К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 513.813

Т. И. Григорьева (Одес. нац. акад. связи)

СВОЙСТВА ПАРАБОЛИЧЕСКИ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ДОПУСКАЮЩИХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ТИПА π_2 С ВЫРОЖДЕННОЙ АФФИНОРНОЙ СТРУКТУРОЙ

We study the almost geodesic mapping of the Riemannian spaces with parabolic affinor structure. We establish some properties of the parabolic Kählerian spaces admitting almost geodesic mapping.

Вивчається майже геодезійне відображення ріманових просторів із параболічною афінорною структурою. Знайдено деякі властивості параболічно келерових просторів, що допускають майже геодезійне відображення.

Теория почти геодезических отображений (ПГО) аффинно-связных и римановых пространств без кручения была разработана Н. С. Синюковым [1, 2]. В [1] показано, что существуют три типа ПГО: π_1, π_2 и π_3. ПГО второго типа π_2 при условии ковариантного постоянства аффинора исследовали Я. Таширо [3], С. Исихара [4], Т. Сакагучи [5], В. С. Собчук [6, 7], Й. Микеш [8], И. Н. Курбатова [9, 10] и другие. Однако, как правило, рассматривались невырожденные аффинорные структуры $(e=\pm 1)$. Автор изучает ПГО π_2 с вырожденной аффинорной структурой $(e=0)$. Цель настоящей работы — рассмотреть свойства параболически келеровых пространств, допускающих почти геодезическое отображение $\pi_2\,(e=0)$.

1. Почти геодезическое отображение параболически келеровых пространств.

Определение. *Риманово пространство* V_{2n} *будем называть параболически келеровым пространством* (*ПКП*), *если в нем наряду с метрическим тензором* $g_{ij}(x)$ *существует аффинорная структура* $F_i^h(x)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \qquad F_{i,j}^h = 0, \qquad F_i^\alpha g_{\alpha j} = \varepsilon F_j^\alpha g_{\alpha i}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

где «,» — *знак ковариантной производной в* V_{2n}.

Случай $\varepsilon=-1$ подробно изучен в [11]. В настоящей работе будем рассматривать ПКП при условии $\varepsilon=1$, т. е. согласовывать аффинорную структуру с метрикой следующим образом:

$$g_{\alpha j} F_i^\alpha = g_{\alpha i} F_j^\alpha. \tag{1}$$

Рассмотрим почти геодезическое отображение $\pi_2(e=0)\colon V_{2n}\to \overline{V}_{2n}$ параболически келеровых пространств $V_{2n}(g_{ij}, F_i^h)$ и $\overline{V}_{2n}(\overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$. В общей по отображению системе координат (x^i) основные уравнения этого отображения имеют вид [1, 12]

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h{}_{j)} + \varphi_{(i}(x)F^h{}_{j)}(x), \tag{2a}$$

$$\overline{F}_i^h(x) = F_i^h(x), \tag{2b}$$

$$F_{i,j}^h = 0, \tag{2c}$$

$$F^h_{i/j} = 0, \tag{2d}$$

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = 0, \tag{2e}$$

где $\Gamma^h_{ij}(x)$ и $\overline{\Gamma}^h_{ij}(x)$ — компоненты объектов связности пространств V_{2n} и $\overline{V}_{2n}$ соответственно, ψ_i, φ_i — ковекторы, „/” — знак ковариантной производной в $\overline{V}_{2n}$, круглыми скобками $(\,ij)$ обозначена операция симметрирования без деления.

Операцию свертывания с аффинором будем обозначать следующим образом:

$$A_{\overline{\beta}} = A_\alpha F^\alpha_\beta, \qquad A^{\overline{\beta}} = A^\alpha F^\beta_\alpha,$$

при этом положим

$$A^h_{\overline{i}\, j\ldots,k} = (A^h_{\alpha j\ldots,k}) F^\alpha_i .$$

Исследования будем проводить в специальной системе координат, в которой компоненты аффинора F^h_i имеют вид

$$F^{a+n}_b = \delta^a_b, \qquad F^a_b = F^a_{b+n} = F^{a+n}_{b+n} = 0, \tag{3}$$

где $a, b = 1, 2, \ldots, n$, т. е.

$$(F^h_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Возможность выбора такой системы координат показана в [12].

