УДК 514 + 517.919

И. О. Парасюк, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПЕРЕМЕННЫЕ ТИПА ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ НА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ, РАССЛОЕННЫХ КОИЗОТРОПНЫМИ ТОРАМИ

Рассмотрено симплектическое многообразие в предположении, что на нем определено гладкое симплектическое действие коммутативной группы Ли с компактными коизотропными орбитами. С целью детального описания потоков гамильтоновых систем с инвариантными гамильтонианами исследована проблема существования переменных типа действие-угол. Введено понятие нерезонансной симплектической структуры, для которой решена задача распознания резонансных и нерезонансных торов.

Розглянуто симплектичний многовид у припущенні, що на ньому визначено симплектичну дію комутативної групи Лі з компактними коізотропними орбітами. З метою детального опису потоків гамільтонових систем з інваріантними гамільтоніанами досліджено проблему існування змінних типу дія-кут. Впроваджено поняття нерезонансної симплектичної структури, для якої розв'язано задачу розпізнання резонансних та нерезонансних торів.

Симплектические многообразия со структурой гладкого расслоения, слоями которого являются лагранжевы, а в более общем случае изотропные торы, естественным образом возникают при глобальном исследовании вполне интегрируемых систем [1 – 3]. Обнаружение гамильтоновых систем, имеющих коизотропные инвариантные торы [4, 5], послужило поводом к выделению в качестве объекта изучения симплектических многообразий, расслоенных коизотропными торами. Проведенное в данной работе исследование ограничивается наиболее наглядным случаем, когда структура расслоения возникает вследствие гладкого симплектического действия коммутативной группы Ли. Цель исследования состоит в том, чтобы объяснить, как устроены на таком расслоении симплектическая структура, скобка Пуассона, поток гамильтоновой системы с инвариантным гамильтонианом.

1. Коизотропные орбиты симплектического действия коммутативной группы Ли. Пусть (M^{2n}, ω^2) — связное симплектическое многообразие, I — гамильтонов изоморфизм пространства дифференциальных 1-форм на пространство векторных полей многообразия M^{2n}, определяемый соотношением $I\omega^1 \rfloor \omega^2 = -\omega^1$, где $\rfloor$ — операция внутреннего произведения $(\xi \rfloor \omega^2 = \omega^2(\xi, \cdot))$, ω^1 — произвольная 1-форма. Если ω^1 замкнута, но, возможно, не точна, то векторное поле $I\omega^1$ называется локально гамильтоновым.

Предположим, что отображение $\hat{\Phi}\colon \mathbb{R}^r \times M^{2n} \to M^{2n}\colon (\tau \in \mathbb{R}^r, x \in M^{2n}) \to \to \hat{\Phi}(\tau, x)$ определяет гладкое симплектическое действие группы $(\mathbb{R}^r, +)$ на M^{2n}. Пусть это действие локально свободно, т.е. соответствие, сопоставляющее вектору $a \in \mathbb{R}^r$ локально гамильтоново векторное поле $\hat{X}_a(x) = d/dt|_{t=0} \times \times \hat{\Phi}(at, x)$, взаимно однозначно.

Утверждение 1. *Изоморфизм $a \to X_a$ из коммутативной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли локально гамильтоновых векторных полей на M^{2n} определяет на $\mathfrak{g}$ кососимметричную билинейную форму (2-коцикл) $C(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \omega^2(X_a, X_b)$.*

Доказательство следует из выражения для коммутатора: $0 = [X_a, X_b] = = I\, d\,\omega^2(X_b, X_a)$, из которого вытекает, что C не зависит от точек M^{2n}.

Пусть $\hat{C}$ — 2-коцикл, порожденный на $\mathbb{R}^r$ как алгебре Ли группы $(\mathbb{R}^r, +)$ в соответствии с утверждением 1.

Сформулируем основные предположения.

А. Орбита каждой точки $x \in M^{2n}$ компактна.

Б. Ядро формы $\hat{C}$ имеет размерность, равную коразмерности орбит, т.е. $2n - r \overset{\text{def}}{=} s$.

При выполнении предположений А и Б каждая орбита является коизотропным r-мерным тором. Коизотропность означает, что кософтогональное относительно ω^2 дополнение к касательному пространству орбиты в любой ее точке принадлежит этому касательному пространству [1, 6].

