УДК 512.643

А. Г. Мазко, канд. физ.-мат. наук. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ТРАНСФОРМАЦИИ И ИНЕРЦИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучаются линейные уравнения и операторы в пространстве матриц. Определяются трансформации матричных уравнений, позволяющие получить условия разрешимости и инерциальные свойства эрмитовых решений. Используются новые матричные семейства (коллективы) в теории инерции и позитивной обратимости линейных операторов, в частности в задачах локализации спектров матриц и матричных пучков.

Вивчаються лінійні рівняння і оператори в просторі матриць. Визначаються трансформації матричних рівнянь, що дозволяють одержати умови розв'язності та інерціальні властивості ермітових розв'язків. Використовуються нові матричні сім'ї (колективи) в теорії інерції і позитивної оберненості лінійних операторів, зокрема в задачах локалізації спектрів матриць та матричних пучків.

1. Введение. С матричными уравнениями связаны разнообразные вопросы анализа и синтеза линейных систем. В приложениях используются инерциальные свойства решений уравнения Ляпунова $AX + XA^* = Y$, возникшего как средство анализа устойчивости движения [1]. В последние годы возрос интерес к построению и изучению аналогов уравнения Ляпунова для различных классов динамических систем (см., например, [2 – 4]). В данной статье изучаются вопросы разрешимости и общие свойства решений линейных матричных уравнений.

2. Определения и вспомогательные результаты. Введем обозначения: $r(A)$ — ранг матрицы A, $d(A)$ — вектор диагональных элементов a_{ii} матрицы A, I_n — единичная $(n \times n)$-матрица, A^+ — полуобратная матрица $(AA^+A = A)$, $A \odot B$ — произведение Шура, $A \otimes B$ — кронекерово произведение, $i_\pm(A)$ — индексы инерции эрмитовой матрицы $A = A^*$, равные количествам положительных и отрицательных собственных значений.

Лемма 1. *Для любых $(n \times n)$-матрицы $A = A^*$ и $(m \times n)$-матрицы B выполнены равенства $i_\pm(BAB^*) = i_\pm(A) - i_\pm(C)$, где $C = A - AB^*(BAB^*)^+BA$.*

Если B — квадратная невырожденная матрица, то $C = 0$ и выполнен закон инерции Сильвестра.

Лемма 1 является обобщением данного закона [5].

Лемма 2. *Если $B \geq 0$ — неотрицательно определенная матрица, то $i_+(A) \leq i_+(A + B)$, $i_-(A) \geq i_-(A + B)$.*

Данное утверждение следует из неравенств $\lambda_i \leq \mu_i$, $i = \overline{1, n}$, где $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ — собственные значения A, $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$ — собственные значения $A + B$ [6].

Лемма 3. *Неравенство $A \odot B \geq 0$ $(A \odot B > 0)$ выполнено для любой $(n \times n)$-матрицы $B > 0$ в том и только в том случае, когда $A \geq 0$ $(A \geq 0,\ a_{ii} > 0,\ i = \overline{1, n})$.*

Согласно теореме о произведении Шура [6], из $A \geq 0$, $B \geq 0$ $(A > 0, B > 0)$ следует $A \odot B \geq 0$ $(A \odot B > 0)$. Если $A \odot B \geq 0$ при всех $B > 0$, то полагая $B_\varepsilon = \| 1 \|_1^n + \varepsilon B_1$, где $\varepsilon > 0$, $B_1 > 0$, имеем $B_\varepsilon > 0$, $A \odot B_\varepsilon = A + \varepsilon A \odot B_1 \geq 0$. При $\varepsilon \to 0$ необходимо $A \geq 0$ [4]. В случае $A \odot B > 0$ диагональные элементы $a_{ii} > 0$, т. е. $A \odot I_n > 0$. Если $A \geq 0$ и $A \odot I_n > 0$, то $A \odot B > 0$ при всех $B > 0$ [7, 8]. Действительно, подбирая $\varepsilon = \varepsilon(B)$ так, чтобы $B \geq \varepsilon I_n$, получаем $A \odot B \geq \varepsilon A \odot I_n > 0$.

Лемма 4. *Если $i_+(A) = 1$, то матричное неравенство $A_1 \triangleq \| 1/a_{ij} \|_1^n \geq 0$ эквивалентно скалярным неравенствам $a_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$.*

Очевидно, из $A_1 \geq 0$ следует $a_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$. Докажем обратное утверждение при $i_+(A) = 1$, $i_-(A) = \nu \geq 0$. Прежде всего $a_{ij} \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$ [4]. Используя разложение $a_{ij} = u_i \bar{u}_j - \sum_{t=1}^{\nu} v_{ti} \bar{v}_{tj}$ [6], имеем $F = UA_1U^* = \| 1/(1-\theta_{ij}) \|_1^n$, где $U = \mathrm{diag}\,\{u_1^{-1}, \ldots, u_n^{-1}\}$, $\theta_{ij} = \sum_{t=1}^{\nu} v_{ti} \bar{v}_{tj} / u_i \bar{u}_j$, $u_i \neq 0$. Из неравенства Коши следует $|\theta_{ij}| < 1$, причем $F = \| 1 \|_1^n + \Theta + \Theta \odot \Theta + \ldots$, где $\Theta = \| \theta_{ij} \|_1^n \geq 0$, т. е., $A_1 \geq 0$.

Введем более общие чем в [4, 9] семейства матриц.

