УДК 512.64

О. М. Мельник, канд. физ.-мат. наук.
(Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН Украины, Львов)

СТРОЕНИЕ УНИТАЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ КОРНЯМИ

Для унитальных матричных многочленов с попарно различными характеристическими корнями исследована задача их строения: подобия, приводимости преобразованием подобия к блочно-треугольному, блочно-диагональному, в частности треугольному и диагональному видам, а также выделения линейных множителей.

Для унітальних матричних многочленів з попарно різними характеристичними коренями досліджена задача їх будови: подібності, звідності перетворенням подібності до блочно-трикутного, блочно-діагонального, зокрема трикутного і діагонального виглядів, а також виділення лінійних множників.

В настоящей статье обобщаются результаты работ [1–5], касающиеся вопросов полускалярной эквивалентности, подобия и факторизации матричных многочленов из $\mathcal{P}_n[x]$ ($\mathcal{P}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики), а также их приводимости к более простым видам.

1. О полускалярной эквивалентности многочленных матриц. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — многочленные матрицы, элементарные делители которых попарно взаимно простые и $\det A(x) = \det B(x) = \Delta(x)$. Известно [6], что полускалярно эквивалентными преобразованиями матрицы $A(x)$ и $B(x)$ приводятся к треугольным формам

$$S_1 A(x) Q_1(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ -a_1(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix},$$
$$S_2 B(x) Q_2(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ -b_1(x) & \cdots & -b_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

соответственно, причем $\deg a_i(x) < \deg \Delta(x)$, $\deg b_i(x) < \deg \Delta(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим строки $a(x) = \| a_1(x) \ldots a_{n-1}(x)\ 1 \|$ и $b(x) = \| b_1(x) \ldots b_{n-1}(x)\ 1 \|$, где $a_i(x), b_i(x)$, $i = 1, \ldots, n-1$, взяты из треугольных форм (1).

***Определение* 1.** *Значением строки* $a(x)$ *на системе корней многочлена* $\Delta(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_l)^{k_l}$ *называется числовая матрица*

$$M_{a(x)}(\Delta) = \begin{Vmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_l \end{Vmatrix}, \quad H_j = \begin{Vmatrix} a_1(\alpha_j) & \ldots & a_{n-1}(\alpha_j) & 1 \\ a_1'(\alpha_j) & \ldots & a_{n-1}'(\alpha_j) & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_1^{(k_j-1)}(\alpha_j) & \ldots & a_{n-1}^{(k_j-1)}(\alpha_j) & 0 \end{Vmatrix}, \quad j = 1, \ldots, l.$$

***Определение* 2.** *Матрицей значений многочлена* $d(x)$ *на системе корней многочлена* $\Delta(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_l)^{k_l}$ *будем называть матрицу* $d[\Delta] = \operatorname{diag}(d[\alpha_1^{(k_1)}], \ldots, d[\alpha_l^{(k_l)}])$, *где*

$$d\left[\alpha_j^{(k_j)}\right] = \begin{Vmatrix} d(\alpha_j) & & & 0 \\ d'(\alpha_j) & d(\alpha_j) & & \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ d^{(k_j-1)}(\alpha_j) & \binom{k_j-1}{1} d^{(k_j-2)}(\alpha_j) & & d(\alpha_j) \end{Vmatrix}, \ j = 1, \dots, l.$$

Теорема 1. *Для того чтобы многочленные матрицы* $A(x)$ *и* $B(x)$, *элементарные делители которых совпадают и попарно взаимно простые, были полускалярно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие многочлен* $d(x)$, $(d(x), \Delta(x)) = 1$, $\deg d(x) < \deg \Delta(x)$ *и числовая неособенная матрица* C, *что справедливо равенство*

$$M_{a(x)}(\Delta) = d[\Delta]\, M_{b(x)}(\Delta)\, C \qquad (2)$$

при зафиксированной нумерации корней многочлена $\Delta(x)$.