Введем в рассмотрение дополнительную аффинорную структуру $\overset{*}{F}{}^h_j$, удовлетворяющую условиям

$$F^h_\alpha \overset{*}{F}{}^\alpha_i + \overset{*}{F}{}^h_\alpha F^\alpha_i = \delta^h_i \tag{4}$$

и

$$\overset{*}{F}{}^h_\alpha \overset{*}{F}{}^\alpha_j = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим аффинор $\overset{*}{F}{}^h_j$ в виде

$$\left(\overset{*}{F}{}^h_j\right) = \begin{pmatrix} B & D \\ C & A \end{pmatrix},$$

где A, B, C, D — произвольные квадратные матрицы порядка n. Тогда, учитывая структуру аффинора F^h_j, из (4) имеем

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ B+A & D \end{pmatrix} = E_{2n}.$$

Следовательно,

$$(\overset{*}{F}{}^h_j) = \begin{pmatrix} B & E_n \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Но из условий (5) получаем

$$\begin{pmatrix} B^2+C & 0 \\ 0 & B^2+C \end{pmatrix} = 0,$$

а значит, $B^2 + C = 0$. Таким образом, аффинор $\overset{*}{F}{}_j^h$, удовлетворяющий условиям (4), (5), имеет вид

$$\left(\overset{*}{F}{}_j^h\right) = \begin{pmatrix} B & E_n \\ -B^2 & -B \end{pmatrix},$$

где B — произвольная квадратная матрица порядка n.

Нетрудно показать, что $\overset{*}{F}{}_\beta^\alpha F_\alpha^\beta = n$.

В выбранной системе координат, вследствие (1), метрический тензор пространства V_{2n} удовлетворяет условиям

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{ab} & g_{ad} \\ g_{cb} & 0 \end{pmatrix},$$

где $a, b = 1, 2, \ldots, n$, $c, d = n + 1$, $n + 2, \ldots, 2n$, причем $g_{ad} = g_{cb}$, а тензор, взаимный к метрическому,

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ad} \\ g^{cb} & g^{cd} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

причем $g^{ad} = g^{cb}$.

2. Свойства параболически келеровых пространств. Найдем некоторые свойства тензоров Римана и Риччи параболически келерова пространства (ПКП).

Теорема 1. *Тензор Риччи ПКП удовлетворяет условиям*

$$R_{i\bar{j}} = R_{\bar{i}j}, \tag{7}$$

$$R_{\bar{i}\bar{j}} = 0. \tag{8}$$

Для тензора Римана ПКП имеют место соотношения

$$R_{h\bar{k}ij} = R_{hk\bar{i}j}, \tag{9}$$

$$R_{h\bar{k}\bar{i}j} = 0, \tag{10}$$

$$R_{hijk,\bar{l}} = R_{h\bar{i}jk,l}, \tag{11}$$

$$R^{\beta}_{.\bar{i}j\gamma}\overset{*}{F}{}_\beta^\gamma = \frac{1}{2}R_{ij}. \tag{12}$$

Доказательство. Условие интегрируемости (2c) имеет вид

$$R^{\bar{h}}_{.ijk} = R^{h}_{.\bar{i}jk}, \tag{13}$$

или, что эквивалентно,

$$R_{\bar{h}ijk} = R_{h\bar{i}jk}. \tag{14}$$

Свернув (13) по индексам h и k и использовав (14), получим

$$R^{\bar{\alpha}}_{.ij\alpha} = R^{\alpha}_{.ij\bar{\alpha}} = R^{\alpha}_{.i\bar{j}\alpha} = R^{\alpha}_{.\bar{i}j\alpha},$$

откуда следует свойство (7).