***Определение* 1.** *Семейство $(m \times n)$-матриц $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ называется коллективом порядка α, если существуют матрицы полного ранга P и Q такие, что $T_\lambda = PA_\lambda Q$ — треугольные $(\alpha \times \alpha)$-матрицы одного и того же типа (верхние или нижние) при всех $\lambda \in \Lambda$. Коллектив $\mathcal{A}$ — идеальный, если T_λ — диагональные матрицы. Диагональные векторы $d(T_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, составляют собственность коллектива $\mathcal{A}$. Коллектив $\mathcal{A}$ порядка α называется правым, левым или нейтральным, если соответственно $A_\lambda Q = P^+ T_\lambda$, $PA_\lambda = T_\lambda Q^+$ или $A_\lambda = P^+ T_\lambda Q^+$, $\lambda \in \Lambda$.*

В данном определении множество индексов Λ может быть конечным или бесконечным, скалярным или векторным. Так, регулярный пучок $(n \times n)$-матриц $A_\lambda = A - \lambda B$, $\lambda \in C^1$, есть коллектив любого порядка α. В качестве T_λ при $\alpha = n$ можно выбрать его каноническую форму Кронекера [1]. Семейство аналитических функций от матрицы $f(A)$ также является коллективом. Если $J = PAP^{-1}$ — жорданова форма, то $Pf(A)P^{-1} = f(J)$ — треугольные матрицы с диагональными векторами $[f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)]^T$, где $\lambda_i \in \sigma(A)$ — спектр A. Данный коллектив порядка n идеален в случае простой матрицы A.

***Определение* 2.** *Оператор M, действующий из пространства $\mathcal{E}_1$ с клином $\mathcal{K}_1$ в пространство $\mathcal{E}_2$ с клином $\mathcal{K}_2$, называется позитивно обратимым, если $\mathcal{K}_2 \subset M\mathcal{K}_1 + \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_2 \cap (-\mathcal{K}_2)$ — лезвие клина $\mathcal{K}_2$.*

В данном определении обобщено понятие положительной обратимости оператора M, характеризующееся вложением $\mathcal{K}_2 \subset M\mathcal{K}_1$ [10]. Позитивная обратимость M означает, что любой элемент $y \in \mathcal{K}_2$ представим в виде $y = Mx + \theta$, где $x \in \mathcal{K}_1$, $\theta \in \mathcal{L}_2$. Если $\mathcal{K}_2$ — конус, то $\mathcal{L}_2 = \{0\}$. Поэтому для позитивной обратимости оператора M достаточно, а в случае конуса $\mathcal{K}_2$ и необходимо, чтобы уравнение $Mx = y$ имело решение $x \in \mathcal{K}_1$ при любом $y \in \mathcal{K}_2$. Если конус $\mathcal{K}_2$ воспроизводящий ($\mathcal{E}_2 = \mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_2$), то позитивно обратимый оператор обратим и обратный оператор M^{-1} положителен.

3. Трансформации и условия разрешимости матричных уравнений. Рассмотрим линейное уравнение

$$M(X) \triangleq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} A_i X B_j = Y, \tag{1}$$

где A_i, B_j и Y — заданные матрицы размеров $p \times n$, $m \times q$ и $p \times q$ соответственно, γ_{ij} — скалярные весовые коэффициенты, X — неизвестная $(n \times m)$-матрица. Нас интересует можно ли преобразовать (1) к более простому виду

$$\hat{M}(\hat{X}) \triangleq \sum_{i=1}^{\hat{k}} \sum_{j=1}^{\hat{s}} \hat{\gamma}_{ij} \hat{A}_i \hat{X} \hat{B}_j = \hat{Y}. \tag{2}$$

Размеры матриц $\hat{A}_i$, $\hat{B}_j$, $\hat{X}$ и $\hat{Y}$, равные соответственно $\hat{p} \times \hat{n}$, $\hat{m} \times \hat{q}$, $\hat{n} \times \hat{m}$ и $\hat{p} \times \hat{q}$, могут не совпадать с размерами исходных матриц в (1). Для изучения связей между параметрами уравнений (1) и (2) введем матричную систему

$$P_1 A_i P_2 = P_3 R_i P_4,\ i = \overline{1, k}, \quad \sum_{t=1}^{k} v_{tj}^{(1)} R_t = \sum_{t=1}^{\hat{k}} v_{tj}^{(3)} \hat{A}_t,\ j = \overline{1, k_1},$$

$$Q_1 B_j Q_2 = Q_3 L_j Q_4,\ j = \overline{1, s}, \quad \sum_{t=1}^{s} v_{ij}^{(2)} L_t = \sum_{t=1}^{\hat{s}} v_{it}^{(4)} \hat{B}_t,\ j = \overline{1, s_1}, \tag{3}$$

$$P_1 Y Q_2 = P_3 \hat{Y} Q_4, \quad \Gamma = V_1 \Gamma_0 V_2, \quad \hat{\Gamma} = V_3 \Gamma_0 V_4.$$

Матрицы Γ, $\hat{\Gamma}$ и V_t составлены из коэффициентов γ_{ij}, $\hat{\gamma}_{ij}$ и $v_{ij}^{(t)}$, $t = \overline{1, 4}$. Укажем размеры преобразующих матриц: P_1 — $t_1 \times p$, P_2 — $n \times t_2$, P_3 — $t_1 \times \hat{p}$, P_4 — $\hat{n} \times t_2$, Q_1 — $\tau_1 \times m$, Q_2 — $q \times \tau_2$, Q_3 — $\tau_1 \times \hat{m}$, Q_4 — $\hat{q} \times \tau_2$, V_1 — $k \times k_1$, V_2 — $s_1 \times s$, V_3 — $\hat{k} \times k_1$, V_4 — $s_1 \times \hat{s}$. При наличии ранговых ограничений на эти матрицы система (3) позволяет установить связь между решениями (1) и (2) вида

$$X = X(Z) \stackrel{\Delta}{=} P_2 Z Q_1, \quad \hat{X} = \hat{X}(Z) \stackrel{\Delta}{=} P_4 Z Q_3, \tag{4}$$

где Z — некоторая матрица размера $t_2 \times \tau_1$.