Доказательство. Полускалярная эквивалентность многочленных матриц $A(x)$ и $B(x)$ равносильна полускалярной эквивалентности их треугольных форм (1). Поэтому из равенства $C S_1 A(x) Q_1(x) = S_2 B(x) Q_2(x) Q(x)$, где C — числовая неособенная матрица, $Q(x)$ — многочленная обратимая матрица, после перехода в ней к взаимным матрицам, получим равенство

$$\begin{Vmatrix} \Delta(x) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \Delta(x) & \\ a_1(x) & \dots & a_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} d_{11}(x) & \dots & d_{1n}(x) \\ d_{n1}(x) & \dots & d_{nn}(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \Delta(x) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \Delta(x) & \\ b_1(x) & \dots & b_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (3)$$

Так как $d_{i\,n}(x) = c_{i\,n}\Delta(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, то из обратимости многочленной матрицы

$$\begin{Vmatrix} d_{11}(x) & \dots & d_{1n}(x) \\ d_{n1}(x) & \dots & d_{nn}(x) \end{Vmatrix}$$

следует $(d_{n\,n}(x), \Delta(x)) = 1$, а из равенства $d_{n\,n}(x) = c_{1n}a_1(x) + \dots + c_{n-1,\,n}a_{n-1}(x) + c_{n\,n}$ следует неравенство $\deg d_{n\,n}(x) < \deg \Delta(x)$.

Рассмотрим последнюю строку матриц, полученных в левой и правой частях равенства (3):

$$a(x)\, C_* = d_{nn}(x)\, b(x) + \Delta(x) \,\|\, d_{n1}(x) \dots d_{n\,n-1}(x)\ 0 \,\|. \qquad (4)$$

Если в обеих частях равенства (4) перейти к значениям матриц [6] на системе корней $\Delta(x)$, то, положив $d_{n\,n}(x) = d(x)$, получим (2). Необходимость доказана.

Обратно, при наличии соотношения (2) существует многочлен $d(x) = d_{n\,n}(x)$ степени меньшей $\deg \Delta(x)$ такой, что $(d_{n\,n}(x), \Delta(x)) = 1$. Построим равенство

$$\|\, a_1(x) \cdots a_{n-1}(x)\ 1 \,\|\, C_* = d_{n\,n}(x) \,\|\, b_1(x) \cdots b_{n-1}(x)\ 1 \,\| + \Delta(x) \,\|\, d_{n1}(x) \cdots d_{n\,n-1}(x)\ 0 \,\|,$$

где многочлены $a_i(x), b_i(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, получены по интерполяционным формулам, а разность $a(x)\,C_* - d_{n\,n}(x)\,b(x)$ делится на многочлен $\Delta(x)$ ввиду соотношения (2). Легко убедиться, что матрица

$$R(x) = \begin{Vmatrix} c_{11} - c_{1n}b_1(x) & \dots & c_{1n} - c_{1n}b_{n-1}(x) & c_{1n}\Delta(x) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ c_{n-1,1} - c_{n-1,n}b_1(x) & \dots & c_{n-1,n-1} - c_{n-1,n}b_{n-1}(x) & c_{n-1,n}\Delta(x) \\ d_{n1}(x) & \dots & d_{n2}(x) & d_{nn}(x) \end{Vmatrix}$$

является решением уравнения

$$\begin{Vmatrix} \Delta(x) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \Delta(x) & \\ a_1(x) & \dots & a_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix} C_* = X \begin{Vmatrix} \Delta(x) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \Delta(x) & \\ b_1(x) & \dots & b_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

и обратима. Из равенства, полученного из уравнения (5) при $X = Q(x)$, обе части которого предварительно умножены слева и справа соответственно на матрицы, к которым матрицы

$$\begin{Vmatrix} \Delta(x) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \Delta(x) & \\ a_1(x) & \dots & a_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \Delta(x) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & \Delta(x) & \\ b_1(x) & \dots & b_{n-1}(x) & 1 \end{Vmatrix}$$

являются взаимными, следует полускалярная эквивалентность треугольных форм (1). Теорема доказана.

Пусть $P(x)$ — многочленная обратимая матрица из соотношения $P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \Delta(x))$, $p_n(x)$ — ее последняя строка, S_1 — числовая неособенная матрица из (1). Очевидно, что $p_n(x) = a(x) S_1$. Так как $M_{p_n(x)}(\Delta) = M_{a(x)}(\Delta) S_1$, то вместо строки $a(x)$ можно рассматривать строку $p_n(x)$.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — многочленные матрицы, эквивалентные канонической диагональной форме

$$P_A(x)\, A(x)\, Q_A(x) = P_B(x)\, B(x)\, Q_B(x) = \varepsilon(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

$$\varepsilon_n(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_l)^{k_l},$$

$$A = M_{\operatorname{diag}(\varepsilon_n/\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n/\varepsilon_{n-1}, 1) P_A(x)}(\varepsilon_n),$$

$$B = M_{\operatorname{diag}(\varepsilon_n/\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n/\varepsilon_1, 1) P_A(x)}(\varepsilon_n)$$

— матрицы значений [6] соответственных матриц на системе корней многочлена $\varepsilon_n(x)$.