Симплектическое действие, удовлетворяющее условиям А и Б, возникает в ситуации, когда: 1) на M^{2n} существует r линейно независимых замкнутых 1-форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$; 2) их попарные скобки Пуассона $\{\alpha_i, \alpha_j\} \overset{\text{def}}{=} \alpha_i(I\,\alpha_j) \equiv \equiv \omega^2(I\,\alpha_j, I\,\alpha_i) = c_{ji}$ постоянны; 3) ранг матрицы $\{c_{ji}\}_{i,\,j=1}^{r}$ равен $s = 2n - r$; 4) слои слоения, заданного уравнениями $\beta_j = 0$, $j = 1, \ldots, s$, компактны. Здесь

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{r} \kappa_{kj}\, \alpha_k,$$

а $\{\kappa_j = (\kappa_{1j}, \ldots, \kappa_{rj})\}_{j=1}^{s}$ — базис решений линейной системы $\sum_{k=1}^{r} c_{ik}\, x_k = 0$.

Действительно, векторные поля $I\,\alpha_i$, $i = 1, \ldots, r$, являются генераторами симплектического действия группы $(\mathbb{R}^r, +)$ на M^{2n}. Поскольку

$$\beta_j(I\,\alpha_i) = -\{\alpha_i, \beta_j\} = \sum_{k=1}^{r} c_{ik}\, \kappa_{kj} = 0,$$

то каждое поле $I\,\alpha_i$ касается каждого слоя $\beta_j = 0$. Отсюда в силу условия 4 следует компактность орбит и в силу условия 3 — их коизотропность.

Нетрудно заметить, что рассмотренная ситуация является локально гамильтоновым вариантом теоремы Лиувилля — Арнольда.

Гладкость действия группы $(\mathbb{R}^r, +)$ и компактность его орбит позволяет ввести на M^{2n} структуру гладкого расслоения

$$\pi\colon M^{2n} \to B, \tag{1}$$

где B — многообразие орбит, $\dim B = s$.

Рассмотрим теперь гамильтонову систему с инвариантным гамильтонианом $H(x) = H(\hat{\Phi}(\tau, x))$. Векторное поле IdH касается слоев расслоения (1) в силу их коизотропности [6]. Так как это поле инвариантно, то на слое $\pi^{-1}(y)$, $y \in B$, оно совпадает с $\hat{X}_a$ при некотором $a = a(y)$ и, следовательно, порождает квазипериодический (в частном случае периодический) поток на $\pi^{-1}(y)$. Одна из задач данной работы состоит в описании структуры частот этого потока и в выяснении вопроса о том, являются ли фазовые кривые такого потока всюду плотными на слое. Оказывается, ответ на поставленный вопрос тесно связан с поведением слоев слоения, порождаемого ядром сужения $\omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$.

2. Орбиты действия Ker $\hat{C}$. Ядро формы $\hat{C}$ действует на M^{2n}: $(a \in \operatorname{Ker}\hat{C}$, $x \in M^{2n}) \to \hat{\Phi}(a, x)$. Касательное пространство к орбите $\{\hat{\Phi}(a, x)\}_{a \in \operatorname{Ker}\hat{C}}$ в точке x совпадает с множеством $\{\hat{X}_b(x)\}_{b \in \operatorname{Ker}\hat{C}}$, а значит, с ядром сужения формы ω^2 на $T_x\pi^{-1}(y)$, $y = \pi(x)$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. $\operatorname{Ker}\omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$ *определяет на* $\pi^{-1}(y)$ *слоение, слои кото-*

рого совпадают с орбитами действия ядра формы $\hat{C}$.

С другой стороны, справедливо такое утверждение.

Утверждение 3. *Любой ковектор* $p \in T_y^* B$ *порождает инвариантное относительно действия* $(\mathbb{R}^r, +)$ *векторное поле* $I\pi^* p$ *на слое* $\pi^{-1}(y)$, *касающееся слоев* $\operatorname{Ker} \omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$.

Доказательство. Так как $\omega^2(\xi, I\pi^* p) = p(\pi_* \xi) = 0 \quad \forall\ \xi \in T_x \pi^{-1}(y)$, $y = \pi(x)$, то $I\pi^* p$ принадлежит косоортогональному дополнению к $T_x \pi^{-1}(y)$ и в силу условия коизотропности касается $\pi^{-1}(y)$.

Следствие. *Скобки Пуассона инвариантных функций на* M^{2n} *тождественно равны нулю.*

Из инвариантности $I\pi^* p$ и утверждения 2 следует, что равенство $X_b = I\pi^* p$ устанавливает изоморфизм между $\operatorname{Ker} \hat{C}$ и $T_y^* B$. Следовательно, на слое $\pi^{-1}(y)$ определено действие $T_y^* B$, орбиты которого образуют слои $\operatorname{Ker} \omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$. Теперь ясно, что векторное поле $I\,dH$ с инвариантным гамильтонианом касается не только r-мерных слоев расслоения (1), но и s-мерных слоев $\operatorname{Ker} \omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$.