Теорема 1. *Пусть параметры уравнений* (1) *и* (2) *связаны соотношениями* (3). *Тогда если* $r(P_3) = \hat{p}$, $r(Q_4) = \hat{q}$ *и уравнение* (1) *разрешимо в виде* $X(Z)$, *то* $\hat{X}(Z)$ *является решением уравнения* (2). *Если* $r(P_1) = p$, $r(Q_2) = q$ *и уравнение* (2) *имеет решение* $\hat{X}(Z)$, *то* $X(Z)$ — *решение уравнения* (1).

Доказательство. Учитывая структуру решений (4), имеем

$$P_1 A P^{(2)} = P_3 \hat{A} P^{(4)}, \quad Q^{(1)} B Q_2 = Q^{(3)} \hat{B} Q_4,$$

$$\Gamma \otimes X = P^{(2)} W Q^{(1)}, \quad \hat{\Gamma} \otimes \hat{X} = P^{(4)} W Q^{(3)}, \tag{5}$$

где $A = [A_1, \ldots, A_k]$, $B = [B_1^T, \ldots, B_s^T]^T$, $\hat{A} = [\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_{\hat{k}}]$, $\hat{B} = [\hat{B}_1^T, \ldots, \hat{B}_{\hat{s}}^T]^T$, $P^{(2)} = V_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = V_3 \otimes P_4$, $Q^{(1)} = V_2 \otimes Q_1$, $Q^{(3)} = V_4 \otimes Q_3$, $W = \Gamma_0 \otimes Z$. Так, первое равенство (5) выполнено согласно (3) и свойствам кронекерового произведения, поскольку $P_1 A P^{(2)} = P_3 [R_1, \ldots, R_k](V_1 \otimes P_4) = P_3 \hat{A} P^{(4)}$.

Пусть существует матрица Z такая, что $X(Z)$ — решение (1). Используя (5) и представления операторов $M(X) = A(\Gamma \otimes X)B$, $\hat{M}(\hat{X}) = \hat{A}(\hat{\Gamma} \otimes \hat{X})\hat{B}$, имеем цепочку равенств $P_1 Y Q_2 = P_1 M(X) Q_2 = P_1 A P^{(2)} W Q^{(1)} B Q_2 = P_3 \hat{A} P^{(4)} W Q^{(3)} \hat{B} Q_4 = P_3 \hat{M}(\hat{X}) Q_4 = P_3 Y Q_4$. Отсюда $\hat{M}(\hat{X}) = \hat{Y}$, так как из $r(P_3) = \hat{p}$ ($r(Q_4) = \hat{q}$) следует $P_3^+ P_3 = I_{\hat{p}}$ ($Q_4 Q_4^+ = I_{\hat{q}}$). Аналогично, если $r(P_1) = p$, $r(Q_2) = q$, и матрицы X, $\hat{X}$ представлены в виде (4), то из $\hat{M}(\hat{X}) = \hat{Y}$ следует $M(X) = Y$. Теорема доказана.

При условиях теоремы 1 правые части (1) и (2) связаны равенствами $\hat{Y} = P_3^+ P_1 Y Q_2 Q_4^+$, $Y = P_1^+ P_3 \hat{Y} Q_4 Q_2^+$. Подобная связь имеется и между решениями (4) после исключения матрицы Z. Так, при ограничении $P_2 P_2^+ X Q_1^+ Q_1 = X$ в теореме 1 можно положить $Z = P_2^+ X Q_1^+ + Z_0$, где Z_0 — любая матрица, для которой $X(Z_0) = 0$. Аналогично, при $P_4 P_4^+ \hat{X} Q_3^+ Q_3 = \hat{X}$ полагаем $Z = P_4^+ \hat{X} Q_3^+ + \hat{Z}_0$, $\hat{X}(\hat{Z}_0) = 0$. Выделим связь между решениями (4) в случаях

$$r(P_1) = p, \ r(P_2) = n, \ r(Q_1) = m, \ r(Q_2) = q, \tag{6}$$

$$r(P_2) = n, \ r(P_3) = \hat{p}, \ r(Q_1) = m, \ r(Q_4) = \hat{q}. \tag{7}$$

$$r(P_1)=p,\ r(P_4)=\hat n,\ r(Q_2)=q,\ r(Q_3)=\hat m, \tag{8}$$

$$r(P_3)=\hat p,\ r(P_4)=\hat n,\ r(Q_3)=\hat m,\ r(Q_4)=\hat q. \tag{9}$$

***Следствие* 1.** *Для того чтобы матрица X была решением уравнения* (1), *при ограничениях* (6) *достаточно, а при ограничениях* (7) *необходимо, чтобы матрица $\hat X = P_4P_2^+XQ_1^+Q_3$ удовлетворяла уравнению* (2).

***Следствие* 2.** *Для того чтобы уравнение* (1) *было разрешимо в виде $X = P_2P_4^+\hat XQ_3^+Q_1$, при ограничениях* (8) *достаточно, а при ограничениях* (9) *необходимо, чтобы матрица $\hat X$ удовлетворяла уравнению* (2).

При изучении вопроса о разрешимости уравнения (1) желательно иметь систему преобразований (3), обеспечивающую треугольную или, по крайней мере, квазитреугольную структуру матричным коэффициентам уравнения (2). Для этого достаточно, чтобы выполнялись требования $r(V_3)=\hat k$, $r(V_4)=\hat s$, а матрицы R_i и L_j имели желаемую структуру. При этом $\hat A_i$ ($\hat B_j$) представимы в виде линейных комбинаций R_t, $t=\overline{1,k}$ (L_t, $t=\overline{1,s}$).