Теорема 2. *Если матрицы $A(x)$ и $B(x)$ полускалярно эквивалентные, то существуют неособенные решения X_0, Y_0 уравнения $AX = YB$, где $Y = \operatorname{diag}(Y_1, \dots, \dots, Y_l)$,*

$$Y_i = \begin{Vmatrix} Y_{i1} & & 0 & \\ Y_{i2} & Y_{i1} & & \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ Y_{ik_i} & \binom{k_i - 1}{1} Y_{i,k_i-1} & & Y_{i1} \end{Vmatrix},$$

Y_{ij} — неизвестные $(n \times n)$-матрицы $i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, k_i$.

Доказательство. Пусть $A(x) = CB(x)R(x)$. Из равенства $P_A^{-1}(x)\varepsilon(x)\, Q_B^{-1}(x) = C\, P_B^{-1}(x)\varepsilon(x)\, Q_A^{-1}(x) R(x)$ после перехода к взаимным матрицам и сокращения на $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ получим

$$\operatorname{diag}\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1},\ldots,\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}},1\right)P_A(x)C=Q(x)\operatorname{diag}\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1},\ldots,\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}},1\right)P_B(x).$$

Переходя в последнем равенстве к матрицам значений на системе корней многочлена $\varepsilon_n(x)$, получаем $A\,C = \operatorname{diag}(Y_1,\ldots, Y_l)\,B$, где

$$Y_j = \left\| \begin{matrix} Q(\alpha_j) & & & 0 \\ Q'(\alpha_j) & Q(\alpha_j) & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ Q^{(k_j-1)}(\alpha_j) & \binom{k_j-1}{1}Q^{(k_j-2)}(\alpha_j) & \cdots & Q(\alpha_j) \end{matrix} \right\|, \; j = 1, \ldots, l,$$

что и требовалось доказать.

2. Строение унитальных матричных многочленов с попарно различными характеристическими корнями. Пусть заданы унитальные матричные многочлены

$$A(x) = E\,x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s,\; B(x) = E\,x^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s,$$

$$\Delta(x) = \det A(x) = \det B(x) = \prod_{i=1}^{ns}(x-\alpha_i),\; \alpha_i \neq \alpha_j,\; i \neq j. \tag{6}$$

Из теоремы 1 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Унитальные матричные многочлены* (6) *подобны тогда и только тогда, когда существуют числовые неособенные матрицы C и диагональная D такие, что*

$$M_{a(x)}(\Delta) = D\,M_{b(x)}(\Delta)\,C.$$

***Определение* 3.** *Следующие три преобразования, совершаемые над числовой матрицей M, называются Δ-элементарными: перестановка строк матрицы; умножение матрицы M слева на диагональную числовую неособенную матрицу; умножение матрицы M справа на числовую неособенную матрицу.*

***Определение* 4.** *Две числовые матрицы будем называть Δ-эквивалентными, если одна из них может быть преобразована в другую Δ-элементарными преобразованиями.*

***Определение* 5.** *Последовательность l строк $a_{k_1}, \ldots, a_{k_l}$ числовой матрицы называется связанной, если каждая подматрица, образованная двумя соседними строками a_{k_i} и $a_{k_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, l-1$, этой последовательности, содержит столбец $\| 1 \;\; 1 \|^T$.*

Две строки числовой матрицы будем называть эквивалентными, если они являются членами одной связанной последовательности ее строк.

***Определение* 6.** *Числовая матрица H называется стандартной, если все ее первые ненулевые элементы строк и столбцов являются единичными элементами и все ее строки образуют связанную последовательность.*

Под первым ненулевым элементом строки (столбца), как обычно, понимается первый слева (сверху) ненулевой элемент.

Теорема 3. *Если корни характеристического многочлена матрицы $A(x) = E\,x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ попарно различны, то матрица $M_{a(x)}(\Delta)$ Δ-эквивалентна матрице*

$$\left\| \begin{matrix} E \\ K \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

где E — единичная $(n \times n)$-матрица, $K = \operatorname{diag}(H_1,\ldots, H_t)$, H_i, $i = 1, \ldots, t$, — стандартные матрицы.