3. Локально гамильтоновы векторные поля, связанные со стационарной подгруппой. Стационарная подгруппа $\{\tau \in \mathbb{R}^r : \hat{\Phi}(\tau, x) = x\}$ любой точки x в силу предположения А является решеткой в $\mathbb{R}^r$ с r образующими. Решетки точек, принадлежащих одному слою расслоения (1), совпадают. Поэтому определено многозначное отображение $F : B \to \mathbb{R}^r$, сопоставляющее точке $y \in B$ все векторы стационарной подгруппы любой точки слоя $\pi^{-1}(y)$. Пусть $y_0 \in B$, $f_0 \in F(y_0)$. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности $U \ni y_0$ определена единственная гладкая однозначная ветвь $f : U \to \mathbb{R}^r$ отображения F, для которой $f(y_0) = f_0$.

Утверждение 4. *Векторное поле* $\hat{X}_{f\circ\pi}$ *на порции* $\pi^{-1}(U)$ *локально гамильтоново и порождает периодический с периодом* 1 *поток* $(\pi^{-1}(U), \{g^t\}_{t\in\mathbb{R}})$, *где* $g^t x = \hat{\Phi}(t f \circ \pi(x), x)$.

Доказательство. Запишем тождество

$$\hat{\Phi}(f \circ \pi(x), x) = x \quad \forall\ x \in M^{2n} \tag{2}$$

и вычислим значение производной отображения в левой части (2) на произвольном $\xi \in T_x M^{2n}$:

$$\hat{\Phi}(f \circ \pi(x), x)_* \xi = \hat{\Phi}'_x(\tau, x)|_{\tau = f\circ\pi(x)} \xi + X_{(f\circ\pi)_* \xi}(x) = \xi. \tag{3}$$

Тогда в силу (2) для пары $\xi, \eta \in T_x M^{2n}$ имеем

$$\omega^2(\xi, \eta) = \omega^2(\hat{\Phi}'_x \xi, \hat{\Phi}'_x \eta)|_{\tau = f\circ\pi(x)} + [\omega^2(\hat{\Phi}'_x \xi, \hat{X}_{(f\circ\pi)_* \eta}) -$$

$$- \omega^2(\hat{\Phi}'_x \eta, \hat{X}_{(f\circ\pi)_* \xi})]_{\tau = f\circ\pi(x)} + \hat{C}((f\circ\pi)_* \xi, (f\circ\pi)_* \eta). \tag{4}$$

Но при фиксированном τ отображение $\hat{\Phi} : M^{2n} \to M^{2n}$ сохраняет форму ω^2. Поэтому первое слагаемое в (4) равно $\omega^2(\xi, \eta)$, а сумма второго и третьего равна нулю. Поскольку $\hat{\Phi}'_x|_{\tau = f\circ\pi(x)}$ — линейный автоморфизм пространства $T_x \times \pi^{-1}(y)$, $y = \pi(x)$, то $\omega^2(\zeta, \hat{X}_{(f\circ\pi)_* \eta}) = 0 \quad \forall\ \zeta \in T_x \pi^{-1}(y)$, $\eta \in T_x M^2$, откуда

$f_*: T_y U \to \operatorname{Ker} \hat{C} \quad \forall\ y \in U$. Но тогда как третье, так и второе слагаемые в (4) равны нулю. После этого, используя (4), легко показать, что семейство отображений $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ является однопараметрической группой симплектических периодических по t с периодом 1 диффеоморфизмов многообразия $\pi^{-1}(U)$, причем $d/dt\,|_{t=0}\, g^t x = X_{f \circ \pi(x)}$.

4. Монодромия. В произвольной точке $y_0 \in B$ зафиксируем базис $\{f_i(y_0)\}_{i=1}^r$ решетки $F(y_0)$. Любой путь $\gamma(y_0, y_1)$ на B, соединяющий точки y_0 и $y_1 \neq y_0$, с помощью однозначных ветвей $f_i|_\gamma$ отображения $F|_\gamma$ определяет базис решетки $F(y_1)$, который не изменяется при гомотопиях пути γ. При обходе же точкой y_1 замкнутого контура $\Gamma = \Gamma(y_0)$, содержащего y_0, получим в точке y_0, вообще говоря, новый базис $\{f_i'(y_0)\}_{i=1}^r$, а вместе с ним целочисленную унимодулярную матрицу перехода $N = N(\Gamma) = \{n_{ij}\}_{i,j=1}^r$: $f_i' = \sum_{i=1}^r n_{ij} f_j$. На основании этих рассуждений, как и в [3], можно корректно определить гомоморфизм $\mathfrak{M}: \pi_1(B, y_0) \to GL(r; \mathbb{Z})$ фундаментальной группы многообразия B в группу целочисленных унимодулярных матриц.