Если $\hat A_i$ ($\hat B_j$) — левые (правые) треугольные матрицы порядка α (β), то спектр оператора $\hat M$ составляют элементы ω_{ij} матрицы $\Omega = \Sigma_A\hat\Gamma\Sigma_B^T$, где $\Sigma_A = [d(\hat A_1),\dots,d(\hat A_{\hat k})]$, $\Sigma_B=[d(\hat B_1),\dots,d(\hat B_{\hat s})]$. В этом случае неравенства

$$\omega_{ij}\neq 0,\ i=\overline{1,\alpha},\ j=\overline{1,\beta}, \tag{10}$$

эквивалентны однозначной разрешимости уравнения (2).

Пусть в системе (3) достигнута следующая структура матриц:

$$\hat A_i=\begin{bmatrix}T_i & 0\\ * & *\end{bmatrix},\ i=\overline{1,\hat k},\quad \hat B_j=\begin{bmatrix}G_j & *\\ 0 & *\end{bmatrix},\ j=\overline{1,\hat s},\quad \hat Y=\begin{bmatrix}\hat Y_0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

где T_i (G_j) — левые (правые) треугольные блоки порядка α (β). Тогда при условиях (8) и (10) уравнение (1) разрешимо в виде $X_0 = P_2P_4^+[I_\alpha,0]^T\hat X_0[I_\beta,0]Q_3^+Q_1$, где $\hat X_0$ — ($\alpha\times\beta$)-матрица. Обратно, если (1) однозначно разрешимо при заданной структуре решения X_0 и ограничениях (9), то выполнены неравенства (10).

Рассмотрим уравнение (2) с квазитреугольной структурой коэффициентов

$$\hat A_i=\begin{bmatrix}A_{11}^{(i)} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{\alpha 1}^{(i)} & \cdots & A_{\alpha\alpha}^{(i)}\end{bmatrix},\quad \hat B_j=\begin{bmatrix}B_{11}^{(j)} & \cdots & B_{1\beta}^{(j)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & B_{\beta\beta}^{(j)}\end{bmatrix},\quad i=\overline{1,\hat k},\ j=\overline{1,\hat s}. \tag{11}$$

С помощью соответствующих блочных разбиений $\hat X=\|X_{t\tau}\|_1^{\alpha,\beta}$, $\hat Y=\|Y_{t\tau}\|_1^{\alpha,\beta}$ и представления оператора $\hat M = D+N$, где

$$D(\hat X)=\|D_{t\tau}(X_{t\tau})\|_1^{\alpha,\beta},\ D_{t\tau}(X_{t\tau}) = \sum_{i=1}^{\hat k}\sum_{j=1}^{\hat s}\hat\gamma_{ij}A_{tt}^{(i)}X_{t\tau}B_{\tau\tau}^{(j)}, \tag{12}$$

$$N(\hat X)=\|N_{t\tau}(\hat X)\|_1^{\alpha,\beta},\ N_{t\tau}(\hat X) = \sum_{r=1}^{t}\sum_{l=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{\hat k}\sum_{j=1}^{\hat s}\hat\gamma_{ij}A_{tr}^{(i)}X_{rl}B_{l\tau}^{(j)},\ r+l<t+\tau,$$

уравнение (2) приводится к $\alpha\beta$ матричным уравнениям меньших размеров относительно $X_{t\tau}$ Пусть все диагональные блоки в (11) квадратные. Поскольку в (12) $N_{11}=0$, а значения остальных блоков $N_{t\tau}(\hat X)$ зависят лишь от X_{rl} при $r\le\le t$, $l\le\tau$, $r+l<t+\tau$, то оператор N нильпотентный. Можно установить, что $N^\nu=0$,

$S^\nu = 0$, где $\nu = \alpha + \beta - 1$, $S = -D^{-1}N$. Условия обратимости операторов D и $\hat{M}$ совпадают и решение (2) имеет вид

$$\hat{X} = \sum_{i=0}^{\nu-1} S^i(H),\ H = D^{-1}(\hat{Y}) = \| D_{t\tau}^{-1}(Y_{t\tau}) \|_1^{\alpha,\beta}. \tag{13}$$

Обращение оператора D значительно проще, чем обращение $\hat{M}$. Решение исходного уравнения (1) можно получить с помощью следствия 2.

4. Инерция эрмитовых решений. Рассмотрим подкласс уравнений (1)

$$M(X) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i,j=1}^{k} \gamma_{ij} A_i X A_j^* = Y, \tag{14}$$

где Γ, X и Y — эрмитовы матрицы размеров $k \times k$, $n \times n$ и $p \times p$ соответственно, A_i — $(p \times n)$-матрицы, представляющие коллектив $\mathcal{A}$ порядка $\alpha \le \min\{p, n\}$. Пусть P и Q — матрицы полного ранга такие, что $T_i = PA_iQ$ — нижние треугольные $(\alpha \times \alpha)$-матрицы, $i = \overline{1, k}$. Выделим для оператора M множества матриц

$$\mathcal{E}_1 = \{X \,/\, X = Q\hat{X}Q^*,\ \hat{X} = \hat{X}^*\},\ \mathcal{K}_1 = \{X \in \mathcal{E}_1 \,/\, \hat{X} \ge 0\},\ \mathfrak{X} = \{X \in \mathcal{K}_1 \,/\, \hat{X} > 0\},$$

$$\mathcal{E}_2 = \{Y \,/\, \hat{Y} = PYP^*,\ \hat{Y} = \hat{Y}^*\},\ \mathcal{K}_2 = \{Y \in \mathcal{E}_2 \,/\, \hat{Y} \ge 0\},\ \mathcal{Y} = \{Y \in \mathcal{K}_2 \,/\, \hat{Y} > 0\}.$$