Доказательство. Легко видеть, что существует такая нумерация корней $\Delta(x)$ и такие числовые неособенные матрицы S и диагональная D, что

$$D\, M_{a(x)}(\Delta)\, S = \left\| \begin{matrix} E \\ W \end{matrix} \right\|,$$

где все первые ненулевые элементы строк и столбцов матрицы W единичные. Если все строки матрицы W связанные, то теорема доказана. В противном случае, пусть a_{s_1} — первая строка, не эквивалентная первой строке a_1. Если в строке a_{s_1} содержатся ненулевые элементы, отличные от единичных, то первый такой элемент (над ним обязательно имеется единичный элемент) сделаем единичным умножением слева и справа на подходящие диагональные матрицы. Если же строка a_{s_1} содержит только нулевые и единичные элементы, то может случиться, что под единичными элементами этой строки имеются ненулевые элементы строк, эквивалентных строке a_1. Пусть a_{m_1} — первая из этих строк. Первый ненулевой элемент этой строки сделаем единичным умножением на подходящие диагональные матрицы. В рассмотренных случаях множество строк, эквивалентных строке a_1, пополнится хотя бы на одну строку a_{s_1}. Если под единичными элементами строки a_{s_1}, состоящей только из нулевых и единичных элементов, нет ненулевых элементов, принадлежащим строкам, эквивалентным a_1, то в этом случае строку a_{s_1} невозможно присоединить к строкам, эквивалентным строке a_1. Продолжая рассматривать строки, не эквивалентные a_1, построим максимальную последовательность строк, содержащую строку a_1. Если эта связанная последовательность имеет $n(s-1)$ строк, то теорема доказана. В противном случае перестановкой строк (перенумерацией корней $\Delta(x)$) и столбцов полученной матрицы можно достичь того, что матрица $D_1 M_{a(x)}(\Delta)\, S_1$ будет иметь вид

$$\left\| \begin{matrix} E & \\ H_1 & 0 \\ 0 & W_1 \end{matrix} \right\|,$$

где H_1 — стандартная матрица, все строки и столбцы которой отличные от нулевых (в противном случае $A(x)$ не была бы унитальной [6]). Применив к матрице W_1 приведенные выше рассуждения, мы через конечное число шагов получим требуемую форму.

Определение 7. *Матрицу* (7) *из теоремы* 3 *будем называть нормальной формой числовой матрицы* $M_{a(x)}(\Delta)$ *относительно* Δ*-элементарных преобразований.*

Теорема 4. *Нормальная форма* (7) *матрицы* $M_{a(x)}(\Delta)$ *при зафиксированных в теореме* 3 *нумерации корней многочлена и размещении единичных элементов в блоках* H_i, $i = 1, \ldots, t$, *единственная в классе* Δ*-эквивалентных матриц.*

Доказательство. Из предположения наличия двух нормальных форм $\left\| \begin{matrix} E \\ K \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \begin{matrix} E \\ \overline{K} \end{matrix} \right\|$ матрицы $M_{a(x)}(\Delta)$, удовлетворяющих условию теоремы, следует существование таких диагональных матриц D и S, что $D\,K = \overline{K}S$, т.е. $D\operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_t) = \operatorname{diag}(\overline{H}_1, \ldots, \overline{H}_t)\,S$. Из последнего соотношения с учетом стандартности блоков H_i и $\overline{H}_i$, $i = 1, \ldots, t$, следует $D = S = \operatorname{diag}(s_1 E_1, \ldots, s_t E_t)$, где порядки единичных матриц E_i совпадают с порядками соответствующих блоков H_i (или $\overline{H}_i$), $i = 1, \ldots, t$. Следовательно, $K = \overline{K}$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $A_1, \ldots, A_s$ *и* $B_1, \ldots, B_s$ *— два набора числовых* $(n \times n)$-

матриц такие, что многочленные матрицы $A(x) = E x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$ *и* $B(x) = E x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s$ *имеют характеристический многочлен* $\det A(x) = \det B(x) = \Delta(x)$ *с попарно различными корнями. Для того чтобы существовала числовая неособенная матрица* T *такая, что* $A_i = T B_i T^{-1}$, $i = 1, \ldots, s$, *необходимо и достаточно, чтобы нормальные формы матриц* $M_{a(x)}(\Delta)$ *и* $M_{b(x)}(\Delta)$ *при зафиксированных нумерации корней и размещении единичных элементов совпадали.*

Доказательство основано на следствии 1 и теоремах 3 и 4.

