УДК 519.21

Ю. В. Козаченко, М. М. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО РІВНОМІРНУ ЗБІЖНІСТЬ ВЕЙВЛЕТ-РОЗКЛАДІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. I

We establish conditions under which there exists a function $c(t) > 0$ such that $\sup\limits_{t\in R}\dfrac{|X(t)|}{c(t)} < \infty$, where $X(t)$ is a random process from the Orlicz space of random variables. We obtain estimates of the probabilities $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t\in R}\dfrac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$.

Найдены условия, при которых существует такая функция $c(t) > 0$, что $\sup\limits_{t\in R}\dfrac{|X(t)|}{c(t)} < \infty$, где $X(t)$ — случайный процесс из пространства Орлича случайных величин. Получены оценки вероятностей $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t\in R}\dfrac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$.

1. Вступ. Вейвлет-розклади функцій інтенсивно вивчаються останні 10 – 15 років. Це зумовлено тим, що ці розклади широко використовують у різних областях науки. Останнім часом вейвлет-розклади почали застосовувати в теорії випадкових процесів. Проте тут виникли певні труднощі, оскільки, в основному, вивчались вейвлет-розклади функцій з $L_2(R)$ або розклади неперервних обмежених функцій, тоді як траєкторії більшості важливих класів випадкових процесів не є обмеженими та не належать $L_2(R)$. Зокрема, траєкторії стаціонарних випадкових процесів другого порядку не належать $L_2(R)$, а, як показано в роботі [1], траєкторії стаціонарних гауссових процесів із неперервним спектром є необмеженими з імовірністю одиниця. Зауважимо, що в певних роботах із теорії вейвлетів необґрунтовано вважають, що траєкторії стаціонарних процесів обмежені з імовірністю одиниця. Зауважимо також, що при знаходженні умов рівномірної збіжності вейвлет-розкладів ключовими є поведінка на нескінченності функцій, що розкладаються в ряд по вейвлетах. Основні положення теорії вейвлетів та певні застосування до теорії випадкових процесів можна знайти в роботах [2 – 5]. Необхідні відомості з теорії випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин наведено в роботі [6].

У цій роботі вивчаються властивості випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин, зокрема з просторів $L_p(R)$. Знайдено оцінки для розподілів супремумів цих процесів на скінченних інтервалах та досліджено поведінку цих процесів при $t \to \infty$. Отримані результати застосовано до вивчення умов рівномірної збіжності вейвлет-розкладів цих процесів.

Подібні результати для φ-субгауссових процесів отримано в роботі [7].

Опишемо коротко будову цієї статті. У другому пункті наведено необхідні відомості з теорії випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин, а також теореми про оцінки розподілу супремуму цих процесів на скінченному інтервалі та умови вибіркової неперервності з імовірністю одиниця цих процесів. У третьому пункті доведено загальну теорему про поведінку випадкових процесів $X(t)$ з просторів Орліча випадкових величин при $|t| \to \infty$, а саме побудовано такі функції $c(t) > 0$, що з імовірністю одиниця $\sup\limits_{t\in R}\dfrac{|X(t)|}{c(t)} < \infty$, та отримано оцінки ймовірностей $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t\in R}\dfrac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$. У четвертому пункті одержані в загальному випадку результати застосовано до випадкових процесів із просторів $L_p(\Omega)$.

2. Випадкові процеси з просторів Орліча випадкових величин.

Означення 2.1 [6]. *Неперервна парна опукла функція* $U = \{U(x),\ x \in R\}$ *називається* C*-функцією, якщо* $U(0) = 0$ *та* $U(x)$ *монотонно зростає при* $x > 0$.

***Приклад* 2.1.** Прикладами C-функції є функції $U(x) = A|x|^p$, $p \geq 1$, $A > 0$; $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $\alpha \geq 1$.

Нехай $\{\Omega, L, \mathrm{P}\}$ — стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.2 [6]. *Нехай* $U(x)$ — *довільна* C*-функція. Простором Орліча випадкових величин* $L_U(\Omega)$ *називаємо таку сім'ю випадкових величин, що для кожної* $\xi \in L_U(\Omega)$ *існує константа* $r_\xi > 0$ *така, що* $\mathrm{E}U\left(\dfrac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

Теорема 2.1 [6]. *Простір Орліча* $L_U(\Omega)$ *є банаховим відносно норми Люксембурга* $\|\xi\|_U = \inf\{r > 0\colon \mathrm{E}U(\xi/r) \leq 1\}$.

Лема 2.1 [6]. *Нехай* $\xi \in L_U(\Omega)$ *та* $\|\xi\|_U > 0$. *Тоді для всіх* $x > 0$ *виконується нерівність*

$$\mathrm{P}\{|\xi| > x\} \leq \left(U\left(\frac{x}{\|\xi\|_U}\right)\right)^{-1}. \tag{2.1}$$

Означення 2.3 [6]. *Додатна монотонно неспадна послідовність* $(\chi_U(n),\ n \geq 1)$ *називається* M*-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору* $L_U(\Omega)$, *якщо для будь-яких* $n \geq 1$ *та* $\xi_k \in L_U(\Omega)$ *має місце нерівність* $\left\|\max\limits_{1\leq k\leq n}|\xi_k|\right\|_U \leq \chi_U(n)\max\limits_{1\leq k\leq n}\|\xi_k\|_U$.

Лема 2.2 [6]. *Для будь-якого* $x_0 > 0$ *послідовність* $\chi_U(n) = (1 + U(x_0)) \times S_{x_0}(n)$, $n \geq 1$, *де* $S_{x_0}(n) = \sup\limits_{x > x_0}\dfrac{1}{x}U^{(-1)}(nU(x))$, $U^{(-1)}(x)$ — *обернена до* $U(x)$ *при* $x > 0$ *функція, є* M*-характеристикою простору* $L_U(\Omega)$.