Очевидно $\mathcal{K}_1$ — конус, а $\mathcal{K}_2$ — клин с лезвием $\mathcal{L} = \{Y \,/\, PYP^* = 0\}$. Если $\alpha = n$ $(\alpha = p)$, то $\mathfrak{X}(\mathcal{Y})$ совпадает с подмножеством положительно определенных матриц множества эрмитовых $(\alpha \times \alpha)$-матриц $\mathcal{E}_1$ $(\mathcal{E}_2)$. Позитивная обратимость оператора M характеризуется вложением $\mathcal{K}_2 \subset M\mathcal{K}_1 + \mathcal{L}$, которое по топологическим соображениям эквивалентно $\mathcal{Y} \subset M\mathfrak{X} + \mathcal{L}$. Это означает, что оператор M позитивно обратим в том и только в том случае, когда для любой $(\alpha \times \alpha)$-матрицы $\hat{Y} > 0$ уравнение

$$\hat{M}(\hat{X}) \stackrel{\Delta}{=} PM(Q\hat{X}Q^*)P^* = \sum_{i,j=1}^{k} \gamma_{ij} T_i \hat{X} T_j^* = \hat{Y} \tag{15}$$

имеет $(\alpha \times \alpha)$-решение $\hat{X} > 0$. Спектр оператора $\hat{M}$ составляют элементы $\omega_{t\tau}$ матрицы $\Omega = \Sigma \Gamma \Sigma^*$, где $\Sigma = [d(T_1), \ldots, d(T_k)]$ — матрица собственности коллектива $\mathcal{A}$. Покажем, что системы неравенств

$$\omega_{tt} \ne 0,\quad t = \overline{1, \alpha}, \tag{16}$$

$$\omega_{tt} > 0,\quad t = \overline{1, \alpha}, \tag{17}$$

$$\Omega_1 \stackrel{\Delta}{=} \| 1/\omega_{t\tau} \|_1^{\alpha} \ge 0,\quad \omega_{t\tau} \ne 0,\ t = \overline{1, \alpha},\ \tau = \overline{1, \alpha}, \tag{18}$$

связаны с определенными свойствами оператора M и решений уравнения (14) при $Y \in \mathcal{Y}$.

Теорема 2. 1. *При условиях* (16) *существует матрица* $X \in \mathcal{E}_1$ *такая, что* $M(X) \in \mathcal{Y}$ *и выполнены равенства*

$$i_\pm(X) = i_\pm(\Omega_0),\ \Omega_0 \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{diag}\{\omega_{11}, \ldots, \omega_{\alpha\alpha}\}. \tag{19}$$

Если $i_\pm(\Gamma) \le 1$ *и* $M(X) \in \mathcal{Y}$ *для некоторой матрицы* $X \in \mathcal{E}_1$, *то выполнены соотношения* (16), (19).

2. *При условиях* (17) *существует матрица* $X \in \mathfrak{X}$ *такая, что* $M(X) \in \mathcal{Y}$. *Если* $i_+(\Gamma) = 1$ *и* $M(X) \in \mathcal{Y}$ *для некоторой матрицы* $X \in \mathfrak{X}$, *то выполнены условия* (17).

3. *При условиях* (17) *и* $i_+(\Gamma) = 1$ *оператор* M *позитивно обратим. Если* M *— позитивно обратимый оператор, то выполнены условия* (16) – (18).

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— идеальный коллектив порядка* α. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Условия* (16) *и* $\mathcal{Y} \cap M\mathcal{E}_1 \neq \varnothing$ *эквивалентны. При их выполнении существует матрица* $X \in \mathcal{E}_1$, *удовлетворяющая* (19) *и* $M(X) \in \mathcal{Y}$. *Если* $i_\pm(\Omega) \leq 1$ *и* $M(X) \in \mathcal{Y}$ *для некоторой матрицы* $X \in \mathcal{E}_1$, *то выполнены соотношения* (16), (19).

2. *Условия* (17) *и* $\mathcal{Y} \cap M\mathfrak{X} \neq \varnothing$ *эквивалентны.*

3. *При условиях* (17) *и* $i_+(\Omega) = 1$ *оператор* M *позитивно обратим. Условия* (18) *эквивалентны позитивной обратимости оператора* M.

Доказательство теоремы 2. Пусть X_t, Y_t и T_{it} — последовательные главные подматрицы размера $t \times t$ матриц $\hat{X}$, $\hat{Y}$ и T_i в уравнении (15), $t = \overline{1, \alpha}$. Если $\det X_{t-1} \neq 0$, то

$$X_t = \begin{bmatrix} X_{t-1} & u_t \\ u_t^* & x_t \end{bmatrix} = R_t \begin{bmatrix} X_{t-1} & 0 \\ 0 & \kappa_t \end{bmatrix} R_t^*,\ R_t = \begin{bmatrix} I_{t-1} & 0 \\ u_t^* X_{t-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix},\ \kappa_t = x_t - u_t^* X_{t-1}^{-1} u_t,$$

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_{t-1} & v_t \\ v_t^* & y_t \end{bmatrix} = [T_{1t}, \dots, T_{kt}](\Gamma \otimes X_t)[T_{1t}, \dots, T_{kt}]^* = \Psi_t \Delta_t \Psi_t^* + \Theta_t, \tag{20}$$

$$\Delta_t = \Gamma \otimes \begin{bmatrix} X_{t-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Theta_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa_t \omega_{tt} \end{bmatrix},\ \Psi_t = [T_{1t} R_t, \dots, T_{kt} R_t].$$

Заметим, что элементы Y_t, за исключением y_t, не зависят от x_t. Если $Y_{t-1} > 0$, то $Y_t > 0$ при $y_t > v_t^* Y_{t-1}^{-1} v_t$, $t = \overline{2, \alpha}$. Поэтому условия (16) позволяют последовательно выбирать элементы x_t так, чтобы выполнялись неравенства $Y_t > 0$, $\kappa_t \omega_{tt} > 0$, причем

$$i_\pm(X_1) = i_\pm(\omega_{11}),\ i_\pm(X_t) = i_\pm(X_{t-1}) + i_\pm(\omega_{tt}),\ t = \overline{2, \alpha}. \tag{21}$$

