УДК 517.5

А. К. Кушпель, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ БЕРНШТЕЙНОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ И ИХ АНАЛОГОВ

Получены точные по порядку оценки для бернштейновских поперечников. Введена шкала новых поперечников, являющихся промежуточными между колмогоровскими и бернштейновскими.

Одержані точні по порядку оцінки для бернштейновських поперечників. Впроваджена шкала нових поперечників, які є проміжними між колмогоровськими та бернштейновськими.

Пусть X — банахово пространство с единичным шаром $B = B(X)$, C —центрально-симметричный выпуклый компакт в X.

Поперечники

$$d_n(C, X) = \inf_{L_n \subset X} \inf_{\varepsilon > 0} \{C \subset L_n \oplus \varepsilon B\},$$

$$b_n(C, X) = \sup_{L_{n+1} \subset X} \sup_{\varepsilon > 0} \{C \supset \varepsilon B \cap L_{n+1}\}$$

называют соответственно колмогоровскими и бернштейновскими.

В качестве X рассмотрим пространство 2π-периодических функций с нормой $\| \varphi \|_p = (\int_{-\pi}^{\pi} | \varphi |^p d\tau)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$.

Роль множеств C будут играть функциональные классы L_p^ψ, рассмотренные в [1]. Пусть $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ — мультипликатор, действующий из L_p в L_p по формуле $\psi\colon \varphi \to \psi\varphi$, где $s[\psi\varphi] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) A_k(\varphi, \cdot)$, $A_k(\varphi, \cdot) = a_k(\varphi) \cos k(\cdot) + b_k(\varphi) \sin k(\cdot)$, $a_k(\varphi)$, $b_k(\varphi)$ — коэффициенты Фурье функции φ, $s[\varphi]$ — ряд Фурье функции φ. Образ шара $B(L_p)$ при отображении ψ будем обозначать через L_p^ψ.

В случае, когда $\psi(k) = \psi_1(k) = \exp(-\alpha k^r)$, $\alpha > 0$, $r > 0$, множества $L_p^{\psi_1}$ являются классами бесконечно дифференцируемых функций. Если же $r \ge 1$, то $L_p^{\psi_1}$ — классы аналитических (при $r = 1$) и целых (при $r > 1$) функций. При $\psi(k) = k^{-\alpha}$ множества L_p^ψ совпадают с функциональными классами W_p^α [1].

Положим $\rho_n(L_p^\psi, L_q) = p_n(\psi, p, q)$, где ρ либо d, либо b. Отметим, что оценки сверху поперечников классов $L_p^{\psi_1}$ получены в [2, 3]. Оценки снизу при $1 < p < q < \infty$, $2 \le p$, $q < \infty$ получены В.Н. Темляковым и автором независимо. Оценки поперечников в случае $2 \le p, q \le \infty$, $1 \le p < q \le \infty$ получены В.Н. Темляковым [4].

В настоящей работе найдены оценки снизу для поперечников $b_n(\psi_1, p, q)$, $1 \le q \le p \le 2$:

$$b_{2n}(\psi_1, p, q) >> \begin{cases} \exp(-\alpha n^r), & 1 < q \le p \le 2, \\ \exp(-\alpha n^r)(\ln n)^{-1/2}, & 1 = q \le p \le 2. \end{cases}$$

Точнее, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\psi_1(k) = \exp(-\alpha k^r)$, $\alpha > 0$, $r > 0$. *Тогда*

$$b_{2\lambda n}(\psi_1, p, q) >> \alpha(\psi_1, q)(1 - \lambda)^{1/2},$$

$$\alpha(\psi_1, q) >> \begin{cases} \exp(-\alpha n^r) n^{r/2}, & q > 1, \\ \exp(-\alpha n^r)(\ln n)^{-1/2} n^{r/2}, & q = 2. \end{cases}$$

Отметим, что оценки снизу для поперечников $b_{2n}(\psi_1, p, q)$ следуют из теоремы при $\alpha = 1 - n^{-r}$. Оценки сверху для поперечников $d_{2n-1}(\psi_1, p, q)$ получены в [2]. Таким образом, $\mathcal{E}_n(\psi_1, p, q) = \sup\{ \| f - s_n(f) \|_q, f \in L^\psi_p \} \asymp b_{2n}(\psi_1, p, q) \asymp$ $\asymp \exp(-\alpha n^r)$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$, $1 < q < p \le 2$, где $s_n(f)$ — суммы Фурье функции f. При $q = 1$ оценки сверху для поперечников $d_{2n}(\psi_1, p, 1)$ реализует специальная последовательность полиномов, построенная в [2]:

$$\exp(-\alpha n^r)(\ln n)^{-1/2} << b_{2n}(\psi_1, p, 1) << d_{2n-1}(\psi_1, p, 1) << \exp(-\alpha n^r).$$

