УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОВЕДІНКА ПРОЦЕСІВ РИЗИКУ З ВИПАДКОВИМИ ПРЕМІЯМИ ПІСЛЯ БАНКРУТСТВА ТА БАГАТОЗНАЧНА ФУНКЦІЯ БАНКРУТСТВА*

For the distribution of functionals connected with the behavior of the risk process with stochastic premiums after the ruin time and for the multivariate ruin function, relations are established.

Установлены соотношения для распределения функционалов, связанных с поведением процесса риска со случайными премиями после разорения, и для многозначной функции разорения.

У роботі [1] вивчались питання про багатозначну функцію банкрутства та про поведінку класичного процесу ризику з лінійною функцією премій після банкрутства. В даній роботі будемо розглядати такі ж питання для надлишкового східчастого процесу ризику з довільно розподіленими вимогами $\{\xi'_k\}_{k\geq 1}$ та з випадковими преміями $\{\xi''_k\}_{k\geq 1}$.

Головна мета цієї роботи полягає у встановленні співвідношень для щільності багатозначної функції банкрутства та для поведінки східчастого процесу ризику $\zeta(t)$ з показниково розподіленими преміями після банкрутства. Як і в [1], при встановленні співвідношень для щільності функції банкрутства та інших характеристик, що описують поведінку розглядуваного процесу ризику $\zeta(t)$ після банкрутства, будемо використовувати отримані в [2 – 5] результати для розподілу перестрибкових функціоналів.

Слід зазначити, що для процесу ризику з випадковими преміями (означення якого можна знайти в [6]) ризикові характеристики, як і для класичного процесу ризику, описуються розподілами або генератрисами відповідних граничних функціоналів, позначення яких подібні до позначень в [1] і наведені нижче. Зауважимо також, що різні питання, пов'язані з вивченням поведінки процесів ризику до і після банкрутства, досліджувались у роботах [7 – 15].

Розглянемо надлишковий процес ризику з вимогами $\{\xi'_k\}_{k\geq 1}$ та преміями $\{\xi''_k\}_{k\geq 1}$:

$$\zeta(t) = S(t) - C(t), \quad S(t) = \sum_{k\leq\nu_1(t)}\xi'_k, \quad C(t) = \sum_{k\leq\nu_2(t)}\xi''_k, \tag{1}$$

де $\nu_{1,2}(t)$ — незалежні прості пуассонівські процеси з інтенсивностями $\lambda_{1,2} > 0$,

$$\mathrm{P}\{\xi'_k < x\} = F_1(x), \quad x > 0, \quad \mathrm{P}\{\xi''_k > x\} = e^{-bx}, \quad x > 0, \quad b > 0.$$

$\{\zeta(t),\ t\geq 0,\ \zeta(0) < 0\}$ можна розглядати як складний пуассонівський процес із сумарною інтенсивністю $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ і стрибками ξ_k довільного знаку,

$$\xi_k \doteq \begin{cases} -\xi''_k & \text{з імовірністю} \quad q = \dfrac{\lambda_2}{\lambda}, \\ \xi'_k & \text{з імовірністю} \quad p = 1-q, \end{cases}$$

$$F(x) = \mathrm{P}\{\xi_k < x\} = qe^{bx}I\{x<0\} + (q + pF_1(x))I\{x>0\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{E}e^{r\zeta(t)} = e^{tk(r)}, \quad k(r) = \lambda\left[q\frac{r}{b+r} + p(\varphi_1(-r)) - 1\right], \quad \varphi_1(r) = \mathrm{E}e^{-r\xi'_1}.$$

---

* Виконано при частковій підтримці Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Резервний процес ризику $\xi_u(t) = R_u(t) = u - \zeta(t)$ є аналогом класичного процесу ризику, $\xi_u(t) = u + C(t) - S(t)$ — майже напівнеперервний зверху східчастий процес, $\zeta(t)$ — майже напівнеперервний знизу. Для порівняння введемо (як і в [1]) позначення основних досліджуваних функціоналів для $\xi_u(t)$ та $\zeta(t)$:

$$\tau(u) = \inf\{t : R_u(t) < 0\}, \quad \tau^+(u) = \inf\{t : \zeta(t) > u\},$$

$$Y^+(u) = -R_u(\tau(u)), \quad \gamma^+(u) = \zeta(\tau^+(u)) - u,$$

$$X^+(u) = R_u(\tau(u) - 0), \quad \gamma_+(u) = u - \zeta(\tau^+(u) - 0),$$

$$X^+(u) + Y^+(u) = R_u(\tau(u) - 0) - R_u(\tau(u)), \quad \gamma_u^+ = \gamma^+(u) - \gamma_+(u).$$