Означення 2.4 [6]. C*-функція* U *задовольняє* g*-умову, якщо існують такі константи* $z_0 \geq 0$, $K > 0$ *та* $A > 0$, *що для всіх* $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ *виконується нерівність*

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy). \tag{2.2}$$

***Приклад* 2.2.** Функція $U(x) = C|x|^p$, $p \geq 1$, $C > 0$, задовольняє g-умову, до того ж $K = 1$, $A = C$ та $z_0 = 0$. Функція $U(x) = \exp\{c|x|^\alpha\} - 1$, $\alpha \geq 1$, $c > 0$, задовольняє g-умову, причому $z_0 = 2^{1/\alpha}$, $K = 1$ та $A = 1$.

Лема 2.3 [6]. *Нехай* $L_U(\Omega)$ — *простір Орліча, причому функція* U *задовольняє* g*-умову. Тоді* M*-характеристикою простору* $L_U(\Omega)$ *при* $n \geq U(z_0)$ *є послідовність* $\chi_U(n) = c_U U^{(-1)}(n)$, *де* $C_U = K(1 + U(z_0))\max(1, A)$.

***Приклад* 2.3.** Простір $L_U(\Omega)$ є простором Орліча, що породжується функцією $U(x) = |x|^p$, $p \geq 1$. Ця функція задовольняє g-умову, $\|\xi\|_U = \left(\mathrm{E}|\xi|^p\right)^{1/p}$, $\chi_U(n) = n^{1/p}$.

Означення 2.5. *Випадковий процес* $X = \{X(t),\ t \in T\}$, *де* T — *деяка параметрична множина, належить простору* $L_U(\Omega)$, *якщо для будь-якого* $t \in T$ *випадкова величина* $X(t)$ *належить простору* $L_U(\Omega)$.

Відомості з теорії просторів Орліча випадкових величин та приклади можна знайти у книзі [6].

Наступна теорема узагальнює й уточнює теорему 3.3.2 з книги [6].

Теорема 2.2. *Нехай* (T, ρ) — *метричний* (*псевдометричний*) *компактний простір,* $N(u)$ — *метрична масивність простору* (T, ρ), *тобто мінімальне число замкнених куль радіуса* u, *що покривають* (T, ρ), $X = \{X(t), t \in T\}$ — *сепарабельний випадковий процес із простору* $L_U(\Omega)$, $\chi_U(n)$ — M-*характеристика простору* $L_U(\Omega)$. *Нехай існує така функція* $\sigma = \left\{\sigma(h),\ 0 \le h \le \sup\limits_{t,s\in T} \rho(t,s)\right\}$, *що* $\sigma(h)$ *монотонно зростає, неперервна та* $\sigma(0) = 0$ *і* $\sup\limits_{\rho(t,s)\le h} \|X(t) - X(s)\|_U \le \sigma(h)$. *Якщо для деякого* $\varepsilon > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon} \chi_U\left(N(\sigma^{(-1)}(u))\right) du < \infty, \tag{2.3}$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ — *функція, обернена до* $\sigma(h)$, *то з імовірністю одиниця випадкова величина* $\sup\limits_{t\in T}|X(t)|$ *належить простору* $L_u(\Omega)$ *та*

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \le \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\theta} \chi_U\left(N(\sigma^{(-1)}(u))\right) du = B(t_0), \tag{2.4}$$

де t_0 — *довільна точка з* T, $w_0 = \sigma\left(\sup\limits_{t\in T}\rho(t_0,t)\right)$, $0 < \theta < 1$. *Крім того, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0)}\right)\right)^{-1}. \tag{2.5}$$

Доведення. З леми 2.1 випливає, що при $\varepsilon > 0$

$$P\{|X(t)-X(s)| > \varepsilon\} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\|X(t)-X(s)\|_U}\right)\right)^{-1} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\sigma(\rho(t,s))}\right)\right)^{-1}.$$

Отже, при будь-якому $\varepsilon > 0$ $P\{|X(t) - X(s)| > \varepsilon\} \to 0$ при $\rho(t,s) \to 0$. Отже, процес $X(t)$ є неперервним за ймовірністю на просторі (T, ρ). Тому будь-яка зліченна скрізь щільна множина в (T, ρ) може бути множиною сепарабельності процесу $X(t)$. Нехай $\varepsilon_0 = \sup\limits_{t\in T}\rho(t_0,t)$, $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}\left(w_0\theta^k\right)$ при $k \ge 1$, де $0 < \theta < 1$. Нехай V_{ε_k} — множина центрів мінімального покриття простору (T, ρ) замкненими кулями радіуса ε_k, до того ж число елементів у цій множині дорівнює $N(\varepsilon_k)$. Множину V_{ε_0} вибираємо так, що вона містить лише одну точку t_0. Позначимо $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_{\varepsilon_k}$. Зрозуміло, що V — це зліченна скрізь щільна множина, тому V є множиною сепарабельності процесу $X(t)$. Отже, з імовірністю одиниця

$$\sup_{t\in T}|X(t)| = \sup_{t\in V}|X(t)|. \tag{2.6}$$

Введемо в V відображення $\alpha_k(t)$ таким чином. Якщо $t \in V_{\varepsilon_s}$, то $\alpha_{s-1}(t)$ — така точка з $V_{\varepsilon_{s-1}}$, що $\rho(t, \alpha_{s-1}(t)) \le \varepsilon_{s-1}$. Така точка існує. Якщо таких точок декілька, то фіксуємо одну з них. Якщо $t \in V_{\varepsilon_{s-1}}$, то $\alpha_{s-1}(t) = t$. Нехай тепер t — довільна точка з V. Зрозуміло, що t належить якомусь V_s.