Это означает, что при условиях (16) можно выбрать $X \in \mathcal{E}_1$ так, чтобы $M(X) \in \mathcal{Y}$ и выполнялись равенства (19), поскольку $i_\pm(X) = i_\pm(\hat{X})$. В частности, при условиях (17) можно выбрать $X \in \mathfrak{X}$. Используя лемму 1 и определяя индексы инерции кронекерового произведения, имеем

$$i_+(\Gamma \otimes X_t) = i_+(\Gamma) i_+(X_t) + i_-(\Gamma) i_-(X_t) \geq i_+(Y_t),\ t = \overline{1, \alpha}. \tag{22}$$

Если в представлении (20) выполнены неравенства

$$i_+(\Delta_t) = i_+(\Gamma) i_+(X_{t-1}) + i_-(\Gamma) i_-(X_{t-1}) < i_+(Y_t), \tag{23}$$

то согласно лемме 2 $\kappa_t \omega_{tt} > 0$, $t = \overline{2, \alpha}$. Если $i_\pm(\Gamma) \leq 1$ и для некоторой матрицы $\hat{X}$ значение $\hat{Y} = \hat{M}(\hat{X}) > 0$, то согласно (22) $r(X_t) = i_+(X_t) + i_-(X_t) \geq i_+(Y_t) = t$. В этом случае имеют смысл построения (20), выполнены неравенства (23) и, следовательно, соотношения (16), (19) и (21). Если же $i_+(\Gamma) = 1$, $\hat{X} > 0$ и $\hat{Y} > 0$, то неравенства (23) также справедливы. В этом случае выполнены условия (17), поскольку $Y_1 = \omega_{11} X_1$, $\kappa_t \omega_{tt} > 0$, $\kappa_t > 0$, $t = \overline{2, \alpha}$. Утверждения 1 и 2 доказаны.

Если $i_+(\Gamma) = 1$ и выполнены условия (17), то $\omega_{t\tau} \neq 0$, $t, \tau = \overline{1, \alpha}$ [4]. Полагая $\hat{Y} > 0$ и проверяя последовательно неравенства (23) с учетом леммы 2, получаем $X_1 = Y_1 / \omega_{11} > 0$, $\kappa_t > 0$, $t = \overline{2, \alpha}$. Это означает, что $\hat{X} > 0$ и оператор M позитивно обратим.

Покажем, что условия (16) – (18) следуют из позитивной обратимости M. Представим уравнение (15) в виде

$$\hat{M}(\hat{X}) = \Omega \odot \hat{X} + N(\hat{X}) = \hat{Y}, \tag{24}$$

где $N(\hat{X}) = \|N_{r\tau}(\hat{X})\|_1^\alpha$ — нильпотентный оператор, $N_{11}(\hat{X}) \equiv 0$, $N_{r\tau}$ зависят лишь от элементов x_{rl} матрицы $\hat{X}$ при $r \le t$, $l \le \tau$, $r + l \le t + \tau$. Структура оператора N позволяет последовательно исключать неизвестные x_{rl}, начиная с x_{11}, для любых значений элементов y_{rl} матрицы $\hat{Y}$ лишь при $\omega_{rl} \ne 0$, $r, l = \overline{1, \alpha}$. В условиях позитивной обратимости M решение $\hat{X} > 0$ существует для каждой матрицы $\hat{Y} > 0$. При этом неравенства $\omega_{rl} \ne 0$ также необходимы в процессе исключения x_{rl}, поскольку всегда существует $\hat{Y} > 0$ с любым наперед заданным значением элемента $y_{rl} > 0$. Следовательно, определена матрица Ω_1 и решение (24) имеет вид (13), где $H = \Omega_1 \odot \hat{Y}$, $S(H) = -\Omega_1 \odot N(H)$, $\nu = 2\alpha - 1$. Можно установить, что $E_+ \odot S^t(E_- \odot Z) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где $E_+ = \|\varepsilon^{i+j}\|_0^{\alpha-1} \ge 0$, $E_- = \|\varepsilon^{-i-j}\|_0^{\alpha-1} \ge 0$, $\varepsilon > 0$, $t = \overline{1, \nu - 1}$. Если $\hat{Y} > 0$, то согласно лемме 3 $\Omega_1 \ge 0$, так как $E_- \odot \hat{Y} > 0$, $E_- \odot \hat{M}^{-1}(E_- \odot \hat{Y}) \to \Omega_1 \odot \hat{Y} \ge 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следствием позитивной обратимости M является также неравенство $\Omega_1 + S(\Omega_1) + \ldots + S^{\nu-1}(\Omega_1)$. Теорема доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Если коллектив $\mathcal{A}$ идеален, то в (24) $N = 0$. Условия (16) означают, что $\hat{M}(\Omega_0) > 0$. В частности, при условиях (17) $\Omega_0 > 0$. Если $\hat{M}(\hat{X}) > 0$ и $\hat{X} > 0$, то выполнены условия (17). Вывод соотношений (16) и (19) при $i_\pm(\Omega) \le 1$ и $\hat{M}(\hat{X}) > 0$ следует из доказательства утверждения 1 теоремы 2 и представления $\Omega \odot \hat{X} = E(\Omega \otimes \hat{X})E^*$, где $E = [e_1 e_1^*, \ldots, e_\alpha e_\alpha^*]$, e_i — единичные векторы, $i = \overline{1, \alpha}$. При этом в (22) и (23) вместо Γ используется матрица Ω.

Поскольку $\hat{M}^{-1}(\hat{Y}) = \Omega_1 \odot \hat{Y}$, то согласно лемме 3 позитивная обратимость оператора M эквивалентна условиям (18). В случае $i_\pm(\Omega) = 1$ условия (17) и (18) эквивалентны (лемма 4). Теорема доказана.