Крім того, позначимо $\tau'(u) = \inf\{t > \tau(u), \zeta_u(t) > 0\}$,

$$T'(u) = \begin{cases} \tau'(u) - \tau(u), & \tau(u) < \infty, \\ 0, & \tau(u) = \infty, \end{cases}$$

$$Z^+(u) = \sup_{\tau^+(u) \le t < \infty} \zeta(t), \quad Z_1^+(u) = \sup_{\tau^+(u) \le t < \tau'(u)} \zeta(t), \quad \zeta^+ = \sup_{0 \le t < \infty} \zeta(t).$$

$T'(u)$ називається „червоним періодом”, $Z^+(u)$ — тотальний максимум дефіциту, $Z_1^+(u)$ — максимум дефіциту за період $T'(u)$, $\zeta^\pm(t) = \sup_{0 \le t \le t' \le t} (\inf) \zeta(t')$ — екстремуми $\zeta(t')$ на інтервалі $[0, t]$.

Спочатку нагадаємо деякі результати й позначення для генератрис перестрибкових функціоналів $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u), \gamma_u^+\}$ та пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$, де $\gamma^+(u) = \gamma_1(u)$, $\gamma_+(u) = \gamma_2(u)$, $\gamma_u^+ = \gamma_3(u)$:

$$\Phi_s^{(k)}(u, x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u, \ \gamma_k(u), \ x\},$$

$$V(s, u, u_1, u_2, u_3) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(u) - \sum_{k=1}^3 u_k \gamma_k(u)}, \ \tau^+(u) < \infty\right] =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sum_{k=1}^3 u_k x_k} \Phi_s(u, x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$\Phi_s(u, x, y, z) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u, \ \gamma_1(u) < x, \ \gamma_2(u) < y, \ \gamma_3(u) < z\},$$

$$V_k(s, u, u_k) = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(u) - u_k \gamma_k(u)}, \ \tau^+(u) < \infty\right] = \int_0^\infty e^{-u_k x} \Phi_s^{(k)}(u, x) dx, \quad k = \overline{1,3}.$$

Згідно з результатами [5, 15] для східчастих пуассонівських процесів основні функції $G(s, x, u_1, u_2, u_3)$ та $G_k(s, x, u_k)$, через які відповідно виражаються генератриси V та V_k, дещо ускладнюються в порівнянні з подібними функціями для напівнеперервних пуассонівських процесів. Це пояснюється тим, що для східчастих процесів обидві атомарні ймовірності є додатними:

$$p_\pm(s) = \mathrm{P}\{\zeta^\pm(\theta_s) = 0\} > 0, \quad p_+(s) p_-(s) = \frac{s}{s + \lambda} > 0, \quad s > 0,$$

де θ_s — показниково розподілена випадкова величина $\mathrm{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $s > 0$, $t \ge 0$. Для процесу (1) сам розподіл $\zeta^-(\theta_s)$ визначається від'ємним коренем рівняння Лундберга

$$k(r_s) = s, \quad r_s = -\rho_-(s) < 0, \quad s > 0,$$

$$P_-(s,x) = \mathrm{P}\{\zeta^-(\theta_s) < x\} = q_-(s)e^{\rho_-(s)x}, \quad x < 0,$$

$$q_-(s) = 1 - p_-(s), \qquad \rho_-(s) = bp_-(s).$$

Тому у згаданих вище функцій G та G_k (які є згортками правих частин інтегральних рівнянь для V та V_k з розподілом $P_-(s,x)$) виникають нові атомарні доданки. Зокрема,

$$G(s,x,u_1,u_2,u_3) = \int_{-\infty}^{0} A_{x-y}(u_1,u_2,u_3)dP_-(s,y) =$$

$$= p_-(s)A_x(u_1,u_2,u_3) + q_-(s)\int_{-\infty}^{-0} A_{x-y}(u_1,u_2,u_3)de^{\rho_-(s)y},$$

$$A_x(u_1,u_2,u_3) = \lambda\int_x^{\infty} e^{(u_1-u_2)x-(u_1+u_3)z}dF(z), \quad x > 0.$$

Відповідні атомарні доданки виникають у $G(s,x,u_1,u_2) = G(s,x,u_1,u_2,0)$, $G_i(s,u,u_i) = G(s,u,u_1,u_2,u_3)\big|_{u_r=0\ \forall r\neq i,\ i=\overline{1,3}}$.