В работе вводятся также поперечники $A^\lambda_n(C, X)$, которые при весьма общих условиях на λ являются промежуточными между d_n и b_n: $b_n(C, X) \le A^\lambda_n(C, X) \le$ $\le d_n(C, X)$ и при специальном выборе параметра λ совпадают с категорными поперечниками χ_N, введенными В.М. Тихомировым [5]. Поэтому оценки, полученные в теореме, сохраняются и для поперечников A^λ_n.

Доказательство теоремы. Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ — скалярное произведение векторов x и y, $|||x||| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, $S^{n-1} = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, |||x||| = 1\}$, $d\mu = d\mu(x)$ — инвариантная относительно вращений нормированная мера на единичной сфере S^{n-1}, $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и единичным шаром $B_E =$ $= \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \le 1\}$. Обозначим через B^0_E поляру множества B_E, т.е. $B^0_E =$ $= \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, |\langle x, y\rangle| \le 1, y \in B_E\}$. Банахово пространство с нормой $\|x\|^0 =$ $= \sup\{|\langle x, y\rangle|, y \in B_E\}$, в котором B^0_E является единичным шаром, будем обозначать через $E^0 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^0)$. Пусть $\mathcal{T}_{2n}$ — пространство тригонометрических полиномов порядка n:

$$t_n(\cdot) = \sum_{k=1}^n a_k(t_n) \cos k(\cdot) + b_k(t_n) \sin k(\cdot),$$

$\{\psi(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — фиксированная последовательность $\psi(k) \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$.

В пространстве $\mathcal{T}_{2n}$ введем нормы

$$\| t_n \|_{\psi, q} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n \psi(k)(a_k(t_n) \cos k\tau + b_k(t_n) \sin k\tau) \right|^q d\tau\right)^{1/q},$$

$$\| t_n \|_{1/\psi, q} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^n (1/\psi(k))(a_k(t_n) \cos k\tau + b_k(t_n) \sin k\tau) \right|^q d\tau\right)^{1/q}$$

при $1 \le q < \infty$. Если $q = \infty$, то положим

$$\| t_n \|_{\psi, \infty} = \operatorname*{ess\,sup}_\tau \left| \sum_{k=1}^n \psi(k)(a_k(t_n) \cos k\tau + b_k(t_n) \sin k\tau) \right|.$$

Аналогично определим норму $\| t_n \|_{1/\psi, \infty}$.

Из приведенных выше определений следует $\| t_n \|^0_{\psi, q} \ge \| t_n \|_{1/\psi, q'}$, где $1/q +$ $+ 1/q' = 1$.

Через $C(\alpha)$ будем обозначать постоянные, зависящие от α. Обозначим через $M_{1/\psi,q}$ среднее Леви нормы $\|\cdot\|_{1/\psi,q}$:

$$M_{1/\psi,q} = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^2_{1/\psi,q}\, d\mu\right)^{1/2}.$$

Для дальнейшего нам потребуются оценки сверху величины $M_{1/\psi,q}$ при $q \geq 2$. Пусть сначала $q < \infty$. Рассмотрим полином

$$t_n(\tau,\theta) = \sum_{k=1}^n a_k(t_n)\, r_k(\theta) \cos k\tau + b_k(t_n)\, r_{k+n}(\theta) \sin k\tau,$$

где $r_k(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$, — функции Радемахера.

Из инвариантности меры $d\mu$ относительно вращений находим

$$M^2_{1/\psi,q} = \int_{S^{2n-1}} d\mu \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\psi^{-1} * t_n(\tau)|^q\, d\tau\right)^{2/q} =$$

$$= \int_{S^{2n-1}} d\mu \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\tau\, |\psi^{-1} * t_n(\tau,\theta)|^q\right)^{2/q} =$$

$$= \int_0^1 d\theta \int_{S^{2n-1}} d\mu \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\tau\, |\psi^{-1} * t_n(\tau,\theta)|^q\right)^{2/q} =$$

$$= \int_{S^{2n-1}} d\mu \int_0^1 d\theta \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\tau\, |\psi^{-1} * t_n(\tau,\theta)|^q\right)^{2/q} = \tag{1}$$