Позначимо $t = t_s$, $\alpha_{s-1}(t_s) = t_{s-1}, \ldots, \alpha_0(t_1) = t_0$. Тому

$$|X(t)| \le \sum_{k=1}^{s} |X(t_k) - X(t_{k-1})| + |X(t_0)| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{s} \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} |X(t) - X(\alpha_{k-1}(t))| + |X(t_0)|. \tag{2.7}$$

Оскільки t — довільна точка з V, то з (2.7) випливає нерівність

$$\sup_{t\in V} |X(t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} |X(t) - X(\alpha_{k-1}(t))| + |X(t_0)|.$$

Тому

$$\left\| \sup_{t\in T} |X(t)| \right\|_U = \left\| \sup_{t\in V} |X(t)| \right\|_U \le \|X(t_0)\|_U + \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \max_{t\in V_{\varepsilon_k}} |X(t) - X(\alpha_{k-1}(t))| \right\|_U.$$

З означення 2.3 випливає

$$\left\| \sup_{t\in T} |X(t)| \right\|_U \le \|X(t_0)\|_U + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_U\big(N(\varepsilon_k)\big)\sigma(\varepsilon_{k-1}) =$$

$$= \|X(t_0)\|_u + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_U\Big(N(\sigma^{(-1)}(w_0\theta^k))\Big) w_0 \theta^{k-1} \le$$

$$\le \|X(t_0)\|_U + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int\limits_{w_0\theta^{k+1}}^{w_0\theta^k} \chi_U\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big) du =$$

$$= \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int\limits_0^{w_0\theta} \chi_U\Big(N(\sigma^{(-1)}(u))\Big) du,$$

тобто ми отримали (2.4). Тепер (2.5) випливає з нерівності (2.1).

Теорему доведено.

***Зауваження* 2.1.** Теорема 2.1 залишається правильною, якщо в (2.4) w_0 замінити на $2\sup\limits_{t\in T}\|X(t)\|_U$ (оскільки $\|X(t) - X(s)\|_U \le 2\sup\limits_{t\in T}\|X(t)\|_U$), тоді $\varepsilon_0 =$
$= \sigma^{(-1)}\left(2\sup\limits_{t\in T}\|X(t)\|_U\right)$.

***Зауваження* 2.2.** В теоремі 2.1 $\chi_U(n) = (1 + U(x_0))S_{x_0}(n)$ (лема 2.2), а коли U задовольняє g-умову, то при $n \ge U(z_0)$ $\chi_U(n) = C_U U^{(-1)}(n)$ (лема 2.3).

***Наслідок* 2.1.** *Нехай* $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $\rho(t, s) = |t - s|$, *випадковий процес* $X = \{X(t), t\in[a, b]\}$ *належить простору* $L_U(\Omega)$, $U(x)$ *задовольняє умову* g, $\sigma = \{\sigma(h),\ 0 \le h \le b - a)\}$ — *така неперервна монотонна зростаюча функція, що* $\sigma(0) = 0$ *та* $\sup\limits_{|t-s|\le h} \|X(t) - X(s)\|_U \le \sigma(h)$.

Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty, \tag{2.8}$$

то випадкова величина $\sup\limits_{t\in[a,b]} \|X(t)\|$ *належить простору* $L_U(\Omega)$ *та*

$$\left\| \sup_{t\in[a,b]} |X(t)| \right\|_U \le \|X(t_0)\|_U + \frac{C_U}{\theta(1-\theta)} \int_0^{w_0\theta} U^{(-1)}\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du = D(t_0), \quad (2.9)$$

де t_0 — *довільна точка з* $[a,b]$, $w_0 = \sigma\left(\sup_{t\in[a,b]}|t_0-t|\right)$, $C_U = K\left(1+U(z_0)\right) \times$ $\times \max(1, A)$ (*константи* z_0, K, A) *з означення* 2.4, θ — *довільне число таке, що* $\theta < \min\left(1, \sigma\left(\frac{b-a}{2U(z_0)}\right)\frac{1}{w_0}\right)$. *При цьому при всіх* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \le \left(U\left(\frac{\varepsilon}{D(t_0)}\right)\right)^{-1}. \quad (2.10)$$

Доведення. У даному випадку $\frac{b-a}{2u} \le N(u) \le \frac{b-a}{2u}+1$. Крім того, $\chi_U(n) = C_U U^{(-1)}(n)$, $n \ge U(z_0)$. Для того щоб виконувалась остання нерівність при $n = N\left(\sigma^{(-1)}(w_0\theta)\right)$, потрібно, щоб виконувалась нерівність $\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(w_0\theta)} \ge U(z_0)$. З цієї нерівності випливають обмеження на θ.

Наслідок доведено.

Зауваження 2.3. Оскільки в (2.9) $0 \le u \le w_0\theta$, то для цих u

$$\frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)} \ge \frac{1}{\sigma^{(-1)}(w_0\theta)} \ge \frac{1}{\sigma^{(-1)}(w_0)} = \frac{1}{\sup_{t\in[a,b]}|t-t_0|}.$$

Тоді

$$\int_0^{w_0\theta} U^{(-1)}\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)du \le \int_0^{w_0\theta} U^{(-1)}\left(\frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(u)}\left(\frac{b-a}{2}+\sup_{t\in[a,b]}|t-t_0|\right)\right)du \le$$

$$\le \int_0^{w_0\theta} U^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(u)}\right)du. \quad (2.11)$$

Крім того, в (2.9) w_0 можна замінити на $2\sup_{t\in[a,b]}\|X(t)\|_U$.

Наступна теорема є узагальненням теореми 3.5.1 з книги [6].

Теорема 2.3. *Нехай* (T, ρ) — *метричний* (*псевдометричний*) *компактний простір,* $X = \{X(t), t\in T\}$ — *сепарабельний випадковий процес із простору* $L_U(\Omega)$ *і виконуються умови теореми* 2.2. *Тоді* $X(t)$ *є вибірково неперервним з імовірністю одиниця на* (T,ρ). *Крім того,* $\left\|\sup_{\rho(t,s)\le h}|X(t)-X(s)|\right\|_U \to 0$ *при* $h \to 0$.

