УДК 517.9

Е. В. Тарасова (Европ. ун-т, Житомир. фил.)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОГЛОЩЕНИЕМ

We prove a theorem on the uniqueness in the inverse scattering problem for the wave equation with absorption. We also develop an algorithm for the solution of this problem on the basis of the given scattering operator.

Доведено теорему єдиності в оберненій задачі розсіяння для хвильового рівняння з поглинанням та вказано алгоритм розв'язку цієї задачі за заданим оператором розсіяння.

В настоящей работе изучается нестационарная обратная задача рассеяния для волнового уравнения с поглощением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

где $x,\ t \in (-\infty; +\infty)$, $u(x, t)$ — искомое решение, коэффициент $g(x, t)$ описывает поглощающиеся свойства среды. Отметим, что прямые и обратные задачи рассеяния для волновых уравнений изучены достаточно полно. В одномерном случае обратная задача рассеяния для уравнения Штурма – Лиувилля полностью решена В. А. Марченко [1] и М. Г. Крейном [2]. Для трехмерного стационарного уравнения Шредингера ряд постановок обратных задач исследован Ю. М. Березанским [3]. Полное исследование обратной задачи рассеяния для трехмерного уравнения Шредингера выполнено Л. Д. Фадеевым [4]. П. Д. Лаксом и Р. С. Филлипсом [5] рассмотрена задача об определении рассеивающего объекта по оператору рассеяния для волнового уравнения во внешности ограниченной области. Л. П. Нижником и его учениками [6 – 11] впервые изучены нестационарные прямые и обратные задачи рассеяния для волнового уравнения с потенциалом, зависящим от времени.

В характеристических переменных уравнение (1) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (Au)(x, y) = 0, \tag{2}$$

где оператор A определяется равенством

$$(Au)(x, y) = g(x, y)\big(u'_x(x, y) + u'_y(x, y)\big).$$

Пусть в уравнении (2) функция $g(x, y)$ является комплекснозначной измеримой функцией по переменным x, y, которая удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_x |g(x, y)| dy < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_y |g(x, y)| dx < \infty. \tag{3}$$

В дальнейшем будем рассматривать только те решения $u(x, y)$ уравнения (2), которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями из пространства $C^1(E^2)$ и удовлетворяют уравнению (2) в смысле теории обобщенных функций. Такие решения будем называть допустимыми.

В работе [12] изучена задача рассеяния для уравнения (2). Доказано, что оператор рассеяния S для уравнения (2) в пространстве $L_2(-\infty,+\infty; C^2)$ совпадает с оператором рассеяния для системы уравнений Дирака вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\varphi_1(x, y) + g(x, y)(\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\varphi_2(x, y) + g(x, y)(\varphi_1 + \varphi_2) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Оператор рассеяния определяется формулой

$$S\overset{-}{\varphi} = \overset{+}{\varphi}, \tag{5}$$

где $\overset{\pm}{\varphi}$ — асимптотики на бесконечности допустимого решения системы (4):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \overset{\mp}{\varphi}_1(y) + o(1), \quad x \to \mp\infty, \\ \varphi_2(x, y) &= \overset{\mp}{\varphi}_2(x) + o(1), \quad y \to \mp\infty, \end{aligned} \tag{6}$$

имеющие смысл профилей падающей $\overset{-}{\varphi} = \mathrm{col}(\overset{-}{\varphi}_1, \overset{-}{\varphi}_2)$ и рассеянной $\overset{+}{\varphi} = \mathrm{col}(\overset{+}{\varphi}_1, \overset{+}{\varphi}_2)$ волн. При этом доказано, что оператор рассеяния S для уравнения (2) является ограниченным, линейным, матричным оператором в пространстве вектор-функций $L_2(-\infty, +\infty; C^2)$, для которого существует ограниченный обратный оператор S^{-1}, и

$$S = P + F, \qquad S^{-1} = P^{-1} + G, \tag{7}$$

где F, G — матричные интегральные операторы, а P — матричный диагональный оператор умножения в пространстве вектор-функций $L_2(-\infty, +\infty; C^2)$ вида

$$P = \mathrm{diag}\{P_{11}, P_{22}\}, \tag{8}$$

элементами которого являются операторы умножения

$$\begin{aligned} (P_{11}f)(x, y) &= p_{11}(y) f(x, y), \\ (P_{22}f)(x, y) &= p_{22}(y) f(x, y) \end{aligned}$$

