in I.$$

Лемма 4 доказывается так же, как и лемма 7 из [6].

Лемма 5. *Пусть заданы функция* $g \in \mathring{W}^r$ *и множество* $\mathcal{J}_j$, *состоящее из* $2r-3$ *соседних отрезков* I_j, *т. е.* $\mathcal{J}_j = I_j \cup I_{j+1} \cup \ldots \cup I_{j+2(r-2)}$. *Если при каждом* $i = j, \ldots, j + 2(r-2)$ *найдется точка* $\bar{x}_i \in I_i$, *в которой* $|g'(\bar{x}_i)| \le \le n^{-r} \Delta_n^{-1}(\bar{x}_i)$, *то и при всех* $x \in \mathcal{J}_j$ *имеем* $|g'(x)| \le c_{20}\, n^{-r} \Delta^{-1}$.

Доказательство. Обозначим через $l(x, g', \tilde{x}_{2p})$ многочлен Лагранжа степени $\leq r-2$, интерполирующий функцию g' в точках $\tilde{x}_{2p}, p = \overline{0, r-2}$. Теперь справедливость леммы 5 вытекает из представления

$$g'(x) = (g'(x) - L(x, g', \mathcal{J}_j)) - l(x, g', -L, \tilde{x}_{2p}) + l(x, g', \tilde{x}_{2p})$$

и леммы 1.

3. Пусть $f = f(x)$ не убывает на I и $f \in \mathring{W}^r$.

Определение 1. *Отрезок I_j назовем отрезком первого типа, если $f'(x) \leq \leq c_{20}(c_{13} + c_{14})n^{-r}\Delta^{-1}$ при $x \in I_j$; отрезок I_j назовем отрезком второго типа, если он не является отрезком первого типа и $f'(x) \geq (c_{14} + c_{13})n^{-r}\Delta^{-1}$ при всех $x \in I_j$. Остальные отрезки I_j назовем отрезками третьего типа. Объединение всех отрезков первого типа обозначим E_1, второго типа — E_2, третьего типа — E_3.*

Лемма 6. *Соседних отрезков третьего типа не может быть больше чем $2(r-2)$. Т. е. каждое из множеств $\mathcal{J}_j = j = 0, \ldots, n - 2(r-2)$, содержит по крайней мере один отрезок I_j не третьего типа.*

Лемма 6 следует из леммы 5.

$E_1 \bigcup E_3$ представим в виде объединения (конечного) непересекающихся отрезков

$$G_1 = [x_{j_1}; x_{j_0}] \bigcup [x_{j_3}; x_{j_2}] \bigcup \ldots \; 0 \leq j_\nu \leq j_{\nu+1} \leq n.$$

В G_1 включены все те отрезки, длина которых не меньше $2r-3$ отрезков I_j. Если $|x_{j_\nu}| = 1$, то положим $S_\nu(x) := 1$, если же $|x_{j_\nu}| \neq 1$, то обозначим

$$S_\nu(x) := \int_x^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{\bar{j}_\nu})^r (x_{j_\nu} - y)^r \, dy \Big/ \int_{\bar{x}_{\bar{j}_\nu}}^{x_{j_\nu}} (y - \bar{x}_{\bar{j}_\nu})^r (x_{j_\nu} - y)^r \, dy,$$

где $\bar{j}_\nu := j_\nu + (1 + (-1)^\nu)/2$.

Определение 2. *Положим $g_1(x) := 0$ при $x \notin G_1$; $g_1(x) := f'(x) S_\nu(x)$ при $x \in [\bar{x}_{\bar{j}_\nu}; x_{j_\nu}]$; $g_1(x) = f'(x)$ — в остальных случаях; $g_2(x) := f'(x) - g_1(x)$.*

Обозначим $f_1(x) := f(-1) + \int_{-1}^{x} g_1(y)\, dy$, $f_2(x) = \int_{-1}^{x} g_2(y)\, dy$.

Лемма 7. *Функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ неотрицательны и при этом справедливы неравенства*

$$|g_1(x)| \leq c_{21} n^{-r} \Delta^{-1}, x \in I, \tag{5}$$

$$|g_2^{(r-1)}(x)(1 - x^2)^{r/2}| \leq c_{22}, x \in I. \tag{6}$$

Доказательство. Неотрицательность функций g_1 и g_2 очевидна. Неравенство (5) с учетом того, что $|S_\nu(x)| \leq 1$, следует из неравенства

$$|f'(x)| \leq cn^{-r}\Delta^{-1}, x \in G_1, \tag{7}$$

которое доказывается аналогично лемме 5.