Доведення. Нехай ε_k, V_{ε_k}, V, відображення $\alpha_n(t)$ визначені так, як і в теоремі 2.3. Дослівно повторюючи доведення теореми 3.5.1 з книги [6], отримуємо, що для будь-якого n існує $d_n > 0$ таке, що з імовірністю одиниця

$$\sup_{\substack{t,s\in T\\ \rho(t,s)\le d_n}} |X(t)-X(s)| \le \sum_{k=n}^{\infty} \max_{t\in V_{\varepsilon_{k+1}}} |X(t)-X(\alpha_k(t))|. \quad (2.12)$$

Отже, як і при доведенні теореми 2.2, отримуємо, що при $0 < \theta < 1$

$$\left\| \sup_{\substack{t,s\in T \\ \rho(t,s)\le d_n}} |X(t)-X(s)| \right\|_U \le \sum_{k=n}^{\infty} \chi_U\Big(N\Big(\sigma^{(-1)}(w_0\theta^k)\Big)\Big) w_0\theta^{k-1} \le$$

$$\le \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{w_0\theta^n} \chi_U\Big(N\Big(\sigma^{(-1)}(u)\Big)\Big)du.$$

З умови (2.3) випливає, що $\int_0^{w_0\theta^n} \chi_U\Big(N\Big(\sigma^{(-1)}(u)\Big)\Big)du \to 0$ при $n \to \infty$, тобто $\left\| \sup_{\rho(t,s)\le h} |X(t)-X(s)| \right\|_U \to 0$ при $h \to 0$. Отже, з леми 2.1 випливає, що $\sup_{\rho(t,s)\le h} |X(t)-X(s)|$ прямує до нуля при $h \to 0$ за ймовірністю, а оскільки $\sup_{\rho(t,s)\le h} |X(t)-X(s)|$ монотонно спадає та можна виділити таку послідовність h_n, що $\sup_{\rho(t,s)\le h_n} |X(t)-X(s)| \to 0$ з імовірністю одиниця, то і $\sup_{\rho(t,s)\le h} |X(t)-X(s)| \to$ $\to 0$ при $h \to 0$ з імовірністю одиниця. Отже, $X(t)$ є вибірково неперервним з імовірністю одиниця.

Теорему доведено.

***Наслідок* 2.2.** *Нехай виконуються умови наслідку* 2.1. *Тоді випадковий процес* $X = \{X(t),\ t\in[a,b]\}$ *є вибірково неперервним з імовірністю одиниця.*

Наслідок 2.2 випливає з теореми 2.3, як і наслідок 2.1 — з теореми 2.2.

Означення 2.6 [8]. *Сім'я випадкових величин* Ξ *називається строго орлічевою з простору* $L_U(\Omega)$, *якщо для будь-якого скінченного набору випадкових величин* ξ_i, $i = \overline{1,n}$, *з* Ξ *та будь-яких констант* c_i, $i = \overline{1,n}$, *виконується нерівність*

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i\xi_i \right\|_U \le C\left(\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n c_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}, \tag{2.13}$$

де $C > 0$ *— деяка константа, що залежить лише від* Ξ.

У роботі [8] показано, що замикання множини Ξ в $L_2(\Omega)$ збігається з замиканням цієї множини в $L_U(\Omega)$. Це замикання також є строго орлічевою сім'єю з простору $L_U(\Omega)$. Замкнені строго орлічеві сім'ї з простору $L_U(\Omega)$ позначаємо $SL_U(\Omega)$. Константу C в (2.12) називаємо визначальною константою сім'ї $SL_U(\Omega)$. Зауважимо, що нерівність (2.12) виконується для будь-якої зліченної сім'ї випадкових величин з $SL_U(\Omega)$ і має сенс, якщо $\mathrm{E}\left(\sum_i c_i\xi_i\right)^2 < \infty$.

Означення 2.7. *Випадковий процес* $X = \{X(t),\ t\in T\}$ *належить* $SL_U(\Omega)$ *з визначальною константою* C $(X\in SL_U(\Omega))$, *якщо сім'я випадкових величин* $\{X(t),\ t\in T\}$ *є строго орлічевою з* $SL_U(\Omega)$ *з визначальною константою* C.

Властивості та приклади випадкових строго орлічевих процесів можна знайти в роботі [8]. Наведемо один приклад процесу з $SL_U(\Omega)$.

Означення 2.8 [8]. *Простір Орліча має властивість* A, *якщо існує константа* D *така, що для будь-яких незалежних центрованих випадкових величин* $\xi_i \in L_U(\Omega)$ *має місце нерівність*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_U^2 \le D\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2. \tag{2.14}$$

Відомо [9], що простори $L_p(\Omega)$, $p \geq 2$, мають властивість A. Простори $L_U(\Omega)$, що породжуються C-функцією $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $1 \leq \alpha \leq 2$, також мають властивість A [6]. Умови, за яких для просторів $L_U(\Omega)$ виконується умова A, можна також знайти в роботі [10].

Наступна теорема з роботи [8] дає можливість будувати численні приклади випадкових процесів із сімей $SL_U(\Omega)$ випадкових величин.

Теорема 2.4. *Нехай центрований випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ можна зобразити у вигляді ряду, що збігається в нормі $L_2(\Omega)$:*

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t). \tag{2.15}$$

Якщо випадкові величини ξ_k є незалежними центрованими, $\xi_k \in L_U(\Omega)$, простір $L_U(\Omega)$ має властивість A *з константою D та*

$$\sup_{k \geq 1} \frac{\|\xi_k\|_U}{\left(\mathrm{E}\xi_k^2\right)^{1/2}} \leq C_X < \infty, \tag{2.16}$$

то $X(t) \in SL_U(\Omega)$ з визначальною константою $\sqrt{D}\, C_X$.

Зауваження **2.4.** Умова (2.16) виконується, наприклад, коли ξ_k однаково розподілені та $\mathrm{E}\xi_k^2 \neq 0$.

Означення 2.9 [11]. *Випадковий процес $Z_\alpha = \{Z_\alpha(t), t \in R\}$, $0 < \alpha < 1$, називається WSSSI-процесом* (*автомодельним процесом зі стаціонарними приростами в слабкому розумінні*), *якщо*

$$Z_\alpha(-t) = Z_\alpha(t), \qquad \mathrm{E}Z_\alpha(t) = 0, \qquad \mathrm{E}(Z_\alpha(t))^2 = t^{2\alpha}, \quad t > 0,$$

$$\mathrm{E}|Z_\alpha(t) - Z_\alpha(s)|^2 = |t - s|^{2\alpha}, \qquad t > 0, \quad s > 0.$$

Якщо $Z_\alpha(t)$ — гауссівський процес, то $Z_\alpha(t)$ — звичайний процес дробового броунівського руху.