на функции

$$p_{11}(y) = \exp\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, y)\, d\xi\right\}, \qquad p_{22}(x) = \exp\left\{-\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \eta)\, d\eta\right\}. \tag{9}$$

Отметим, что слагаемые в формулах (7) определяются однозначно по заданному оператору рассеяния S, т. е. имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Если известен оператор рассеяния $S = P + F$ для волнового уравнения* (2), *то операторные слагаемые P и F определяются однозначно.*

Доказательство. Рассмотрим в качестве профилей падающих волн вектор-функции

$$\varphi_1(y, \varepsilon) = \mathrm{col}\left(\omega(y\varepsilon^{-1}), 0\right), \qquad \varphi_2(x, \varepsilon) = \mathrm{col}\left(0, \omega(x\varepsilon^{-1})\right),$$

где $\omega(s)$ — функция с компактным носителем, принадлежащая классу C_0^∞, $\omega(0) = 1$, $\int \omega(s)\, ds = 1$. Тогда

$$S\varphi_1(y - \tau, \varepsilon) = \mathrm{col}\left(S_{11}\omega\left((y - \tau)\varepsilon^{-1}\right),\ S_{21}\omega\left((y - \tau)\varepsilon^{-1}\right)\right)$$

и

$$\left[\lim_{\varepsilon \to 0}\left(S\varphi_1(y - \tau, \varepsilon)\right)\Big|_{y=\tau}\right]_1 = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(S_{11}\omega\left((y - \tau)\varepsilon^{-1}\right)\Big|_{y=\tau}\right).$$

Поскольку

$$S_{11}\omega\left((y - \tau)\varepsilon^{-1}\right)\Big|_{y=\tau} = p_{11}(y)\omega\left((y - \tau)\varepsilon^{-1}\right)\Big|_{y=\tau} + \int_{-\infty}^{y} F_{11}^{+}(y, \eta)\omega\left((y - \eta)\varepsilon^{-1}\right) d\eta\Big|_{y=\tau},$$

учитывая свойства функции $\omega(s)$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(S_{11}\varphi_1(y-\tau,\varepsilon)\big|_{y=\tau}\Big) = p_{11}(y). \tag{10}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(S_{22}\varphi_2(x-\tau,\varepsilon)\big|_{x=\tau}\Big) = p_{22}(x). \tag{11}$$

Слагаемое F определяется из формулы $F = S - P$.

Обратная задача рассеяния для уравнения (2) состоит в определении коэффициента $g(x, y)$ по известному оператору рассеяния S.

Для решения этой задачи используем результаты Л. П. Нижника [10] по обратной задаче рассеяния для канонической системы уравнений Дирака вида

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + u_{12}(x,y)\psi_2(x,y) = 0,\\ &\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + u_{21}(x,y)\psi_1(x,y) = 0,\end{aligned} \tag{12}$$

к которой можно перейти от системы (4) с помощью замены

$$\begin{aligned}\psi_1(x,y) &= \varphi_1(x,y)\exp\left\{\int_{-\infty}^{x} g(\xi,y)\,d\xi\right\},\\ \psi_2(x,y) &= \varphi_2(x,y)\exp\left\{\int_{-\infty}^{y} g(x,\eta)\,d\eta\right\}.\end{aligned} \tag{13}$$

При этом

$$\begin{aligned}u_{12}(x,y) &= g(x,y)\exp\{\alpha(x,y)\},\\ u_{21}(x,y) &= g(x,y)\exp\{-\alpha(x,y)\},\\ \alpha(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} g(\xi,y)d\xi - \int_{-\infty}^{y} g(x,\eta)d\eta.\end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что условие (3) на коэффициент $g(x, y)$ обеспечивает принадлежность $u_{12}(x, y)$ и $u_{21}(x, y)$ пространству $L_2(E^2)$.