Теперь докажем неравенство

$$|g_1^{(r-1)}(x)(1 - x^2)^{r/2}| \leq c_{23}. \tag{8}$$

Зафиксируем точку $x \in I$. Если $g_1(x) = 0$ или $g_1(x) = f'(x)$, то (8) очевидно, так что достаточно доказать (8) лишь для $x \in [\bar{x}_{\bar{j}_\nu}; x_{j_\nu}] := I_\nu^*$. Учитывая (7) и (2), замечаем, что $|f^{(j+1)}(x)| \le c_{24}\, n^{-r}\, \Delta^{-(j+1)},\ j = \overline{0,\ r-1}$, поэтому

$$|g_1^{(r-1)}(x)| = \left|\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j} f^{(j+1)}\, S_\nu^{(r-1-j)}(x)\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j} c_{24}\, n^{-r}\, \Delta^{-(j+1)}\, \Delta^{j+1-r}\right| \le c_{25}\,(n\Delta)^{-r}.$$

Наконец, (6) следует из (8) и определения 2. Лемма доказана.

Обозначим $G_2 := \{x\colon \operatorname{dist}(x, E_2)\} \le 20\, r^2\, \Delta\}$. Из леммы 6 и определения 2 следует $g_2(x) = 0,\ x \in I \setminus G_2$. Отсюда, из лемм 2, 7 и определений 1, 2, а также из неравенства

$$\Delta_{n_1}(x)\,(\operatorname{dist}(x, G_2) + \Delta_{n_1}(x))^{-1} \le c_{26}\, \Delta(\operatorname{dist}(x, E_2) + \Delta)^{-1}$$

при $n_1 \ge n$ вытекает следующая лемма.

Лемма 8. *При каждом натуральном* $n_1 \ge n$ *многочлен* $D_{n_1}(x, f_2)$ *степени* $< 17(r-1)(n_1-1)$ *характеризуется свойствами*

$$|f_2(x) - D_{n_1}(x, f_2)| \le c_{27}\, n^{-r},\ x \in I,$$

$$D'_{n_1}(x, f_2) \ge -c_{28}\, n_1^{-r}\, \Delta_{n_1}^{-1}(x)(\Delta / (\operatorname{dist}(x, E_2) + \Delta))^{13(r-1)},\ x \in I \setminus E_2,$$

$$D'_{n_1}(x, f_2) \ge (c_{13} + c_{14})\, n^{-r}\, \Delta^{-1} - c_{28}\, \Delta_{n_1}^{-1}(x)\, n^{-r},\ x \in E_2,$$

где $c_{27} = c_{10}\, c_{22},\ c_{28} = c_{10} \cdot c_{22} \cdot c_{26}^{13(r-1)}$.

4. ***Доказательство теоремы.*** Пусть $n_1 \in N,\ n_1 \ge n$. Обозначим через

$$P_{n_1}(x) := D_{n_1}(x, f_2) + Q_n(x, E_2) + R_n(x, f_1)$$

многочлен степени $17(r-1)n$. Из лемм 8, 3, 7 и 4 следует

$$|f(x) - P_{n_1}(x)| \le (c_{27} + c_{12} + c_{19}c_{21})\, n^{-r} \le c_{29}\, n^{-r},\ x \in I,$$

$$P'_{n_1}(x) > (c_{14}\, n^{-r}\, \Delta^{-1} - c_{28}\, n_1^{-r}\, \Delta_{n_1}^{-1}(x))(\Delta / (\operatorname{dist}(x, E_2) + \Delta))^{13(r-1)},\ x \in I.$$

Осталось выбрать n_1 таким образом, чтобы выполнялось неравенство $c_{14}\, n^{-r} \times \Delta^{-1} \ge c_{28}\, n_1^{-r}\, \Delta_{n_1}^{-1}(x)$ (т. е. $n_1 = [(c_{28} / c_{14})^{1/(r-2)} + 1]\, n + 1$).

Таким образом, для $n > c_{30}$ теорема доказана.

Для $r - 1 \le n \le c_{30}$ искомый в теореме многочлен можно взять в виде $P_n(x) := L(x, f) + x\, c_1$.

1. *Шевчук И. А.* О коприближении монотонных функций // Докл АН СССР.– 1989.– **308**, №3.– С. 537 – 541.
2. *Leviatan D.* Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**, №3.– P. 471 – 474.
3. *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of smoothness // Springer Ser. Computational Math.– 1987.– **9**.– P. 300.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
5. *Whitney H.* On functions with bounded n-th differences // J. Math. Pures Appl.–1957.– **36**.– P. 67 – 95.
6. *Шевчук И. А.* Приближение монотонных функций монотонными многочленами. // Мат. сб. 1992. – **183**, № 5.– С. 63 – 78.

Получено 11.01.91