Лема 1. *Функція* $G(s,u,u_1,u_2)$ *з відповідним атомарним доданком зводиться до вигляду*

$$G(s,u,u_1,u_2) = \lambda p_-(s)e^{-u_2 u}\int_0^{\infty} e^{-u_1 z}dF(u+z) +$$

$$+ \frac{\lambda q_-(s)\rho_-(s)}{\rho_-(s)-u_1+u_2}e^{-u_2 u}\int_0^{\infty}\left[e^{-u_1 y} - e^{-(\rho_-(s)+u_2)y}\right]\overline{F}(u+y)dy \tag{3}$$

і допускає обернення (*з похідною* $I'\{y<u\} \approx I\{y=u\}$ *в сенсі Шварца*)

$$g(s,u,x,y) = \lambda p_-(s)F'(u+x)I\{y=u\} + \lambda q_-(s)\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)}F'(x+y)I\{y>u\}, \tag{4}$$

функції згортки $G_k(s,u,u_k)$ *зводяться до вигляду*

$$G_1(s,u,u_1) = \lambda p_-(s)\int_0^{\infty} e^{-u_1 y}F'(u+y)dy +$$

$$+ \frac{\lambda q_-(s)\rho_-(s)}{\rho_-(s)-u_1}\int_0^{\infty}\left[e^{-u_1 y} - e^{-\rho_-(s)y}\right]dF(u+y),$$

$$G_2(s,u,u_2) = \lambda p_-(s)\left[e^{-u_2 u}\overline{F}(u) + bq_-(s)\int_u^{\infty} e^{\rho_-(s)(u-y)-u_2 y}\overline{F}(y)dy\right], \tag{5}$$

$$G_3(s,u,u_3) = \lambda\int_u^{\infty} e^{-u_3 z}dF(z) - \lambda q_-(s)e^{\rho_-(s)u}\int_u^{\infty} e^{-(u_3+\rho_-(s))z}dF(z)$$

і допускають обернення по u_i, $i = \overline{1,3}$:

$$g_1(s,u,x) = \lambda p_-(s)F'(u+x) + q_-(s)\lambda\rho_-(s)\int_x^{\infty} e^{\rho_-(s)(x-z)}dF(u+z),$$

$$g_2(s,u,y) = \lambda p_-(s)\overline{F}(u)I\{y=u\} + q_-(s)\lambda\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)}\overline{F}(y)I\{y>u\}, \quad (6)$$
$$g_3(s,u,z) = \lambda F'(z)\Big[1 - q_-(s)e^{\rho_-(s)(u-z)}\Big]I\{z>u\}.$$

Якщо $m = \mathrm{E}\zeta(1) = \lambda(p\mu - qb^{-1}) < 0$ $(\mu = \mathrm{E}\xi'_k)$, *то існують похідні при* $s \to 0$

$$\begin{aligned}
g'(0,u,x,y) &= \frac{\lambda}{b|m|}F'(x+u)I\{y=u\} + \frac{\lambda}{|m|}F'(x+y)I\{y>u\},\\
g_1'(0,u,x) &= \frac{\lambda}{b|m|}F'(u+x) + \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(u+x),\\
g_2'(0,u,y) &= \frac{\lambda}{b|m|}\overline{F}(u)I\{y=u\} + \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)I\{y>u\},\\
g_3'(0,u,z) &= \frac{\lambda}{|m|}F'(z)(b^{-1}+z-u)I\{z>u\}.
\end{aligned} \quad (7)$$

Доведення. Функція $G(s,u,u_1,u_2)$ в (3) з атомарним доданком обертається по $u_{1,2}$ так само, як і аналогічна функція без атомарного доданка в [1]. Аналогічно обертаються функції $G_i(s,u,u_i)$, $i = \overline{1,2}$, по u_i. Зображення для $G_3(s,u,u_3)$ випливає із співвідношення

$$G_3(s,u,u_3) = \int_{-\infty}^{0} A_{x-y}(0,0,u_3)\,dP_-(s,y) =$$
$$= p_-(s)A_x(0,0,u_3) + q_-(s)\rho_-(s)\int_{-\infty}^{0-} A_{x-y}(0,0,u_3)e^{\rho_-(s)y}dy$$