***Определение* 1.** *Гомоморфизм* $\mathfrak{M}$ *назовом монодромией расслоения* (1).

5. Тривиализуемость расслоения.

Утверждение 5. *Пусть B_1 — s-мерное подмногообразие в B, для которого монодромия тривиальна:* $\mathfrak{M}(\pi_1(B, y_0)) = \{E_r\}$, $y_0 \in B_1$. *Тогда* $\pi^{-1}(B_1)$ *имеет структуру главного расслоения, реализованного с помощью гладкого свободного симплектического действия r-мерного тора.*

Доказательство. Из тривиальности монодромии следует существование на B_1 r однозначных гладких отображений $f_i: B_1 \to \mathbb{R}^r$, $i = 1, \ldots, r$, значения которых при каждом $y \in B_1$ образуют базис решетки $F(y)$. Определим на $\pi^{-1}(B)$ новое действие группы $\mathbb{R}^r_\varphi = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)\}_{\varphi_i \in \mathbb{R},\, i=1,\ldots,r}$ с фиксированным базисом следующим образом:

$$\Phi: \mathbb{R}^r_\varphi \times \pi^{-1}(B_1) \to \pi^{-1}(B_1): (\varphi, x) \to \Phi(\varphi, x) \overset{\text{def}}{=} \hat{\Phi}\left(\sum_{i=1}^r \varphi_i f_i \circ \pi(x), x\right). \quad (5)$$

Из утверждения 4 следует симплектичность этого действия, а также тот факт, что стационарная подгруппа любой точки $x \in \pi^{-1}(B_1)$ имеет вид стандартной решетки $\mathbb{Z}^r = \{m = (m_1, \ldots, m_r)\}_{m_i \in \mathbb{Z},\, i=1,\ldots,r}$, и не зависит от x. Значит, посредством Φ на $\pi^{-1}(B_1)$ можно задать гладкое свободное симплектическое действие тора $T^r = \mathbb{R}^r_\varphi / \mathbb{Z}^r \cong \{z \in \mathbb{C}^r: z = e^{2i\pi\varphi}\}_{\varphi \in \mathbb{R}^r_\varphi}$.

Как известно, тривиализуемость главного расслоения эквивалентна существованию глобального сечения. Укажем достаточные условия тривиализуемости (ср. с [2, 3]).

Утверждение 6. *Пусть B_1 — односвязное s-мерное подмногообразие в B, для которого группа когомологий $H^2(B_1; \mathbb{R})$ тривиальна. Тогда $\pi^{-1}(B_1)$ как T^r-расслоение изоморфно тривиальному расслоению-произведению $B_1 \times T^r$.*

Доказательство. Монодромия $\pi^{-1}(B_1)$ тривиальна. Согласно утверждению 5 $\pi^{-1}(B_1)$ — главное расслоение. Легко видеть, что тривиальность $H^2(B_1; \mathbb{R})$ влечет существование T^r-инвариантной формы связности с нулевой формой кривизны. Теперь, учитывая результат, приведенный в [7, с.95], завершаем доказательство утверждения.

***Замечание* 1.** Утверждение остается в силе, если вместо тривиальности $H^2(B_1; \mathbb{R})$ потребовать существование на $\pi^{-1}(B_1)$ T^r-инвариантной замкнутой формы связности.

6. Переменные типа действие-угол. Будем теперь предполагать, что утверждение 5 справедливо для $B_1 = B$. Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ тора T^r с $\mathbb{R}^r_\varphi$ и для $a \in \mathfrak{g}$ положим $X_a(x) = d/dt\,|_{t=0}\,\Phi(a\,t, x)$, где Φ определено в (5). Соответствие $a \to X_a$ является изоморфизмом из утверждения 1. Форма ω^2 индуцирует 2-коцикл C ранга $r-s$ на $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим ситуацию, когда существует глобальное гладкое сечение $S: B \to \to M^{2n}$. В дальнейших рассуждениях важную роль будет играть $\mathfrak{g}^*$-значная ($\mathfrak{g}^*$ — пространство линейных функционалов на $\mathfrak{g}$) 1-форма на B, определенная соотношением $S^*(X_a \rfloor \omega^2) = -(\Theta, a)$. Пусть ω — такая T^r-инвариантная форма связности, что $S^*\omega = 0$. Из "структурного уравнения" вытекает $d\omega = 0$ [7].

Утверждение 7. *Справедлива формула*

$$X_a \rfloor \omega^2 = -\pi^*(\Theta, a) + C(a, \omega). \tag{6}$$

Доказательство. На любом горизонтальном векторе значения форм в левой и правой частях (6) совпадают по определению Θ. Значения этих форм также совпадают и на каждом вертикальном векторе X_b по определению ω и C.