Теорема 6. *Пусть характеристический многочлен многочленной унитальной матрицы* $A(x) = E x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$ *не имеет кратных корней. Для того чтобы для матрицы* $A(x)$ *существовала такая числовая неособенная матрица* T, *что*

$$T A(x) T^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t(x) \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы подматрица K *нормальной формы* (7) *матрицы* $M_{a(x)}(\Delta)$ *имела блочно-диагональный вид* $K = \operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_t)$, *причем число столбцов ее стандартных блоков* H_i, $i = 1, \ldots, t$ *совпадало бы с порядком соответствующих блоков-матриц из правой части равенства* (8).

Доказательство теоремы достаточно провести, положив $t = 2$. Пусть $\det A_i(x) = \varphi_i(x)$, $\deg \varphi_i(x) = h_i$, $i = 1, 2$, $h_1 + h_2 = n$. Имеем $\operatorname{rang} M_{a(x)}(\varphi_i) = h_i$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим матрицу

$$M_{a(x)}(\Delta) = \begin{Vmatrix} M_{a(x)}(\varphi_1) \\ M_{a(x)}(\varphi_2) \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

В матрице $M_{a(x)}(\varphi_2)$ имеется h_2 линейно независимых столбцов, поэтому умножив матрицу (9) справа на подходящую числовую неособенную матрицу, получим матрицу

$$\begin{Vmatrix} U_1 & U_3 \\ 0 & U_2 \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где $(s h_2 \times h_2)$-матрица U_2 имеет ранг h_2. Так как ранг матрицы (10) равен n, то ранг $(s h_1 \times h_1)$-матрицы U_1 равен h_1. Пусть первые h_i строк матрицы U_i, $i = 1, 2$, линейно независимы. Умножив матрицу (10) справа на подходящую числовую неособенную матрицу, получим матрицу

$$\begin{Vmatrix} E_{h_1} & 0 \\ V_1 & 0 \\ 0 & E_{h_2} \\ 0 & V_2 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Осталось перенумерацией корней и умножением матрицы (11) слева и справа на подходящие диагональные матрицы перейти к матрице

$$\begin{Vmatrix} E & \\ H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

где H_1, H_2 — стандартные матрицы.

Обратно, если нормальная форма матрицы $M_{a(x)}(\Delta)$ имеет вид (12), то rang $M_{a(x)}(\varphi_i) = h_i$, $i = 1, 2$. Тогда матрица $A(x)$ преобразованием подобия приводится к блочно-диагональному виду. Теорема доказана.

Следствие 2. *Для того чтобы унитальная многочленная матрица с попарно различными характеристическими корнями преобразованием подобия приводилась к диагональному виду, необходимо и достаточно, чтобы подматрица K нормальной формы* (7) *матрицы $M_{a(x)}(\Delta)$ имела вид $K = \mathrm{diag}\,(H_1, \ldots, H_n)$, $H_i = \| 1 \ldots 1 \|^T$, $i = 1, \ldots, n$, — столбец высоты $s - 1$.*

Теорема 7. *Пусть характеристический многочлен многочленной матрицы $A(x) = E x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$ не имеет кратных корней. Для того чтобы для матрицы $A(x)$ существовала такая числовая неособенная матрица T, что*

$$T A(x) T^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1(x) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t(x) \end{Vmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая нумерация корней $\Delta(x)$, что подматрица K нормальной формы (7) *матрицы $M_{a(x)}(\Delta)$ имела бы вид*

$$K = \begin{Vmatrix} K_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & K_t \end{Vmatrix},$$

причем число столбцов $((s-1)k_i \times k_i)$-матрицы K_i, совпадало бы с порядком соответствующей матрицы $A_i(x)$, $i = 1, \ldots, t$.