Покажем, как можно усилить теоремы 2, 3 для различных коллективов $\mathcal{A}$.

a) $\mathcal{A}$ — левый коллектив. Вместо множеств $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{K}_1$ и $\mathfrak{X}$ используем более широкие множества

$$\mathcal{E}_1^+ = \{X / \hat{X} = Q^+ X Q^{+^*},\ \hat{X} = \hat{X}^*\},\ \mathcal{K}_1^+ = \{X \in \mathcal{E}_1^+ / \hat{X} \ge 0\},\ \mathfrak{X}^+ = \{X \in \mathcal{K}_1^+ / \hat{X} > 0\}.$$

Операторы (14) и (15) связаны соотношением $PM(X)P^* = \hat{M}(Q^+ X Q^{+^*})$. Позитивную обратимость оператора (14) определяем в виде $\mathcal{K}_2 \subset M\mathcal{K}_1^+ + \mathcal{L}$ ($\mathcal{Y} \subset M\mathfrak{X}^+ + \mathcal{L}$), где $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_1^+$ — клинья.

b) $\mathcal{A}$ — правый коллектив. Вместо множеств $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{Y}$ используем их подмножества

$$\mathcal{E}_2^+ = \{Y / Y = P^+ \hat{Y} P^{+^*},\ \hat{Y} = \hat{Y}^*\},\ \mathcal{K}_2^+ = \{Y \in \mathcal{E}_2^+ / \hat{Y} \ge 0\},\ \mathcal{Y}^+ = \{Y \in \mathcal{K}_2^+ / \hat{Y} > 0\}.$$

Операторы (14) и (15) связаны соотношением $M(Q\hat{X}Q^*) = P^+ \hat{M}(\hat{X}) P^{+^*}$. Позитивную обратимость оператора (14) определяем в виде $\mathcal{K}_2^+ \subset M\mathcal{K}_1$ ($\mathcal{Y}^+ \subset M\mathfrak{X}$), где $\mathcal{K}_2^+$ и $\mathcal{K}_1$ — конусы.

c) $\mathcal{A}$ — нейтральный коллектив. Вместо множеств $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{K}_1$, $\mathfrak{X}$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{Y}$ используем соответственно $\mathcal{E}_1^+$, $\mathcal{K}_1^+$, $\mathfrak{X}^+$, $\mathcal{E}_2^+$, $\mathcal{K}_2^+$ и $\mathcal{Y}^+$. Операторы (14) и (15) связаны соотношением $M(X) = P^+\hat{M}(Q^+XQ^{+^*})P^{+^*}$. Позитивную обратимость оператора (14) определяем в виде $\mathcal{K}_2^+ \subset M\mathcal{K}_1^+$ $(\mathcal{Y}^+ \subset M\mathfrak{X}^+)$.

Теоремы 2, 3 сохраняют силу в случаях a) – c) при указанных изменениях.

5. Локализация спектра. Рассмотрим уравнение

$$M_f(X) \triangleq -(4\pi^2)^{-1}\oint_o\oint_{\overline{o}} f(\lambda, \overline{\mu})R_\lambda XR_\mu^*\, d\lambda\, d\overline{\mu} = Y, \tag{25}$$

где $o\,(\overline{o})$ — простой замкнутый контур, охватывающий спектр $(n \times n)$-матрицы $A\,(A^*)$, $R_\lambda = (A - \lambda I_n)^{-1}$, f — функция, аналитическая по $\lambda\,(\overline{\mu})$ внутри $o\,(\overline{o})$, удовлетворяющая тождеству $f(\lambda, \overline{\mu}) \equiv \overline{f(\mu, \overline{\lambda})}$ и описывающая множества Λ_+: $f(\lambda, \overline{\lambda}) > 0$, $\Lambda_-: f(\lambda, \overline{\lambda}) < 0$, $\Lambda_0: f(\lambda, \overline{\lambda}) = 0$, $\lambda \in C^1$. Расположение спектра $\sigma(A)$ относительно данных множеств связано с определенными свойствами оператора M_f.

Теорема 4. *Для любой $(n \times n)$-матрицы $Y > 0$ уравнение (25) имеет решение $X > 0$ в том и только в том случае, когда*

$$\Phi = \|\Phi_{\iota\tau}\|_1^\nu \geq 0, f(\lambda_\iota, \overline{\lambda}_\tau) \neq 0, \;\; \iota = \overline{1, \nu}, \tau = \overline{1, \nu}, \tag{26}$$

где

$$\Phi_{\iota\tau} = \|\varphi_{ij}(\lambda_\iota, \overline{\lambda}_\tau)\|_{i,j=1}^{m_\iota, m_\tau}, \;\; \varphi_{ij}(\lambda, \overline{\mu}) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial\lambda^{i-1}\partial\overline{\mu}^{j-1}}\left(\frac{1}{f(\lambda, \overline{\mu})}\right),$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ — различные собственные значения матрицы A с соответствующими индексами $m_1, \ldots, m_\nu$.