1-форму θ на B со значениями в $(\operatorname{Ker} C)^*$ определим соотношением $(\theta, a) = = (\Theta, a)$, $a \in \operatorname{Ker} C$. Из (6) следует, что для любого $a \in \operatorname{Ker} C$ справедливо

$$X_a \rfloor \omega^2 = -\pi^*(\theta, a) \Leftrightarrow X_a = I\,\pi^*(\theta, a). \tag{7}$$

Если θ точна, $\theta = dJ$, то $J \circ \pi: M^{2n} \to (\operatorname{Ker} C)^*$ является отображением момента действия $\operatorname{Ker} C$. В дальнейшем этим термином будем называть отображение J. Как будет видно из дальнейшего, именно компоненты отображения J играют роль переменных типа действие. В то же время координаты $\varphi = (\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_r)$ в $\mathbb{R}^r_\varphi$ задают угловые координаты на торе $T^r = \mathbb{R}^r_\varphi / \mathbb{Z}^r$.

Условимся в дальнейшем дифференциально-геометрические объекты на каждом сомножителе произведения $B \times T^r$ и их естественные поднятия в пространство произведения обозначать одними и теми же символами.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть монодромия расслоения* (1) *тривиальна, и существует гладкое сечение* $S: B \to M^{2n}$. *Предположим также, что форма* $\omega^2 - C(\omega, \omega)$ *точна (здесь по определению* $\eta \rfloor \xi \rfloor C(\omega, \omega) = C(\omega(\xi), \omega(\eta))$, $\xi, \eta \in T_x M^{2n}$).

Тогда существует тождественный по базе изоморфизм расслоения 1 *на расслоение-произведение* $B \times T^r$, *отображающий 2-форму* ω^2 *в 2-форму вида*

$$d\Big(\sum\nolimits_{i=1}^{s} \sum\nolimits_{j=1}^{r} b_{ij}\; J_i d\varphi_j\Big) + \sum_{1 \le i < j \le r} c_{ij}\; d\varphi_i \wedge d\varphi_j$$

на $B \times T^r$. *Здесь* $J_i = (J, \kappa_i)$ — *компоненты отображения момента действия* $\operatorname{Ker} C$, $\{\kappa_i\}_{i=1}^{s}$ — *базис в* $\operatorname{Ker} C$; $\{b_{ij}\}_{i=1,\ j=1}^{s,\ r}$ — *постоянная матрица некоторого оператора* $\mathfrak{B}: \mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}^r_\varphi \to \mathbb{R}^s$, *отображающего вектор* κ_i *в* i-*й орт пространства* $\mathbb{R}^s$, $i = 1, \ldots, s$; $c_{ij} = \omega^2\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Phi, \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\Phi\right)\Big|_{\varphi=0}$ — *матрица формы* C.

Доказательство теоремы разобьем на отдельные утверждения.

Утверждение 8. *При выполнении условий теоремы форма* Θ *точна.*

Доказательство. По условию $\omega^2 - C(\omega, \omega) = d\sigma$. Эта форма T^r-инвариантна. 1-форму σ также можно считать таковой, поскольку в противном случае вместо нее можно взять усредненную форму $\bar{\sigma} = \int_{\square} \Phi^*(\varphi, x)\, \sigma d\varphi$ ($\square$ — единичный куб в $\mathbb{R}^r_\varphi$), которая инвариантна и имеет свойство $d\bar{\sigma} = d\sigma$. Согласно (6) имеем $X_a \lrcorner\, d\sigma = -\pi^*(\Theta, a)$. А с другой стороны, по формуле гомотопии

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(\Phi^*\big|_{\varphi = at}\, \sigma \right) = X_a \lrcorner\, d\sigma + d\,(X_a \lrcorner\, \sigma). \tag{8}$$

Но $X_a \lrcorner\, \sigma$ представляет собой значение на векторе a некоторого T^r-инвариантного $\mathfrak{g}^*$-значного отображения, которое можно опустить на базу. Следовательно, Θ точна.

Утверждение 9. *Пусть L — подпространство в $\mathfrak{g}$, трансверсальное* $\operatorname{Ker} C$, P_k *— проектор на* $\operatorname{Ker} C$ *вдоль L. Форму ω^2 можно представить в виде* $\omega^2 = d\beta + \pi^*\theta \wedge P_k\omega + C(\omega, \omega)$, *где* β *— такая T^r-инвариантная 1-форма, что* $X_a \lrcorner\, \beta = 0 \quad \forall\, a \in \operatorname{Ker} C$.