Если в (7) выполнить сопряжение по индексу i и при этом учесть условие (2e), то получим свойство (8).

Докажем свойство (9). Для этого в тождестве Бианки

$$R_{hijk} + R_{hjki} = -R_{hkij}$$

выполним поочередно сопряжение по индексам h, k, i, j. С учетом (14) полученные соотношения запишутся так:

$$R_{h\bar{i}jk} - R_{h\bar{j}ik} = -R_{h\bar{k}ij}, \tag{15}$$

$$R_{hi\bar{j}k} - R_{hj\bar{i}k} = -R_{h\bar{k}ij}, \tag{16}$$

$$R_{h\bar{i}jk} - R_{hj\bar{i}k} = -R_{hk\bar{i}j}, \tag{17}$$

$$R_{hi\bar{j}k} - R_{h\bar{j}ik} = -R_{hk\bar{i}j}. \tag{18}$$

Складывая поочередно (15) и (16), а затем (17) и (18), имеем

$$R_{h\bar{i}jk} - R_{h\bar{j}ik} + R_{hi\bar{j}k} - R_{hj\bar{i}k} = -2R_{h\bar{k}ij},$$

$$R_{h\bar{i}jk} - R_{hj\bar{i}k} + R_{hi\bar{j}k} - R_{h\bar{j}ik} = -2R_{hk\bar{i}j}.$$

Из двух последних соотношений следует требуемое. Если теперь в (9) выполнить сопряжение по индексу i и при этом учесть условие (2е), то получим свойство (10).

Использовав тождество Бианки, нетрудно доказать свойство (11). В самом деле, в соотношениях

$$R_{hijk,\,l} = -R_{hikl,\,j} - R_{hilj,\,k}$$

выполним поочередно сопряжение по индексам l и i:

$$R_{hijk,\,\bar{l}} = -R_{hik\bar{l},\,j} - R_{hi\bar{l}j,\,k}, \tag{19}$$

$$R_{h\bar{i}jk,\,l} = -R_{h\bar{i}kl,\,j} - R_{h\bar{i}lj,\,k}. \tag{20}$$

Согласно (9) и (14), правые части соотношений (19) и (20) равны, следовательно, равны и левые части, т. е. имеет место (11).

Использовав (4), можно доказать свойство (12). Действительно, учитывая свойства тензора Римана (9) и (13), имеем

$$R^{\beta}_{.\bar{i}j\gamma}\overset{*}{F}{}^{\gamma}_{\beta} = R^{\beta}_{.ij\gamma}\overset{*}{F}{}^{\gamma}_{\bar{\beta}} = R_{ij} - R^{\beta}_{.ij\gamma}\overset{*}{F}{}^{\bar{\gamma}}_{\beta} = R_{ij} - R^{\beta}_{.\bar{i}j\gamma}\overset{*}{F}{}^{\gamma}_{\beta},$$

т. е.

$$R^{\beta}_{.\bar{i}j\gamma}\overset{*}{F}{}^{\gamma}_{\beta} = R_{ij} - R^{\beta}_{.\bar{i}j\gamma}\overset{*}{F}{}^{\gamma}_{\beta},$$

что эквивалентно (12).

Теорема 2. *Скалярная кривизна ПКП тождественно равна нулю.*

Доказательство. Поскольку, как известно, тензор Риччи имеет свойство симметрии $R_{ij} = R_{ji}$, из (12) следует

$$R^{\beta}_{.\bar{i}j\gamma}\overset{*}{F}{}^{\gamma}_{\beta} = R^{\beta}_{.\bar{j}i\gamma}\overset{*}{F}{}^{\gamma}_{\beta}. \tag{21}$$

Если тензор Римана $R_{hij\alpha}$ свернуть с $F^{\alpha}_{\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{k}$ по индексу α, то согласно (4) имеет место равенство

$$R_{hij\alpha}F^{\alpha}_{\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{k} = R_{hijk} - R_{hij\alpha}\overset{*}{F}{}^{\alpha}_{\beta}F^{\beta}_{k}.$$