Так как $q \geq 2$, то из (1) и неравенства Гельдера получаем

$$M^2_{1/\psi,q} \leq C(q) \int_{S^{2n-1}} d\mu \left(\int_0^1 d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\tau\, |\psi^{-1} * t_n(\tau,\theta)|^q\right)^{2/q} =$$

$$= C(q) \int_{S^{2n-1}} d\mu \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\tau \int_0^1 d\theta\, |\psi^{-1} * t_n(\tau,\theta)|^q\right)^{2/q}. \tag{2}$$

Здесь

$$\psi^{-1}(\tau) = \sum_{k=1}^n (\cos k\tau)/\psi(k),\ g * f(x) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-\alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Для дальнейшего потребуется неравенство Хинчина (см. например, [6])

$$\left(\int_0^1 d\theta\, \left|\sum_{k=1}^n r_k(\theta)\, c_k\right|^q\right)^{1/q} \leq C(q) \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^2\right)^{1/2}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует

$$M^2_{1/\psi,q} \leq C(q) \int_{S^{2n-1}} d\mu \left(\sum_{k=1}^n (|q_k(t_n)|^2 + |b_k(t_n)|^2)(\psi(k))^{-2}\right). \tag{4}$$

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$. Известно (см. [7, с. 64]), что

$$\int_{S^n} |x_1|^2\, d\mu = n^{-1}. \tag{5}$$

Из оценок (4) и (5) находим

$$M_{1/\psi,q} \leq C(q) n^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^n (\psi(k))^{-2}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Пусть теперь $q = \infty$. Для дальнейшего потребуется неравенство Салема –

Зигмунда (см., например, [8]):

$$\operatorname*{mes}_{0 \le \theta \le 1} \{ \| t_n(\tau, \theta) \|_\infty \ge C_1 (\ln n)^{1/2} \| t_n \|_2 \} \le C_2 n^{-2}. \tag{7}$$

С учетом (7) имеем

$$M^2_{1/\psi, \infty} = \int_{S^{2n-1}} \| t_n \|^2_{1/\psi, \infty} d\mu = \int_{S^{2n-1}} d\mu \ \| t_n(\tau, \theta) \|^2_{1/\psi, \infty} =$$

$$= \int_0^1 d\theta \int_{S^{2n-1}} d\mu \ \| t_n(\tau, \theta) \|^2_{1/\psi, \infty} = \int_{S^{2n-1}} d\mu \int_{E_1} d\theta \ \| t_n(\tau, \theta) \|^2_{1/\psi, \infty} +$$

$$+ \int_{S^{2n-1}} d\mu \int_{E_2} d\theta \ \| t_n(\tau, \theta) \|^2_{1/\psi, \infty} \stackrel{\text{df}}{=} I_1 + I_2.$$

Здесь $E_1 \cup E_2 = (0, 1)$, $\operatorname{mes} E_2 \le C_2 n^{-2}$.

Получим оценки для величин I_1 и I_2:

$$I_1 \le C \int_{S^{2n-1}} d\mu \| t_n \|^2_{1/\psi, 2} \ln n \le C n^{-1} \ln n \sum_{k=1}^{n} (\psi(k))^{-2},$$

$$I_1 \le n \int_{S^{2n-1}} d\mu \int_{E_2} d\theta \ \| t_n \|^2_{1/\psi, 2} \le n \operatorname{mes} E_2 \int_{S^{2n-1}} d\mu \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 +$$

$$+ b_k^2) \left(\psi(k)\right)^{-2} \le n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \left(\psi(k)\right)^{-2}.$$

Окончательно получаем

$$M_{1/\psi, \infty} \le C n^{-1/2} (\ln n)^{1/2} \sum_{k=1}^{n} \left(\psi(k)\right)^{-2}.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\{ \psi(k) \}_{k \in \mathbb{N}}$ — *фиксированная последовательность,* $\psi(k) \ne 0$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$M_{1/\psi, q} \le \begin{cases} C n^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\psi(k)\right)^{-2} \right)^{1/2}, & 2 \le q < \infty; \\ C n^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\psi(k)\right)^{-2} \right)^{1/2} (\ln n)^{1/2}, & q = \infty. \end{cases}$$

Для дальнейшего потребуется следующее утверждение.

Лемма 2 (см. [9]). *Пусть* $E = (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$, $||| \cdot |||$ — *евклидова норма в* $\mathbb{R}^n$. *Для любого* $0 < \lambda < 1$ *существует пространство* $F \subset \mathbb{R}^n$, $\dim F > \lambda n$ *такое, что* $||| x ||| \le K M_0 (1 - \lambda)^{-1/2} \| x \| \ \forall x \in F$, *где* K — *универсальная постоянная,* $M_0 = \left(\int_{S^{n-1}} \| x \|_0^2 \, d\mu \right)^{1/2}$.