Доказательство. Так как θ точна, а ω замкнута, то $\pi^*\theta \wedge P_k\omega$ точна и форма β существует. Инвариантность β следует из доказательства утверждения 8. В силу (7) для $a \in \operatorname{Ker} C$ имеем $X_a \lrcorner\, d\beta = 0$ и из соотношения, аналогичного (8), $d(X_a \lrcorner\, \beta) = 0$. Тогда существует $c \in \mathfrak{g}^*$ такой, что $X_a \lrcorner\, \beta = (c, a)$ $\forall\, a \in \operatorname{Ker} C$. Заменив β формой $\beta - (c, \omega)$, получим требуемый результат.

Приведем теперь утверждение, являющееся аналогом теоремы Дарбу – Вейнстейна.

Утверждение 10. *Пусть* ω_1^2 *— такая T^r-инвариантная 2-форма на* M^{2n}, *что* $\omega^2 - \omega_1^2 = d\beta$, *где* β *— некоторая 1-форма на* M^{2n}, *имеющая свойство* $X_a \lrcorner\, \beta = 0 \quad \forall\, a \in \operatorname{Ker} C$.

Тогда существует такой B-автоморфизм Ψ расслоения (1) *(т.е. диффеоморфизм Ψ: $M^{2n} \to M^{2n}$, для которого $\pi \circ \Psi = \pi$ и $\Psi(\Phi(\varphi, x)) = \Phi(\varphi, \Psi(x))$ $\forall\, \varphi \in \mathbb{R}^r_\varphi$), что $\Psi^*\omega_1^2 = \omega^2$.*

Доказательство. Форму β можно считать T^r-инвариантной, а из формулы, аналогичной (8), имеем

$$X_a \lrcorner\, d\beta = 0 \quad \forall\, a \in \operatorname{Ker} C. \tag{9}$$

Дальнейшие рассуждения основаны на гомотопическом методе [1, 8].

Положим $\omega_t^2 = (1-t)\,\omega^2 + t\,\omega_1^2 \equiv \omega^2 - t\, d\beta$, $t \in [0, 1]$. Покажем, что ω_t^2 невырождена при каждом $t \in [0, 1]$. Предположим, наоборот, что существует ненулевой $\xi \in T_x M^{2n}$, для которого $\xi \lrcorner\, \omega_t^2 = 0$. Согласно п.2 при любом $p \in T^*_{\pi(x)} B$ имеем $I\pi^* p = X_a$, где $a \in \operatorname{Ker} C$ соответствует p. Поэтому в силу (9) имеем $\omega_t^2(\xi, I\pi^* p) = \omega^2(\xi, I\pi^* p) = p(\pi_*\xi) = 0$. Так как p произвольно, то $\pi_*\xi = 0$. Значит $\xi = X_a(x)$ при некотором $a \in \mathfrak{g}$. Легко видеть, что $\omega_t^2(X_a, X_b) = C(a, b)$, поэтому с необходимостью $a \in \operatorname{Ker} C$. Но тогда $\xi = I\pi^* p\,|_x$ при некотором $p \in T^*_{\pi(x)} B$. Следовательно, для любого $\eta \in T_x M^{2n}$ имеем $\omega_t^2(\xi, \eta) = \omega^2(\eta, \xi) =$

$= p(\pi_*\xi) = 0$. Это возможно лишь при $p = 0$, т.е. $\xi = 0$. Пришли к противоречию. Итак, ω_t^2 невырождена. Это свойство позволяет определить семейство векторных полей V_t из условия

$$V_t \lrcorner\, \omega_t^2 = \beta. \tag{10}$$

Очевидно, что V_t T^r-инвариантно. Покажем, что V_t касается слоев расслоения (1). Действительно, в силу условия 2 и (10) для любого $p \in T^*_{\pi(x)}B$ имеем $\omega_t^2(V_t, I\pi^*p) = \omega^2(V_t, I\pi^*p) = p(\pi_*V_t) = I\pi^*p \lrcorner\, \beta = 0$, откуда $\pi_*V_t = 0$.

Пусть теперь $\psi(t, x), \psi(0, x) = x$,— общее решение дифференциального уравнения $dx/dt = V_t$. Так как слои расслоения компактны, то $\psi(t, x)$ при каждом x определено для $t \in [0, 1]$. Кроме того, в силу свойств V_t имеем $\pi(\psi(t, x)) = \pi(x)$ и $\Phi(\varphi, \psi(t, x)) = \psi(t, \Phi(\varphi, x))$. Положим $\Psi(x) = \psi(1, x)$. Тогда аналогично [8] получим $\Psi^*\omega_1^2 = \omega^2$.

Замечание 2. Из доказательства ясно, что невырожденность ω^2 автоматически влечет невырожденность ω_1^2.