Приклад **2.4.** Розглянемо зображення $Z_\alpha(t)$ у вигляді певного ряду (див., наприклад, [12]), що збігається в $L_2(\Omega)$: $Z_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k S_k(t)$, де $S_k(t)$ — певні функції. Якщо $\xi_k \in L_U(\Omega)$ — центровані однаково розподілені незалежні випадкові величини $\mathrm{E}\xi_k = 0$, простір Орліча $L_U(\Omega)$ має властивість A, то $Z_\alpha(t)$ — WSSSI-процес з $SL_U(\Omega)$.

Означення 2.10. *Випадковий процес $X = \{X(t), t \in R\}$ такий, що $X \in L_U(\Omega)$, називається квазістаціонарним* (*стаціонарним*), *якщо $\|X(t)\|_U \leq E_X \left(\|X(t)\|_U = E_X\right)$, де E_X — константа,*

$$\|X(t) - X(s)\|_U \leq b(t-s) \left(\|X(t) - X(s)\|_U = b(t-s)\right),$$

$b(u)$, $u \in R$, — деяка вимірна функція.

3. Про порядок росту випадкових процесів із просторів Орліча на нескінченності.

Теорема 3.1. *Нехай $X = \{X(t), t \in R\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задовольняє умову g. Припустимо, що виконуються наступні умови:*

B_k — інтервали $[a_k, a_{k+1}]$ такі, що $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty$, $k \in Z$, $\bigcup_{k \in Z} B_k = R$;

на кожному з інтервалів B_k існують такі функції $\sigma_k = \{\sigma_k(h), 0 \leq h \leq$

$\leq a_{k+1} - a_k\}$, *що* $\sigma_k(h)$ — *неперервні монотонно зростаючі функції,* $\sigma_k(0) = 0$, *та*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h \\ t,s\in B_k}} \|X(t) - X(s)\|_U \leq \sigma_k(h); \tag{3.1}$$

для деякого $\varepsilon > 0$ *виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty; \tag{3.2}$$

$c = (c(t),\ t \in R)$ — *деяка неперервна функція така, що*

$$c(t) > 0, \quad t \in R, \quad r_k = \sup_{r\in B_k} \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{\inf\limits_{t\in B_k} c(t)};$$

t_{0k} — *деяка точка з інтервалу* B_k;

z_0, K, A — *константи з означення* 2.4;

$$D(t_{0k}) = \left\|X(t_{0k})\right\|_U + \frac{C_U}{\theta_k(1-\theta_k)} \int_0^{w_{0k}\theta} U^{(-1)}\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right) du,$$

де

$$w_{0k} = \sigma_k\left(\sup_{t\in B_k} \left|t_{0k} - t\right|\right),$$

C_U *визначено в лемі* 2.3, θ_k — *довільне число таке, що*

$$0 < \theta_k < \min\left(1,\ \sigma_k\left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2U(z_0)}\right)\frac{1}{w_{0k}}\right);$$

для деякого $\delta > z_0 \max\limits_{k\in Z} r_k D(t_{0k})$ *збігається ряд*

$$\sum_{k\in Z} \left(U\left(\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})}\right)\right)^{-1} < \infty. \tag{3.3}$$

Тоді для всіх $\varepsilon \geq K\delta z_0$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\delta K}\right)\right)^{-1} A^{-1} \sum_{k\in Z} \left(U\left(\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})}\right)\right)^{-1}. \tag{3.4}$$

Доведення. Легко бачити, що при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq \sum_{k\in Z} \mathrm{P}\left\{\sup_{t\in B_k} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq \mathrm{P}\left\{\sup_{t\in B_k} |X(t)| > \frac{\varepsilon}{r_k}\right\}. \tag{3.5}$$

З наслідку 2.1 випливає, що

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in B_k} |X(t)| > \frac{\varepsilon}{r_k}\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{r_k D(t_{0k})}\right)\right)^{-1} \tag{3.6}$$

при $0 < \theta_k < \min\left(1,\ \sigma_k\left(\dfrac{a_{k+1} - a_k}{2U(z_0)}\right)\dfrac{1}{w_{0k}}\right)$.

З означення 2.4 випливає, що при $\varepsilon > K\delta z_0$

$$U\left(\frac{\varepsilon}{r_k D(t_{0k})}\right) = U\left(K\frac{\varepsilon}{K\delta}\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})}\right) \geq \frac{1}{A}U\left(\frac{\varepsilon}{K\delta}\right)U\left(\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})}\right). \tag{3.7}$$

Отже, з (3.4) – (3.7) випливає нерівність $(\varepsilon > K\delta z_0)$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in R}\frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{\delta K}\right)\right)^{-1} A^{-1}\sum_{k\in Z}\left(U\left(\frac{\delta}{r_k D(t_{0k})}\right)\right)^{-1}.$$

Теорему доведено.

З того, що за умов теореми $\mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t\in R}\frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \to 0$ при $\varepsilon \to \infty$, випливає такий наслідок.

***Наслідок* 3.1.** *За умов теореми* 3.1 *існує випадкова величина* $\xi > 0$, $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *така, що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$.

4. Випадкові процеси з просторів $L_p(\Omega)$.