Выполним здесь сопряжение по индексу j и свернем результат с g^{ik} по индексам i и k. Левая часть при этом равна нулю:

$$R_{hi\bar{j}\alpha}F^{\alpha}_{\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{k} = R_{hij\bar{\alpha}}F^{\alpha}_{\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{k} = R_{hij\gamma}F^{\gamma}_{\alpha}F^{\alpha}_{\beta}\overset{*}{F}{}^{\beta}_{k} = 0.$$

Из правой части получаем

$$R_{h\alpha\bar{j}\beta}\, g^{\alpha\beta} + R^{\gamma}_{.h\bar{j}\alpha} \overset{*}{F}{}^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\gamma} = -R_{h\bar{j}} + R^{\bar{\gamma}}_{.hj\alpha} \overset{*}{F}{}^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\gamma} = -R_{h\bar{j}} + R^{\delta}_{.hj\alpha} F^{\gamma}_{\delta} F^{\beta}_{\gamma} \overset{*}{F}{}^{\alpha}_{\beta} = -R_{h\bar{j}}.$$

Таким образом, в ПКП V_{2n}

$$R_{i\bar{j}} = 0. \tag{22}$$

Из (22) следует, что в выбранной системе координат компоненты тензора Риччи имеют вид

$$(R_{ij}) = \begin{pmatrix} R_{ab} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a,\ b = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Тогда, использовав (6), можно найти скалярную кривизну ПКП:

$$R_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = 0.$$

3. Почти геодезическое отображение касательных расслоений римановых пространств. Одним из содержательных примеров ПГО $\pi_2(e=0)$ ПКП является отображение касательных расслоений римановых пространств, метрики которых индуцированы метриками римановых пространств, находящихся в геодезическом отображении.

Пусть V_n — риманово пространство с метрическим тензором g_{ij}, отнесенным к локальным координатам $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а $T(V_n)$ — его касательное расслоение. Пусть $R^h_{.ijk}$ — компоненты тензора Римана связности Γ^h_{ij} на V_n, тогда ненулевые компоненты полного лифта тензора $R^h_{.ijk}$ в индуцированных координатах $(x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{2n})$ представляются в виде [13, 14]

$$\tilde{R}^h_{.ij\,k} = R^h_{.ij\,k}, \quad ,\tilde{R}^{h+n}_{.ijk} = \partial R^h_{.ijk} \equiv x^{\alpha+n}\partial_\alpha R^h_{.ijk},$$
$$\tilde{R}^{h+n}_{.i+njk} = \tilde{R}^{h+n}_{.ij+nk} = \tilde{R}^{h+n}_{.ijk+n} = R^h_{.ijk},$$

где $\partial_\alpha R^h_{.ijk} = \dfrac{\partial R^h_{.ijk}}{\partial x^\alpha}$.

Нетрудно видеть, что тензор Риччи и скалярная кривизна метрики полного лифта ${}^c g_{ij}$ имеют вид

$$(R_{AB}) = \begin{pmatrix} 2R_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$R_{AB}\, g^{AB} = 0, \quad A,\ B, = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Очевидно, что найденные выше свойства ПКП выполняются в касательном расслоении риманова пространства.

С. Г. Лейко доказал, что нетривиальный геодезический диффеоморфизм многообразий аффинной связности $M_n \to \overline{M}_n$ на касательных расслоениях со связностями полных лифтов индуцирует 2-геодезический диффеоморфизм первого линейного типа, который имеет свойство взаимности [14]. По терминологии Н. С. Синюкова [1, 2] это и есть ПГО $\pi_2(e)$. Действительно, пусть $V_n(g_{ij})$ допускает геодезическое отображение на риманово пространство $\overline{V}_n(\overline{g}_{ij})$, тогда в общей по отображению системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ основные уравнения этого отображения имеют вид [1]