Доказательство достаточно провести для $t = 2$. Пусть $\det A_2(x) = \varphi_2(x)$, $\deg \varphi_2(x) = s\,k$. Так как rang $M_{a(x)}(\varphi_2) = k$, то умножив матрицу

$$M_{a(x)}(\Delta) = \begin{Vmatrix} M_{a(x)}(\det A_1(x)) \\ M_{a(x)}(\varphi_2) \end{Vmatrix}$$

справа на подходящую числовую неособенную матрицу, получим матрицу

$$\begin{Vmatrix} U_1 & U_3 \\ 0 & U_2 \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

где $(s\,k \times k)$-матрица U_2 имеет ранг k. Так как ранг матрицы (13) равен n, то ранг матрицы U_1 равен $n - k$, а также rang $\| U_1 \;\; U_3 \| > n - k$. Пусть в матрицах U_1 и U_2 первые $n - k$ и k строк соответственно линейно независимы. Умножив матрицу (13) справа на подходящую числовую неособенную матрицу, будем иметь

$$\begin{Vmatrix} E_{n-k} & 0 \\ V_1 & V_3 \\ 0 & E_k \\ 0 & V_2 \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Теперь, умножая матрицу (14) слева и справа на подходящие матрицы и переставляя строки (перенумеровывая корни $\Delta(x)$), получаем нормальную форму матрицы

$$\begin{Vmatrix} & E & \\ K_1 & K_3 \\ 0 & K_2 \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

где матрица K_2 имеет размеры $(s-1)\,k \times k$.

Обратно, если нормальная форма (7) матрицы $M_{a(x)}(\Delta)$ имеет вид (15), то

$$\operatorname{rang}\ M_{a(x)}(\varphi_2) = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} 0 & E_k \\ 0 & K_2 \end{Vmatrix} = k,$$

где многочлен $\varphi_2(x)$ имеет те и только те $s\,k$ корней многочлена $\Delta\,(x)$, которые соответствуют последним k строкам единичной подматрицы и последним $(s-1)\,k$ строкам подматрицы K_2 нормальной формы (15). Теорема доказана.

***Следствие* 3.** *Для того чтобы унитальная многочленная матрица с попарно различными характеристическими корнями преобразованием подобия приводилась к треугольному виду, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая нумерация корней многочлена* $\Delta\,(x)$, *что подматрица* K *нормальной формы* (7) *матрицы* $M_{a(x)}(\Delta)$ *имела бы вид*

$$K = \begin{Vmatrix} K_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & K_n \end{Vmatrix},$$

где $K_i = \|\,1 \ldots 1\,\|^T$, $i = 1, \ldots, n$, — *столбец высоты* $s-1$.

Теорема 8. *Для того чтобы унитальный матричный многочлен с попарно различными характеристическими корнями имел свойство абсолютной выделяемости левых линейных множителей, необходимо и достаточно, чтобы все миноры всех возможных порядков* $1 \le r \le n$ *подматрицы* K *нормальной формы* (7) *матрицы* $M_{a(x)}(\Delta)$ *были отличны от нуля.*

Доказательство. Если матрица $A\,(x)$ имеет свойство абсолютной выделяемости левых линейных множителей [6], то $\operatorname{rang}\ M_{a(x)}[\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_n}] = n$ для любого набора n ее характеристических корней $\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_n}$, т.е. любые n строк матрицы $M_{a(x)}(\Delta)$ линейно независимы. Поэтому с учетом вида нормальной формы (7) матрицы $M_{a(x)}(\Delta)$ все миноры всех возможных порядков $1 \le r \le \le n$ подматрицы K не равны нулю.

Доказательство достаточности проводится обратными рассуждениями. Теорема доказана.

1. *Мельник О. М.* Подобие унитальных матричных многочленов // Докл. АН УССР. Сер.А.– 1984.– № 5.– С. 11–14.
2. *Казимирский П. С., Мельник О. М.* Решение вопроса полускалярной эквивалентности многочленных матриц с попарно различными характеристическими корнями // Там же.– 1988.– № 11.– С. 9–12.
3. *Мельник О. М.* Подобие унитальных матричных многочленов с попарно различными характеристическими корнями // Междунар. конф. по алгебре: Тез. докл. по теории колец, алгебр и модулей (Новосибирск, 21 - 26 авг. 1989г.).– Новосибирск, 1989.– С. 86.
4. *Казимирский П. С., Мельник О. М.* Подобие и строение унитальных матричных квадратных трехчленов с попарно различными характеристическими корнями // Кольца и модули. 3.: Зап. науч. сем. Ленингр. отд–ния Мат. ин–та АН СССР.– Л.: Наука, 1989.– Т. 175.– С. 63–68.
5. *Мельник О. М.* К полускалярной эквивалентности многочленных матриц // VI симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщ. (Львов, 11 – 13 сент. 1990г.).– Львов, 1990.– С. 83.
6. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.– К.: Наук. думка, 1981.– 224 с.

Получено 27.03.91