Пусть $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{\psi, q}$, $1 \le q \le 2$. Тогда $\| \cdot \|_0 \le \| \cdot \|_{1/\psi, q'}$. Из лемм 1 и 2 следует

$$\| t_n \|_2 \le C M_{1/\psi, q'} (1 - \lambda)^{-1/2} \| t_n \|_{\psi_1, q} =$$

$$= C M_{1/\psi_1, q'} (1 - \lambda)^{-1/2} \| \psi_1 * t_n \|_{\psi_1, q}, \tag{8}$$

где $\psi_1(\tau) = \sum_{k=1}^{n} \psi_1(k) \cos k\tau$.

Перепишем неравенство (8) в виде

$$\| \psi_1^{-1} * t_n \|_2 \le C M_{1/\psi_1, q} \cdot (1-\lambda)^{-1/2} \| t_n \|_q. \tag{9}$$

Из оценки (9) и определений бернштейновских поперечников (см. [5]) следуют необходимые оценки.

Отметим, что приведенное доказательство без изменений распространяется на классы функций, задающиеся последовательностями $\psi_2(k) = k^{-\alpha} (\ln k)^{-\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$.

Приведем определение поперечников $A_n^{\lambda}(C, X)$, которые занимают промежуточное положение между колмогоровскими и бернштейновскими поперечниками. Пусть $X\mathbb{P}$ — проективное пространство, т. е. множество всех прямых π, проходящих через нуль в X. Пусть, далее, $Cl(X)$ — множество всех замкнутых подмножеств в X, $\mathfrak{M}$ — произвольное линейно упорядоченное множество. Обозначим через $\lambda(\cdot)$ функцию, заданную на $Cl(X\mathbb{P})$, со значениями в $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

1) если $X \subset Y$, $X \in Cl(X\mathbb{P})$, $Y \in Cl(X\mathbb{P})$, то $\lambda(X) \le \lambda(Y)$;

2) если $Y = \varphi(X)$, где отображение φ гомотопно тождественному (в смысле гомотопий на $X\mathbb{P}$), то $\lambda(X) \le \lambda(Y)$.

Пусть $[A]_N$ — класс замкнутых подмножеств пространства $X\mathbb{P}$ таких, что для любого $A \subset [A]_N$, $\lambda(A) > \lambda(X\mathbb{P}^{N-1})$, где $X\mathbb{P}^{N-1} = (X \cap L_N)\mathbb{P}$, $L_N \subset X$ — фиксированное подпространство, $\dim L_N = N$.

Положим

$$A_N^{\lambda}(\mathfrak{N}, X) = \sup_{A \subset [A]_N} \inf_{\pi \in A} F(\pi),$$

где $F(\pi) = \sup\{\|x\|, x \in \pi \cap \mathfrak{N}\}$, $\mathfrak{N} \subset X$.

Отсюда следует, что в случае, когда $\lambda(A) = \mathrm{cat}_{X\mathbb{P}} A$, поперечники A_N^{λ} совпадают с категорными поперечниками, введенными В.М. Тихомировым [5]. Здесь $\mathrm{cat}_{X\mathbb{P}} A$ — категория Люстерника — Шнирельмана множества относительно $X\mathbb{P}$ (см., например, [10]).

Лемма 3. *Если* $\mathfrak{N} = C \oplus L_M \subset X$, *где* C *— центрально-симметричный выпуклый компакт, а* L_M *— конечномерное подпространство в* X, *то*

$$A_N^{\lambda}(\mathfrak{N}, X) \le d_N(\mathfrak{N}, X). \tag{10}$$

Если $\lambda(X\mathbb{P}^{N-1}) < \lambda(X\mathbb{P}^{N})$, *то*

$$b_N(\mathfrak{N}, X) \le A_N^{\lambda}(\mathfrak{N}, X). \tag{11}$$

Доказательство. Установим сначала неравенство (10). Приведем два утверждения, содержащиеся в [5].

Лемма 4. *Пусть* C *— компакт,* $C \subset X$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется целое число* $n = n(\varepsilon)$, *линейное многообразие* M_m, $m \le n$, *и отображение* $F: C \to M_m$, *являющееся* ε*-сдвигом.*

Лемма 5. *Пусть* $\dim X < \infty$, B *— единичный шар в* X. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется строго выпуклый шар* B_ε *с гладкой границей такой, что* $h(B, B_\varepsilon) < \varepsilon$, *где* $h(A_1, A_2)$ *— хаусдорфово расстояние между* A_1, A_2.