Доказательство. Скалярные неравенства в (26) эквивалентны обратимости M_f, причем $M_f^{-1} = M_{1/f}$ [11]. Вычисляя интегралы с учетом разложения резольвенты и формул Коши, получаем

$$X = \sum_{\iota,\tau=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{m_\iota}\sum_{j=1}^{m_\tau}\varphi_{ij}(\lambda_\iota, \overline{\lambda}_\tau)Z_{\iota i}YZ_{\tau j}^*, \;\; c^*Xc = \operatorname{tr}(\Psi Y),$$

где $Z_{\iota i}$ — компоненты A, $c \neq 0$ — произвольный вектор, $\Psi = G_c\Phi_c^TG_c^*$, G_c — матрица, полученная из $G = [Z_{11}^*c, \ldots, Z_{1m_1}^*c, \ldots, Z_{\nu 1}^*c, \ldots, Z_{\nu m_\nu}^*c]$ после удаления нулевых столбцов, Φ_c — соответствующая подматрица Φ. Выполнение неравенства $\operatorname{tr}(\Psi Y) > 0$ для каждой матрицы $Y > 0$ эквивалентно условиям $\Psi \geq 0$, $\Psi \neq 0$ [6]. Используя свойства матриц $Z_{\iota i}$, можно показать, что столбцы G_c линейно независимы, а при условиях (26) $\Phi_c \geq 0$, $\Phi_c \neq 0$ и, следовательно, $c^*Xc > 0$ для любых $c \neq 0$, $Y > 0$ [12]. Утверждение необходимости теоремы также выполняется, если учесть, что существует вектор c_0, для которого $\Phi_{c_0} = \Phi$ и все столбцы матрицы $G = G_{c_0}$ линейно независимы. В качестве c_0 можно выбрать вектор, минимальный полином которого совпадает с минимальным полиномом всего пространства относительно матрицы A [1]. Теорема доказана.

Из (26) следует $\sigma(A) \subset \Lambda_+$. В [12] выделен класс функций f, удовлетворяющих условиям (26) для всех точек Λ_+. При этом теорема 4 становится критерием вложения $\sigma(A) \subset \Lambda_+$ (см. также [8]).

Сужая класс функций f, приведем условия локализации спектра как следствия теорем 2, 3. Пусть

$$f(\lambda, \overline{\mu}) = v_\lambda \Gamma v_\mu^*, \ \Gamma = \Gamma^*, \ v_\lambda = [f_1(\lambda), \ldots, f_k(\lambda)]. \tag{27}$$

Уравнение (25) приводится к виду (14) при $A_i = f_i(A)$, $i = \overline{1, k}$. В (16) – (18) можно положить $\omega_{t\tau} = f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)$, $\alpha = n$. При этом неравенства (16) и (17) означают соответственно, что $\sigma(A) \cap \Lambda_0 = \varnothing$ и $\sigma(A) \subset \Lambda_+$. Если $i_+(\Gamma) = 1$, то $\sigma(A) \subset \Lambda_+$ в том и только в том случае, когда уравнение (14) имеет решение $X > 0$ при любой заданной матрице $Y > 0$. Данный критерий следует из утверждения 3 теоремы 2 и является обобщением теоремы Ляпунова. Утверждение 1 теоремы 2 является аналогом обобщенной теоремы Островского — Шнайдера. Если X — решение (14) при $i_\pm(\Gamma) \le 1$ и $Y > 0$, то количество точек $\sigma(A)$, принадлежащих $\Lambda_+(\Lambda_-)$, совпадает с $i_+(X)$ $(i_-(X))$, причем $\sigma(A) \cap \Lambda_0 = \varnothing$. Если матрица A простая, то выполнены аналогичные следствия теоремы 3. В этом случае условия (18) и (26) эквивалентны, а теорема 4 следует из утверждения 3 теоремы 3.

На базе теорем 2 и 3 можно построить аналоги теорем Ляпунова и Островского — Шнайдера для регулярных пучков и λ-матриц [13 – 15]. Так, если в (14) и (27) $i_+(\Gamma) = 1$, $A_i = f_i(EA)$, $i = \overline{1, k}$, где E — решение ранга r системы $AEB = BEA$, $E = EBE$, то область Λ_+ содержит, по крайней мере, r собственных значений пучка $A - \lambda B$ в том и только в том случае, когда для любой матрицы $Y_0 > 0$ существует матрица X_0 такая, что матрицы $X = EX_0E^* \ge 0$ и $Y = EY_0E^* \ge 0$ ранга r удовлетворяют уравнению (14) [13].

Соотношение (25) может служить аналогом уравнения Ляпунова в задаче локализации спектра регулярной λ-матрицы A_λ, если в качестве R_λ использовать ее резольвенту A_λ^{-1} или мультипликативную производную $A_\lambda' A_\lambda^{-1}$ [14, 15]. При этом для класса функций (27) данное уравнение также сводится к виду (14), матричные коэффициенты которого имеют свойства коллектива.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1989. – 552 с.
2. *Икрамов Х. Д.* Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 192 с.
3. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
4. *Мазко А. Г.* Матричные уравнения и коллективы. – Киев, 1989. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.83).
5. *Мазко А. Г.* Полуобращение и свойства инвариантов матриц // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С. 525 – 528.
6. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
7. *Мазко А. Г.* Теория распределения спектра матрицы относительно алгебраических и трансцендентных кривых. – Киев, 1983. – 40 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.5).
8. *Chojnowski F., Gutman S.* Root-Clustering Criteria (II): Linear Matrix Equations // IMA J. Math. Contr. & Inf. – 1989. – **6**. – P. 289 – 300.
9. *Hill R. D.* Inertia Theory for Simultaneously Triangulable Complex Matrices // Linear Algebra and Its Appl. – 1969. – **2**. – P. 131 – 142.
10. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
11. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
12. *Мазко А. Г.* Критерий принадлежности спектра матрицы произвольной области из некоторого класса // Автоматика. – 1980. – № 6. – С. 54 – 59.
13. *Мазко А. Г.* К задаче распределения спектра регулярного пучка матриц // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 99 – 110.
14. *Мазко А. Г.* Распределение спектра регулярного пучка матриц относительно плоских кривых // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 1. – С. 116 – 120.
15. *Мазко А. Г.* Обобщенное уравнение Ляпунова для регулярного пучка матриц // Мат. методы исследования прикл. задач динамики тел, несущих жидкость. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 67 – 76.

Получено 03.05.91