Завершим теперь доказательство теоремы. На основании утверждений 9, 10 можно считать, что форма ω^2 имеет вид

$$\omega^2 = \pi^*\theta \wedge P_k\,\omega + C(\omega, \omega) = d(J \circ \pi, P_k\,\omega) + C(\omega, \omega). \tag{11}$$

Отображение $(y, \varphi \mid \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^r) \in B \times T^r \to \Phi(\varphi, S(y)) \in M^{2n}$ является изоморфизмом расслоений, при котором форме ω соответствует форма канонической плоскости связности $d\varphi$ на $B \times T^r$. Этот изоморфизм является искомым. Осталось отметить, что оператор $\mathfrak{B}$ определяется проектором P_k и базисом $\{\kappa_i\}$. Теорема доказана.

Теперь нетрудно записать выражения для скобок Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = 0, \quad \{\varphi, J_i\} = \kappa_i, \quad \{\varphi_i, \varphi_j\} = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Полученный результат можно обобщить на случай, когда форма Θ точна, а форма $S^*\omega^2$ не является точной. В этом случае выражение для ω^2 имеет вид (11) плюс неустранимая горизонтальная часть $\pi^*S^*\omega^2$. Можно показать, что класс $[S^*\omega^2] \in H^2(B; \mathbb{R})$ не зависит от выбора сечения. Выражение для скобок Пуассона будет отличаться от (12) лишь тем, что $\{\varphi_i, \varphi_j\}$ зависит от J.

Переменные типа действие-угол весьма удобны в теории возмущений гамильтоновых систем с гамильтонианами, близкими к инвариантным. Важное место в этой теории занимает понятие резонанса.

7. Частотная матрица симплектической структуры. Резонансные и нерезонансные торы.

Определение 2. *Симплектическую структуру назовем нерезонансной на слое $\pi^{-1}(y)$, $y \in B$, если каждый слой слоения, порожденного* $\mathrm{Ker}\ \omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$, *всюду плотен на $\pi^{-1}(y)$.*

Укажем теоретико-числовые условия нерезонансности. Перенумеровкой набора $\{f_i\}_{i=1}^r$ (см. пп. 4, 5) всегда можно добиться невырожденности матрицы $C_1 = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{r-1}$, где c_{ij} определены в формулировке теоремы п.6.

Утверждение 11. *Набор $\{f_i\}$, упорядоченный в соответствии с условием*

$\det C_1 \neq 0$, *однозначно определяет такую* $(r-s)\times s$-*мерную матрицу* $\nu = \{\nu_{ij}\}_{i=1,\,j=1}^{r-s,\;s}$, *что матрица* $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{r}$ *представима в виде*

$$C = \left|\frac{C_1}{\nu^T C_1}\,\middle|\,\frac{C_1\nu}{\nu^T C_1 \nu}\right|$$

(T обозначает операцию транспонирования).

Доказательство. Разобьем C на блоки

$$C = \left|\frac{C_1}{-C_2^T}\,\middle|\,\frac{C_2}{C_3}\right|$$

и положим $\nu = = C_1^{-1}C_2$. Тогда $C_2^T = -\nu^T C_1$. Поскольку ранг C равен $r-s$ и $C_1\nu - C_2 = 0$, то $C_2^T + C_3 = 0$, откуда $C_3 = \nu^T C_1 \nu$.

Определение 3. *Матрицу* ν *назовем частотной матрицей симплектической структуры.*

Определение 4. *Матрицу* ν *назовем нерезонансной по столбцам, если для любого ненулевого* $m = (m_1, \ldots, m_{r-s}) \in \mathbb{Z}^{r-s}$ *условие*

$$(m, \nu_j) \equiv \sum_{i=1}^{r-s} m_i \nu_{ij} = 0 \mid \bmod 1$$

нарушается хотя бы при одном $j = 1, \ldots, s$.

Легко видеть, что набор векторов

$$\kappa_j = (\nu_{1j}, \ldots, \nu_{r-s,j}, -\delta_{1j}, \ldots, -\delta_{sj}), \quad j = 1, \ldots, s, \tag{13}$$

образует базис $\operatorname{Ker} C$ в координатах φ. Если ν нерезонансна по столбцам, то не существует ненулевого $k \in \mathbb{Z}^r$, ортогонального всем κ_j из (13).

Определение 5. *Если* ν *нерезонансна по столбцам, то резонансной плоскостью пространства* $\mathbb{R}^s = \{u = (u_1, \ldots, u_s)\}_{u_i \in \mathbb{R}}$ *назовем плоскость* $\Pi_k = \{u \in \mathbb{R}^s : (k, \kappa_1)u_1 + \ldots + (k, \kappa_s)u_s = 0\}$, $k \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$. *Объединение всех резонансных плоскостей назовем резонансным множеством* $\mathfrak{R}$.