Теорема 4.1. *Нехай* $X = \{X(t),\, t\in T\}$, $T = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, — *сепарабельний випадковий процес із простору* $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$. *Нехай існує така функція* $\sigma = \{\sigma(h),\, 0 \leq h \leq b-a\}$, *що* $\sigma(h)$ *є неперервною, монотонно зростає,* $\sigma(0) = 0$, *та*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h\\ t,s\in[a,b]}}\left(\mathrm{E}|X(t) - X(s)|^p\right)^{1/p} \leq \sigma(h). \tag{4.1}$$

Нехай для деякого $0 < \varepsilon < b-a$ *збігається інтеграл*

$$\int_0^{\varepsilon}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1/p}du < \infty. \tag{4.2}$$

Тоді випадкова величина $\sup\limits_{t,s\in[a,b]}|X(t)| \in L_p(\Omega)$ *та для будь-якої точки* $t_0 \in [a, b]$ *і для будь-якого* $0 < \theta < 1$ *має місце нерівність*

$$\left\|\sup_{t\in[a,b]}|X(t)|\right\|_p = \left(\mathrm{E}\left(\sup_{t\in[a,b]}|X(t)|\right)^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\mathrm{E}|X(t_0)|^p\right)^{1/p} + \frac{1}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\theta}\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)^{1/p}du =$$

$$= D_p(t_0) \leq \left(\mathrm{E}|X(t_0)|^p\right)^{1/p} + \frac{\alpha_p}{\theta(1-\theta)}\int_0^{w_0\theta}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1/p}du = \widetilde{D_p}(t_0), \tag{4.3}$$

де $w_0 = \sigma\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|t_0 - t|\right)$, $\alpha_p = \left[\frac{b-a}{2} + \sup\limits_{t\in[a,b]}|t_0 - t|\right]^{1/p}$.

Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \frac{[D_p(t_0)]^p}{\varepsilon^p} \leq \frac{[\widetilde{D_p}(t_0)]^p}{\varepsilon^p}. \tag{4.4}$$

Випадковий процес $X(t)$ *є неперервним з імовірністю одиниця.*

Доведення. Теорема випливає з наслідку 2.1. Тут $U(x) = |x|^p$, $z_0 = 0$, $C_U = 1$, $0 < \theta < 1$, $K = 1$, $A = 1$. Друга нерівність в (4.3) випливає з зауваження 2.3. Твердження про неперервність процесу випливає з наслідку 2.2.

***Приклад* 4.1.** Нехай в умовах теореми $\sigma(h) = ch^\beta$, $c > 0$, $\beta > 0$. Тоді умова (4.2) виконується при

$$\widetilde{D_p}(t_0) = \left(\mathrm{E}|X(t_0)|^p\right)^{1/p} + \frac{\alpha_p c^{\frac{1}{p\beta}}}{\theta^{\frac{1}{p\beta}}(1-\theta)} w_0^{1-\frac{1}{p\beta}} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p\beta}}\right), \qquad \beta > 1/p.$$

Якщо мінімізувати праву частину по θ, то отримаємо

$$\widetilde{D_p}(t_0) = \left(\mathrm{E}|X(t_0)|^p\right)^{1/p} + \frac{\alpha_p c^{\frac{1}{p\beta}} (1+p\beta)^{\frac{1}{p\beta}+1} w_0^{1-\frac{1}{p\beta}}}{p\beta - 1}.$$

Теорема 4.2. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ *— сепарабельний випадковий процес із простору* $L_p(\Omega)$, $p \ge 1$. *Припустимо, що виконуються наступні умови*:

B_k *— інтервали* $[a_k, a_{k+1}]$ *такі, що* $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty$, $k \in Z$, $\bigcup_{k \in Z} B_k = R$;

на кожному з інтервалів $[a_k, a_{k+1}]$ *існують такі функції* $\sigma_k = \{\sigma_k(h),\ 0 \le h \le a_{k+1} - a_k\}$, *що* $\sigma_k(h)$ *— неперервні монотонно зростаючі функції,* $\sigma_k(0) = 0$, *та*

$$\sup_{\substack{|t-s| \le h \\ t,s \in B_k}} \left(\mathrm{E}|X(t) - X(s)|^p\right)^{1/p} \le \sigma_k(h); \tag{4.5}$$

для деякого $\varepsilon > 0$, $k \in Z$ *виконується умова* $\int_0^\varepsilon \left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-1/p} du < \infty$;

$c = \{c(t),\ t \in R\}$ *— деяка неперервна функція, така, що* $c(t) > 0$, $r_k = \dfrac{1}{\inf\limits_{t \in B_k} c(t)}$, t_{0k} *— деяка точка з інтервалу* B_k;

$$D_p(t_{0k}) = \left(\mathrm{E}\left|X(t_{0k})\right|^p\right)^{1/p} + \frac{\alpha_{k,p}}{\theta_k(1-\theta_k)} \int_0^{w_{0k}\theta_k} \left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-1/p} du,$$

де θ_k *— будь-які числа,* $0 < \theta_k < 1$,

$$\alpha_{k,p} = \left[\frac{a_{k+1} - a_k}{2} + \sup_{t \in [a_k, b_k]} |t - t_{0k}|\right]^{1/p}, \qquad w_{0k} = \sigma_k\left[\sup_{t \in [a_k, b_k]} |t_0 - t|\right];$$

збігається ряд

$$\sum_{k \in Z} (r_k D(t_{0k}))^p < \infty. \tag{4.6}$$

Тоді для всіх $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t \in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \le \frac{\sum_{k \in Z} (r_k D(t_{0k}))^p}{\varepsilon^p}. \tag{4.7}$$

Крім того, існує випадкова величина ξ, $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *така, що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$.

Теорема випливає з теорем 4.1, 3.1 та наслідку 3.1.

***Наслідок* 4.1.** *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ *— сепарабельний випадковий процес із простору* $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, B_k *— інтервали* $[a_k, a_{k+1}]$ *такі, що* $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty$, $k \in Z$, $\bigcup_{k \in Z} B_k = R$. *Нехай виконується умова*

$$\sup_{\substack{|t-s|\leq h \\ t,s \in B_k}} \left(\mathrm{E}|X(t) - X(s)|^p\right)^{1/p} \leq c_k h^{\beta}, \tag{4.8}$$

де $c_k > 0$, $\beta > 1/p$, $c = \{c(t),\ t \in R\}$ *— деяка неперервна функція,* $c(t) > 0$, $r_k = \left(\inf_{t \in B_k} c(t)\right)^{-1}$, t_{0k} *— будь-яка точка з інтервалу* B_k, $S_{0k} = \left(\mathrm{E}|X(t_{0k})|^p\right)^{1/p}$.