С учетом лемм 4 и 5 можно считать, что $\dim X = M < \infty$ и B — строго выпукло.

Предположим, что для некоторого тела $C \subset X$

$$A_N^\lambda(C, X) > d_N(C, X).$$

Пусть множество $A_0 \subset X\mathbb{P}$ такое, что $\inf\{F(\pi) \mid \pi \in A_0\} > d_N(C, X)$ и $A_0 \subset [A]_N$. Пусть, далее, L_N — экстремальное подпространство для C в X и P — оператор наилучшего приближения $P: C \to L_N$. Зададим деформацию A_0. Через $f_t(\pi, x)$ обозначим прямую, проходящую через нуль, и $(1-t)x + tPx$, $t \in [0, 1]$, $x = x(\pi) \in \partial C$. Так как $(1-t)x - tPx \neq 0$ $(\| x - Px \| \le d_N(C, X) < \| x \|)$, то $f_t(\pi)$ — действительно деформация A_0, причем $f(0, \pi) = \pi$, $f(1, \pi) \subset L_N$, т.е. $f(1, A_0) \subset X\mathbb{P}^{N-1}$. Из определений функции λ следует, что $\lambda(f(1, A_0)) \geqslant \lambda(A_0)$. С другой стороны, поскольку $f(1, A_0) \subset X\mathbb{P}^{N-1}$, то $\lambda(f(1, A_0)) \le \lambda(X\mathbb{P}^{N-1})$. Но так как $A_0 \subset [A]_N$, то $\lambda(A_0) > \lambda(X\mathbb{P}^{N-1})$. Противоречие доказывает, что

$$A_N^\lambda(C, X) \le d_N(C, X).$$

Неравенство $b_N(C, X) \le A_N^\lambda(C, X)$ является следствием того, что $\lambda(X\mathbb{P}^N) > \lambda(X\mathbb{P}^{N-1})$ и $X\mathbb{P}^N \in [A]_N$. Ясно, что приведенные рассуждения остаются справедливыми в случае цилиндра над C с конечномерной образующей L_M, $\mathfrak{N} = C \oplus L_M$. Укажем конкретный вид функций λ в случае, когда $\mathfrak{M}$ является множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Длина множества A в n-мерном многообразии M_n удовлетворяет условиям 1 и 2, наложенным на фукцию λ. Определение длины многообразия, предложенное в [10, 11], основывается на теории пересечений и гомологий. Обобщение этого понятия содержится в [12]. Определение длины многообразия в терминах кольца когомологий см. в [13]. Гомологические и гомотопические категории, введенные в [12], а также ранг многообразия [11] являются дальнейшими примерами функции λ.

Из определений поперечников A_N^λ следует, что для любой функции λ, удовлетворяющей условиям 1 и 2, выполняются соотношения: $A_{2n}^\lambda(L_p^{\psi_1}, L_q) \asymp \exp(-\alpha n^r)$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$, $1 < q \le p \le 2$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. – Киев, 1984. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).
3. *Кушпель А. К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q. – Киев, 1987. – 54 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.44).
4. *Темляков В. Н.* К вопросу об оценках поперечников классов бесконечно дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1990. – **47**, вып.5. – С.155 – 157.
5. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та , 1976. – 304 с.
6. *Пич А.* Операторные идеалы. – М.: Мир, 1982. – 536 с.
7. *Fiegel T., Lindenstrauss J., Milman V. D.* The dimension of almost spherical sections of convex bodies // Acta math. – 1977. – **139**. – P. 53 – 94.
8. *Кахан П.* Случайные функциональные ряды. – М.: Мир, 1973. – 495 с.
9. *Pajor A., Tomczak-Jaegermann N.* Subspaces of small codimension of finite-dimensional Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, № 7. – P. 637 – 642.
10. *Фролов С., Эльсгольц Л.* Нижняя граница числа критических значений функции, заданной на многообразии // Мат.сб. – 1935. – **42**, вып. 5. – С. 637 – 642.
11. *Эльсгольц Л.* Длина многообразия и ее свойства // Там же.– 1939.– **47**, вып. 3.– С. 565 – 571.
12. *Fox R. H.* On the Lusternik-Schnirelmann category // Ann. Math. – 1941.– **41**, № 2.– P. 333 – 370.
13. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989. – 494 с.

Получено 01.08.91