Из соотношений (14) получаем $g^2(x, y) = u_{12}(x, y)u_{21}(x, y)$ и

$$g(x,y) = \operatorname{sign} u_{12}(x,y)\sqrt{u_{12}(x,y)u_{21}(x,y)}. \tag{15}$$

Существует тесная связь между оператором рассеяния S для волнового уравнения (2) и оператором рассеяния S_N для системы Дирака (12).

Лемма 2. *Оператор рассеяния S для волнового уравнения с поглощением* (2) *и обратный к нему оператор S^{-1} связаны с оператором рассеяния S_N для системы Дирака* (12) *формулами*

$$S_N = P^{-1}S, \qquad S_N^{-1} = S^{-1}P, \tag{16}$$

где P — матричный оператор умножения, определенный в (8), (9).

Доказательство. Согласно работе [10], оператор рассеяния S_N для системы Дирака (12) и обратный к нему оператор S_N^{-1} являются матричными операторами в пространстве $L_2(-\infty, +\infty; C^2)$:

$$S_N = I + F^N, \qquad S_N^{-1} = I + G^N,$$

и связывают асимптотики допустимого решения $\psi_i(x, y)$, $i = 1, 2$, этой системы на бесконечности

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x, y) &= a_1(y) + o(1), \quad x \to -\infty, \\
\psi_2(x, y) &= a_2(x) + o(1), \quad y \to -\infty, \\
\psi_1(x, y) &= b_1(y) + o(1), \quad x \to +\infty, \\
\psi_2(x, y) &= b_2(x) + o(1), \quad y \to +\infty,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

т. е.

$$S_N a = b. \tag{18}$$

Переходя к пределу в формулах (13) и учитывая (6), (17), получаем

$$
a_1(y) = \overset{-}{\varphi}_1(y), \qquad a_2(x) = \overset{-}{\varphi}_2(x),
$$

$$
b_1(y) = \overset{+}{\varphi}_1(y) p_{11}^{-1}(y), \qquad b_2(x) = \overset{+}{\varphi}_2(x) p_{22}^{-1}(x),
$$

откуда следует формула (16).

Из (16) получаем формулы, связывающие ядра интегральных операторов S_N и S:

$$
\begin{aligned}
F_{12}^N(y, s) &= p_{11}^{-1}(y) F_{12}(y, s), \qquad F_{21}^N(x, s) = p_{22}^{-1}(x) F_{21}(x, s), \\
G_{21}^N(x, s) &= p_{11}(s) G_{21}(x, s), \qquad G_{12}^N(y, s) = p_{22}(s) G_{12}(y, s).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Имеет место теорема единственности в обратной задаче рассеяния для уравнения (2).

Теорема 1. *По заданному оператору рассеяния S коэффициент поглощения $g(x, y)$ в волновом уравнении* (2) *определяется однозначно. Решение этой обратной задачи может быть получено с помощью следующего алгоритма*:

1) *по оператору рассеяния S для волнового уравнения* (2), *согласно формулам* (10), (11), *находим функции* $p_{11}(y)$, $p_{22}(x)$, *т. е. матричный оператор умножения P*;

2) *используя формулы* (19), *строим оператор рассеяния S_N для канонической системы уравнений Дирака* (12);

3) *по оператору S_N решаем обратную задачу рассеяния для системы уравнений Дирака* (12), *согласно алгоритму работы* [10], *и находим функции* $u_{12}(x, y)$, $u_{21}(x, y)$;

4) *по функциям* $u_{12}(x, y)$, $u_{21}(x, y)$, *согласно формуле* (15), *находим коэффициент поглощения $g(x, y)$ в волновом уравнении* (2).