Якщо збігаються ряди

$$\sum_{k \in Z} (r_k S_{0k})^p < \infty, \tag{4.9}$$

$$\sum_{k \in Z} r_k^p c_k^p (a_{k+1} - a_k)^{\beta p} < \infty, \tag{4.10}$$

то для всіх $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t \in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leq \frac{\sum_{k \in Z}\left(r_k \widehat{D_p}(t_{0k})\right)^p}{\varepsilon^p}, \tag{4.11}$$

$$\widehat{D_p}(t_{0k}) = S_{0k} + Z_{p\beta} c_k (a_{k+1} - a_k)^{\beta}, \quad \text{де} \quad Z_{p\beta} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/p} \frac{(1 + p\beta)^{\frac{1}{p\beta}+1}}{p\beta - 1}.$$

Крім того, існує випадкова величина ξ, $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *така, що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$ *при всіх* $t \in R$.

Доведення. Наслідок 4.1 випливає з теореми 4.2. Дійсно, згідно з прикладом 4.1,

$$D_p(t_{0k}) \leq \widetilde{D_p}(t_{0k}) \leq S_{0k} + \alpha_{pk} c_k^{\frac{1}{p\beta}} w_{0k}^{1-\frac{1}{p\beta}} \frac{(1 + p\beta)^{\frac{1}{p\beta}+1}}{p\beta - 1},$$

де

$$\alpha_{pk} = \left(\frac{a_{k+1} - a_k}{2} + \sup_{t \in [a_k, a_{k+1}]} |t - t_{0k}|\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{1/p} (a_{k+1} - a_k)^{1/p}, \qquad w_{0k} \leq c_k |a_{k+1} - a_k|^{\beta}.$$

Отже,

$$D_p(t_{0k}) \leq S_{0k} + Z_{p\beta} c_k (a_{k+1} - a_k)^{\beta} = \widehat{D_p}(t_{0k}). \tag{4.12}$$

Оскільки $\left(D_p(t_{0k})\right)^p \leq 2^{p-1} S_{0k}^p + Z_{p\beta}^p c_k^p (a_{k+1} - a_k)^{\beta p}$, то ряд у правій частині (4.11) збігається, коли збігаються ряди (4.9) та (4.10). Отже, (4.11) випливає з (4.4) та (4.12).

***Зауваження* 4.1.** Теорема залишається правильною, якщо замість R розглянути $[0, \infty]$, а $k = 0, 1, 2, \ldots$.

***Приклад* 4.2.** Нехай $X(t),\ t \in R,$ — сепарабельний WSSSI-процес з $SL_p(\Omega)$ з визначальною константою $c,\ p > 1/\alpha$. Зрозуміло, що в термінах наслідку 4.1 $c_k \le c,\ \beta = \alpha,\ S_{0k} \le c|t_{0k}|^{\alpha}$.

Розглянемо $X(t)$ при $t \in [0, \infty]$. Умови (4.9) та (4.10) виконуються, якщо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(r_k |t_{0k}|^{\alpha} \right)^p < \infty \tag{4.13}$$

та

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k^p (a_{k+1} - a_k)^{\alpha p} < \infty. \tag{4.14}$$

Тоді

$$\widehat{D_p}(t_{0k}) \le c|t_{0k}|^{\alpha} + \hat{z}_{p\alpha} c (a_{k+1} - a_k)^{\alpha}, \quad \text{де} \quad \hat{z}_{p\alpha} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/p} \frac{(1 + p\alpha)^{\frac{1}{p\alpha}+1}}{p\alpha - 1},$$

тобто

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{t \ge 0} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le \frac{c \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_k \left(|t_{0k}|^{\alpha} + \hat{z}_{p\alpha} (a_{k+1} - a_k)^{\alpha} \right) \right)^p}{\varepsilon^p} = \frac{F_1}{\varepsilon^p}.$$

Якщо $c(t)$ — така функція, що $c(t) = c(-t)$, то з означення $X(t)$ випливає

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{t < 0} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le \frac{F_1}{\varepsilon^p}. \tag{4.15}$$

Отже,

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{t \in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le \frac{2F_1}{\varepsilon^p}. \tag{4.16}$$

Якщо покласти $t_{0k} = a_k = e^k$, то легко пересвідчитись, що функція

$$c(|t|) = |t|^{\alpha} (\ln|t|)^{\gamma}, \quad \gamma > \frac{1}{p}, \quad |t| \ge e \quad \left(c|t| = e^{\alpha},\ |t| \le e \right),$$

задовольняє умови наслідку 4.1. У цьому випадку

$$F_1 = c\left(1 + Z_{p\alpha}(e-1)^{\alpha}\right)^p + c\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\gamma p}} \right) c\left(1 + Z_{p\alpha}(e-1)^{\alpha}\right)^p. \tag{4.17}$$

Отже, має місце таке твердження.

Теорема 4.3. *Нехай* $X = \{X(t),\ t \in R\}$ — *сепарабельний WSSSI-процес з* $SL_p(\Omega)$ *з визначальною константою* $c,\ p > 1/\alpha,\ c(t) = |t|^{\alpha} (\ln|t|)^{\gamma},\ \gamma > 1/p,$ $|t| \ge e,\ c(t) = e^p,\ |t| \le e$. *Тоді має місце нерівність*

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{t \in R} \frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \le \frac{2F_1}{\varepsilon^p}, \tag{4.18}$$

де F_1 *задано в* (4.17), *та існує випадкова величина* $\xi,\ \mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *така, що з імовірністю одиниця* $|X(t)| < \xi c(t)$ *при всіх* $t \in R$.