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)},$$

а следовательно, в индуцированных координатах $(x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{2n})$

$$\bar{\Gamma}^A_{BC} = \Gamma^A_{BC} + \xi_{(B}\delta^A_{C)} + \varphi_{(B}F^A_{C)}, \quad A,\ B,\ C = 1, 2, \ldots, 2n,$$

где Γ^A_{BC}, $\bar{\Gamma}^A_{BC}$ — компоненты объектов связности $T(V_n)$ и $T(\bar{V}_n)$ соответственно,

$$\xi_B = {}^v(\psi_i) = (\psi_i, 0), \qquad \varphi_B = {}^c(\psi_i) = (\partial\psi_i, \psi_i),$$

$$F^A_B = {}^v(\delta^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^i_j & 0 \end{pmatrix}, \qquad \delta^A_B = {}^c(\delta^i_j) = \begin{pmatrix} \delta^i_j & 0 \\ 0 & \delta^i_j \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что

$$F^A_B F^B_C \equiv 0, \qquad F^A_{B,C} = 0,$$

причем

$$g_{\bar{A}B} = g_{A\bar{B}},$$

где g_{AB} — компоненты полного лифта метрического тензора g_{ij}.

Таким образом, в выбранной системе координат, в которой аффинор F^h_j имеет вид (3), найдены следующие свойства параболически келерова пространства, допускающего ПГО $\pi_2(e=0)$: метрический тензор ПКП V_{2n} удовлетворяет условиям (6); тензор Риччи ПКП V_{2n} имеет вид (23); тензоры Римана и Риччи имеют свойства (7) – (12). Доказано также, что скалярная кривизна параболически келерова пространства тождественно равна нулю. Приведен пример параболически келеровых пространств, допускающих ПГО $\pi_2(e=0)$.

1. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
2. *Синюков Н. С.* Почти геодезические отображения аффинно-связных и римановых пространств // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ. – 1982. – Вып. 13. – С. 3 – 26.
3. *Tashiro Y.* On holomorphically projective correspondences in an almost complex space // Math. J. Okayama Univ. – 1957. – **6**, № 2. – P. 147 – 152.
4. *Ishihara S.* Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold // Tohoku Math. J. – 1957. – **9**, № 3. – P. 273 – 297.
5. *Sakaguchi T.* On the holomorphically projective correspondence between Kählerian spaces preserving complex structure // Hokkaido Math. J. – 1974. – **3**, № 2. – P. 203 – 212.
6. *Собчук В. С.* Некоторые вопросы почти геодезических отображений римановых пространств // V Всесоюз. конф. по соврем. проблемам геометрии: Тез. докл. – Самарканд: Самарканд. ун-т, 1972. – С. 203.
7. *Собчук В. С.* Почти геодезические отображения римановых пространств на симметрические римановы пространства // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 5. – С. 757 – 763.
8. *Микеш Й.* Геодезические и голоморфно проективные отображения специальных римановых пространств: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1979. – 100 с.
9. *Курбатова И. Н.* О квазиголоморфно-проективных отображениях K-пространств с сохранением *e*-структуры // VII Всесоюз. конф. по соврем. проблемам геометрии: Тез. докл. – Минск, 1979. – С. 104.
10. *Курбатова И. Н.* *HP*-отображения *H*-пространств // Укр. геом. сб. – 1984. – № 27. – С. 75 – 82.
11. *Шиха М.* Геодезические и голоморфно-проективные отображения параболически келеровых пространств: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – М., 1993. – 110 с.
12. *Григор'єва Т. І.* Інваріантні геометричні об'єкти майже геодезійного відображення π_2 $(e=0)$ // Мат. студ. – 2001. – **16**, № 2. – С. 213 – 216.
13. *Yano K., Kobayashi S.* Prolangations of tensor fields and connections to tangent bundles I // J. Math. Soc. Jap. – 1996. – **18**, № 2. – P. 194 – 210.
14. *Лейко С. Г.* Дифференциальная геометрия обобщенно-геодезических отображений многообразий и их касательных расслоений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Казань, 1998. – 326 с.

Получено 27.02.06,
после доработки — 19.06.06