Доказательство. Пусть задан оператор рассеяния S для волнового уравнения (2). Тогда по нему, согласно лемме 1, однозначно определяется оператор умножения P. По формулам (19) строим оператор рассеяния S_N для соответствующей канонической системы уравнений Дирака (12). Далее, согласно работе [10], по оператору S_N составляем системы основных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&B_{11}^+(x, y, s) + \int_x^\infty B_{12}^-(x, y, \xi) G_{21}^N(\xi, s) d\xi = 0, \quad y > s, \\
&B_{12}^-(x, y, s) + \int_{-\infty}^y B_{11}^+(x, y, \xi) F_{12}^N(\xi, s) d\xi + F_{12}^N(y, s) = 0, \quad s > y, \\
&B_{21}^+(x, y, s) + \int_x^\infty B_{22}^-(x, y, \xi) G_{21}^N(\xi, s) d\xi + G_{21}^N(x, s) = 0, \quad y > s,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$B_{22}^{-}(x, y, s) + \int\limits_{-\infty}^{y} B_{21}^{+}(x, y, \xi) F_{12}^{N}(\xi, s) d\xi \;=\; 0, \qquad s > x,$$

которые связаны с коэффициентами системы Дирака (12) формулами

$$B_{12}^{-}(x, y; x+0) \;=\; u_{12}(x, y), \qquad B_{21}^{+}(x, y; y-0) \;=\; u_{21}(x, y). \tag{21}$$

Далее, коэффициент волнового уравнения $g(x, y)$ находится по формуле (15).

***Замечание* 1**. Из доказательства теоремы 1 видно, что в определении коэффициента $g(x, y)$ участвуют только три функции: $F_{12}(x, y)$, $G_{21}(x, y)$ (ядра интегральных операторов F_{12}, G_{21}) и $\ln p_{11}(y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, y) d\xi$. Поэтому естественно эти функции называть данными рассеяния для волнового уравнения (2).

Из теоремы 1 следует, что по известным данным рассеяния коэффициент $g(x, y)$ в волновом уравнении (2) находится однозначно.

***Замечание* 2.** Если коэффициент $g(x, y)$ в волновом уравнении (2) является чисто мнимой величиной

$$\overline{g}(x, y) \;=\; -g(x, y), \tag{22}$$

то из (14) имеем

$$\overline{u}_{12}(x, y) \;=\; -u_{21}(x, y),$$

т. е. потенциал в канонической системе уравнений Дирака (12) является кососимметрическим.

Тогда, как показано в работе [10], оператор рассеяния S_N (18) является унитарным оператором ($S_N^{-1} = S_N^{*}$) в пространстве $L_2(-\infty, +\infty; C^2)$ и однозначно определяется по оператору отражения F_{21}^{N}.

Таким образом, чисто мнимый коэффициент поглощения $g(x, y)$ в волновом уравнении (2) однозначно определяется по известным функциям $F_{12}(x, y)$ и $p_{11}(y)$, либо по функциям $F_{21}(x, y)$ и $p_{22}(x)$, где функции p_{11} и p_{22} определяются формулами (9), а $F_{12}(x, y)$ и $F_{21}(x, y)$ являются ядрами интегральных операторов — элементов матричного оператора рассеяния S.

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.
2. *Крейн М. Г.* Решение обратной задачи Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 1. – С. 21 – 24.
3. *Березанский Ю. М.* О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1958. – **7**. – С. 3 – 62.
4. *Фадеев Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1974. – **3**. – С. 93 – 180.
5. *Лакс П., Филипс Р.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
6. *Нижник Л. П.* Задача рассеяния при нестационарном возмущении // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 1. – С. 40 – 43.
7. *Нижник Л. П.* Корректная задача рассеяния без начальных данных для волнового уравнения // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 6. – С. 802 – 813.
8. *Нижник Л. П.* Обратная задача нестационарного рассеяния // Докл. АН СССР. – 1971. – **196**, № 5. – С. 1016 – 1019.
9. *Нижник Л. П.* Обратная задача рассеяния на нестационарном потенциале в трехмерном пространстве // Методы функционального анализа в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 38 – 62.
10. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
11. *Фам Лой Ву.* Обратная нестационарная задача рассеяния для возмущенного уравнения струны на всей оси // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 5. – С. 630 – 637.
12. *Тарасова Е. В.* Задача рассеяния для волнового уравнения с поглощением // Там же. – 2004. – **56**, № 2. – С. 221 – 227.

Получено 06.02.06