Теорема 4.4. *Нехай* $X = (X(t),\ t \in R)$ — *квазістаціонарний процес із прос-*

тору $L_p(\Omega)$ (*означення* 2.4), $\left(\mathrm{E}|X(t)|^p\right)^{1/p} \le E_X$, *існує така неперервна монотонно зростаюча функція* $\sigma(h)$, $\sigma(0) = 0$, *що*

$$\sup_{|t-s|\le h}\left(E|X(t)-X(s)|^p\right)^{1/p} \le \sigma(h), \tag{4.19}$$

та збігається інтеграл $\int_0^{E_X}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1/p}du < \infty$; B_k — *інтервали* $[a_k, a_{k+1}]$, $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty$, $k \in Z$, $\bigcup_{k\in Z} B_k = R$.

Нехай $c = \{c(t), t\in R\}$ — *деяка неперервна функція* $c(t) > 0$, $r_k = \left(\inf_{t\in B_k} c(t)\right)^{-1}$. *Якщо збігаються ряди*

$$\sum_{k\in Z} r_k^p < \infty, \qquad \sum_{k\in Z} r_k^p (a_{k+1}-a_k) < \infty, \tag{4.20}$$

то має місце нерівність

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in R}\frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \le \frac{L_X}{\varepsilon^p},$$

де

$$L_X = \sum_{k\in Z}\left(r_k\left(E_X + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{1/p} I_X\left(a_{k+1}-a_k\right)^{1/p}\right)\right)^p, \qquad I_X = \int_0^{E_X}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1/p}du.$$

Крім того, якщо існує така випадкова величина ξ, *що* $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$, *то з імовірністю одиниця при всіх* $t \in R$ $|X(t)| < \xi c(t)$.

Доведення. Теорема випливає з теореми 4.2. Дійсно, згідно з зауваженням 2.3, у виразі для $D_p(t_{0k})$ w_{0k} можна замінити на $2\sup_{t\in B_k}\|X(t)\|_p \le 2E_X$.

Отже, в позначеннях теореми 4.2

$$D_p(t_{0k}) \le E_X + \frac{\alpha_{kp}}{\theta_k(1-\theta_k)}\int_0^{\theta_k 2E_X}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1/p}du.$$

Покладемо $\theta_k = 1/2$. Оскільки $\alpha_{kp} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{1/p}(a_{k+1}-a_k)^{1/p}$, то

$$D_p(t_{0k}) \le E_X + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{1/p}(a_{k+1}-a_k)^{1/p} I_X, \quad \text{де} \quad I_X = \int_0^{E_X}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)^{-1/p}du.$$

Отже,

$$\sum_{k\in Z}\left(r_k D(t_{0k})\right)^p \le \sum_{k\in Z}\left(r_k\left(E_X + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{1/p}(a_{k+1}-a_k)^{1/p} I_X\right)\right)^p \le$$

$$\le \sum_{k\in Z} 2^{p-1} r_k^p\left(E_X^p + 4^p\left(\frac{3}{2}\right)(a_{k+1}-a_k) I_X^p\right). \tag{4.21}$$

Тепер твердження теореми випливає з (4.21) та теореми 4.2.

Наслідок 4.2. *Нехай* $X = \{X(t), t\in R\}$ — *квазістаціонарний сепарабельний процес із простору* $L_p(\Omega)$, $\mathrm{E}|X(t)|^p \le E_X^p$,

$$\sup_{|t-s|\le h}\left(\mathrm{E}|X(t)-X(s)|^p\right)^{1/p} \le Ch^\delta, \quad \delta > \frac{1}{p}, \tag{4.22}$$

при досить малих h, $c(t) = |t|^{1/p}(\ln|t|)^\gamma$, $\gamma > \dfrac{1}{p}$, $|t| > e$, $c(t) = e$, $|t| < e$. *Тоді*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in R}\frac{|X(t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \le \frac{N}{\varepsilon^p}, \tag{4.23}$$

де

$$N = 2\cdot\left(\frac{E_X + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{1/p}\cdot eI_X}{e} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{e^k k^\gamma}\left(E_X + 4\left(\frac{3}{2}\right)^{1/p}\left(e^k(e-1)\right)^{1/p} I_X\right)\right)^p.$$

Крім того, існує випадкова величина ξ *така, що* $\mathrm{P}\{\xi < \infty\} = 1$ *та* $|X(t)| < \xi c(t)$.

Доведення. Умова (4.19) забезпечує збіжність інтеграла I_X. Якщо тепер вибрати $a_k = e^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, та розглянути $X(t)$ окремо при $t > 0$ та при $t < 0$, то наслідок буде випливати з теореми 4.4.

1. *Беляев Ю. К.* О неограниченности выборочных функций гауссовских процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1958. – **3**, вып. 3. – С. 351 – 354.
2. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1992. – 324 p. (*Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам: перевод с англ. – М.; Ижевск: RXD, 2001. – 463 с.)
3. *Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A.* Wavelets, approximation and statistical applications. – New York: Springer, 1998. – 265 p.
4. *Walter G., Shen X.* Wavelets and other orthogonal systems. – London: Chapman and Hall / CRC, 2000. – 370 p.
5. *Козаченко Ю. В.* Лекции з вейвлет аналізу. – Київ: ТВіМС, 2004. – 147 с.
6. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characteristics of the random variables and random processes. – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2000. – 257 p.
7. *Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M., Vasylyk O. I.* On uniform convergence of wavelet expansion of φ-sub-Gaussian random processes // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2006. – **14**, № 3. – P. 209 – 232.
8. *Kozachenko Yu., Barrasa de la Krus E.* Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz random initial conditions // Ibid. – 1995. – **3**, № 3. – P. 201 – 220.
9. *Мацак И. К., Пличко А. Н.* Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 1982. – **27**, № 3. – С. 474 – 491.
10. *Браверман М. Ш.* Оценки для сумм независимых случайных величин // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 173 – 178.
11. *Козаченко Ю., Соттінен Т., Василик О.* Автомодельні процеси з стаціонарними приростами з просторів $\mathrm{Ssub}_\varphi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2001. – № 65. – С. 67 – 78.
12. *Dzhaparidze K. O., van Zanten J. H.* A series expansion of fractional Brownian motion // Probab. Theory and Related Fields. – 2004. – **130**. – P. 39 – 55.

Одержано 20.02.07