після спрощення доданка з подвійним інтегралом

$$\rho_-(s)\int_{-\infty}^{0-}\int_{x-z}^{\infty} e^{-u_3 y}dF(y)e^{\rho_-(s)z}dz = \int_{x}^{\infty} e^{-u_3 y}dF(y)\int_{x-y}^{\infty}\rho_-(s)e^{\rho_-(s)z}dz =$$
$$= \int_{x}^{\infty} e^{-u_3 y}(1 - e^{\rho_-(s)(x-y)})dF(y),$$

$G_3(s,u,u_3)$ так само легко обернути по u_3. Поява у співвідношеннях для обернень $g(s,u,x,y)$ та $g_2(s,u,y)$ доданка з індикатором $I\{y=u\}$ пояснюється тим, що при умові перетину процесом критичного рівня u (за допомогою першого стрибка) недострибок $\gamma_2(u) = \gamma_+(u) = u$ набуває фіксованого значення з додатною ймовірністю. Тому у наступних твердженнях (аналогах теореми 1 та наслідку 1 в [1]) виникають нові співвідношення „атомарного” типу з індикатором $I\{y=u\}$.

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай* $\zeta(t)$ — *майже напівнеперервний знизу процес ризику з випадковими преміями. Тоді спільні генератриси* $\{\tau^+(u),\ \gamma_k(u),\ k=\overline{1,3}\}$ *визначаються співвідношеннями, подібними до* (3), (11) *в* [1],

$$sV(s,u,u_1,u_2,u_3) = \int_0^u G(s,u-y,u_1,u_2,u_3)\,dP_+(s,y), \quad (8)$$

де згортка $G(s,u,u_1,u_2,u_3)$ *має атомарну складову*

$$G(s,u,u_1,u_2,u_3) = p_-(s)A_u(u_1,u_2,u_3) + q_-(s)\rho_-(s)\int_{-\infty}^{0} A_{u-y}(u_1,u_2,u_3)e^{\rho_-(s)y}dy.$$

За лемою 1 *функції* $G(s,u,u_1,u_2)$ *та* $G_k(s,u,u_k)$ *допускають обернення по* u_k, $k = \overline{1,3}$. *За допомогою обернення* $g(s,u,x,y)$ (*див*. (4)) *визначається щільність багатозначної функції банкрутства при* $y \neq u$ *та атомарне співвідношення при* $y = u$:

$$s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma_1(u) < x,\ \gamma_2(u) < y\} = p_+(s)g(s,u,x,y)I\{y > u\} +$$

$$+ \int_{0+}^{u} g(s,u-z,x,y)dP_+(s,z)I\{0 < y < u\}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma_1(u) < x,\ \gamma_2(u) = y\}I\{y = u\} = \frac{\lambda p}{s+\lambda}F_1'(u+x).$$

Через $g_k(s,u,x_k)$ (*див*. (6)) *визначаються маргінальні щільності функції банкрутства*

$$\Phi_s^{(k)}(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\gamma_k(u) < x,\ \zeta^+(\theta_s) > u\} =$$

$$= p_+(s)g_k(s,u,x) + \int_{0+}^{u} g_k(s,u-z,x)dP_+(s,z), \quad k = \overline{1,3}. \tag{10}$$

При цьому для $\gamma_2(u) = \gamma_+(u)$ *виконуються атомарні співвідношення*

$$\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma_2(u) = u\} = \frac{\lambda p}{s+\lambda}F_1(u), \tag{11}$$

$$\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma_2(u) = u\} = pF_1(u), \qquad P_+(u) = \mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}, \quad u > 0, \quad m < 0.$$

Доведення теореми базується на оберненні відповідних співвідношень для $V(s,u,u_1,u_2) = V(s,u,u_1,u_2,0)$ та $V_k(s,u,u_k)$, що випливають із (8). Наявність індикаторної складової з $I\{y = u\}$ у $g(s,u,x,y)$ та $g_2(s,u,y)$ обумовлює появу додаткових атомарних співвідношень для пар $\{\zeta^+(\theta_s), \gamma_2(u)\}$ та $\{\zeta^+, \gamma_2(u)\}$ при $m < 0$.