Утверждение 12. *Для того чтобы симплектическая структура была резонансной на слое* $\pi^{-1}(y)$, $y \in B$, *необходимо и достаточно, чтобы частотная матрица* ν *была нерезонансной по столбцам.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{R}$ состоит из счетного множества плоскостей, то вектор „общего положения" $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{R}^s$ не принадлежит $\mathfrak{R}$, т.е. $(k, \kappa_1)\lambda_1 + \ldots + (k, \kappa_s)\lambda_s \neq 0 \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$. Но тогда линия, заданная в координатах φ на $\pi^{-1}(y)$ уравнением $\varphi = (\lambda_1\kappa_1 + \ldots + \lambda_s\kappa_s)\,t + \varphi_0$, принадлежит некоторому слою $\operatorname{Ker}\omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$ и образует всюду плотную обмотку тора $\pi^{-1}(y)$. ***Достаточность*** доказана.

Необходимость. Нарушение условий нерезонансности ν влечет существование ненулевого вектора $k \in \mathbb{Z}^r$, ортогонального всем κ_i, $i = 1, \ldots, s$. Поэтому каждый слой слоения $\operatorname{Ker}\omega^2|_{\pi^{-1}(y)}$ принадлежит некоторому слою слоения, заданного в координатах φ уравнением $k_1 d\varphi_1 + \ldots + k_r d\varphi_r = 0$, т.е. принадлежит некоторому $r-1$-мерному тору, вложенному в $\pi^{-1}(y)$.

Следствие. *Нерезонансность* ω^2 *хотя бы на одном слое* $\pi^{-1}(y)$ *влечет ее* *нерезонансность на любом другом слое. В связи с этим можно говорить о нерезонансной структуре расслоения* (1).

Предполагая, что ω^2 нерезонансна, вернемся к исследованию гамильтоновой системы с инвариантным гамильтонианом $H \circ \pi$, где $H: B \to \mathbb{R}$. Определив частотную матрицу ν и построив набор векторов (13) и соответствующий им набор векторов $\{X_{\kappa_i}\}_{i=1}^{s}$ — генераторов действия $\operatorname{Ker} C$, — получим затем набор линейно независимых 1-форм на B — $\{\theta\}_{i=1}^{s}$-компонент формы θ. Напомним, что $\pi^*\theta_i = -X_{\kappa_i} \lrcorner\, \omega^2$. Наконец, определим набор функций $\{\lambda_i : B \to \mathbb{R}\}_{i=1}^{s}$ — коэффициентов разложения $dH = \lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_s\theta_s$.

Определение 6. *Функции λ_i назовем частотными функциями гамильтониана $H \circ \pi$.*

Если отображение момента существует, то $\lambda_i = \partial H / \partial J_i$.

Определение 7. *Слой $\pi^{-1}(y)$, $y \in B$, называется нерезонансным для системы с гамильтонианом $H \circ \pi$, если ее траектории всюду плотны на $\pi^{-1}(y)$.*

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 13. *Слой $\pi^{-1}(y)$, $y \in B$, нерезонансен тогда и только тогда, когда $(\lambda_1(y), \ldots, \lambda_s(y)) \in \mathbb{R}^s \setminus \Re$.*

Доказательство. Поскольку $I\pi^*\theta_i = X_{\kappa_i}$, то сужение потока системы с гамильтонианом $H \circ \pi$ на слой $\pi^{-1}(y)$ в координатах φ имеет вид $g^t\varphi = \varphi + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i(y)\kappa_i t$. Далее рассуждаем также, как и при доказательстве утверждения 12.

1. *Арнольд В.И., Гивенталь А.Б.* Симплектическая геометрия // Совр. пробл. математики. Фундам. направления.— 1985.– **4**.– С. 4 – 139.
2. *Нехорошев Н.Н.* Переменные действие-угол и их обобщения // Тр. Моск. мат. о-ва.– 1972.– **26**.— С. 181 – 198.
3. *Duistermaat J.J.* On Global Action-Angle Coordinates // Communs Pure and Appl. Math. – 1980.– **33**.— P. 687 – 706.
4. *Парасюк И.О.* Деформация симплектической структуры и коизотропные инвариантные торы гамильтоновых систем // Мат. физика и нелинейн. механика. –1989. – Вып. 12. – С. 35 – 37.
5. *Парасюк И.О.* Коизотропные инвариантные торы гамильтоновых систем квазиклассической теории движения электрона проводимости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 3. – С. 346 – 351.
6. *Карасев М.В., Маслов В.П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. – М.: Наука, 1991. – 368 с.
7. *Кобояси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2-х т.– М.: Наука, 1981.– Т. 1.– 344 с.
8. *Гийемин В., Стернберг С.* Геометрические асимптотики.– М.: Мир, 1981.– 504 с.

Получено 04.01.92