***Наслідок* 1.** *Для східчастого надлишкового процесу ризику* (*див*. (1)) *щільність складної багатозначної функції банкрутства визначається двоїстим співвідношенням при* $y \neq u$ *та атомарним при* $y = u$, $x > 0$:

$$s\Phi_s(u,x,y) = s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) < x,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda q_-(s)\rho_-(s)F'(x+y)\displaystyle\int_{-0}^{u} e^{\rho_-(s)(u-z-y)}dP_+(s,z), & y > u, \\ \lambda\rho_-(s)F'(x+y)\left[q_-(s)\displaystyle\int_{u-y}^{u} e^{\rho_-(s)(u-z-y)}dP_+(s,z) + \frac{1}{b}P_+'(s,u-y)\right], & 0 < y < u, \end{cases} \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) < x,\ \gamma_+(u) = y\} = \frac{\lambda}{s+\lambda}F'(u+x), \quad y = u.$$

Якщо $m = \mathrm{E}\zeta(1) = \lambda(p\mu - qb^{-1}) < 0$, *то*

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) < x,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}F'(x+y)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}, & y > u, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}F'(x+y)\Big[\mathrm{P}\{u-y < \zeta^+ < u\} + \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial u}\mathrm{P}\{\zeta^+ < u-y\}\Big], & 0 < y < u, \end{cases} \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) < x,\ \gamma_+(u) = y\} = F'(u+x), \quad y = u.$$

Інтегруванням (9) *по* x *встановлюються співвідношення* $\left(\overline{F}(u) = \int_u^\infty dF(x), u > 0\right)$

$$s\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) > x,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda q_-(s)\rho_-(s)\overline{F}(x+y)\displaystyle\int_{-0}^{u} e^{\rho_-(s)(u-z-y)}dP_+(s,z), & y > u, \\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(x+y)\left[q_-(s)\displaystyle\int_{u-y}^{u} e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z) + \dfrac{1}{b}P'_+(s,u-y)\right], & 0 < y < u, \end{cases}$$

$$\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) > x,\ \gamma_+(u) = u\} = \frac{\lambda}{s+\lambda}\overline{F}(u+x), \quad y = u, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) > x,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(x+y)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}, & y > u, \qquad \overline{F}(x) = p\overline{F}_1(x), \quad x > 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\overline{F}(x+y)\Big[\mathrm{P}\{u-y < \zeta^+ < u\} + \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial}{\partial u}P_+(u-y)\Big], & 0 < y < u. \end{cases}$$

Щільність розподілу першої маргінальної функції банкрутства визначається співвідношеннями (*при* $s > 0$ *та для* $s = 0$ *при* $m = \mathrm{E}\zeta(1) < 0$)

$$\Phi_s^{(1)}(u,x) =: \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) < x\} =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s}F'(u+x) + \lambda q_-(s)\frac{b}{s+\lambda}\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-z)}F'(u+z)\,dz \; +$$

$$+ \; s^{-1}\lambda p_-(s)\left[\int_0^u F'(u-y+x)\,dP_+(s,y) + q_-(s)b\int_0^u\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-z)}F'(u-y+z)\,dz\,dP_+(s,y)\right], \tag{15}$$

$$\Phi_0^{(1)}(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) < x\} = F'(u+x) + b\overline{F}(u+x) \; +$$

$$+ \; \lambda p'_-(0)\left[\int_0^u F'(u-y+x)\,dP_+(y) + b\int_0^u \overline{F}(u+x-y)\,dP_+(y)\right], \qquad p'_-(0) = \frac{1}{b|m|}.$$

Щільність другої маргінальної функції банкрутства при $y \neq u$ *має вигляд* (*при* $y = u$ (*див.* (11))

$$s\Phi_s^{(2)}(u,y) =: \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda q_-(s)\rho_-(s)\overline{F}(y)\int\limits_{-0}^{u} e^{\rho_-(s)(u-z-y)}dP_+(s,z), & y > u, \\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(y)\left[q_-(s)\int\limits_{u-y}^{u} e^{\rho_-(s)(u-y-z)}dP_+(s,z) + \frac{1}{b}P'_+(s,u-y)\right], & 0 < y < u, \end{cases} \tag{16}$$

$$\Phi_0^{(2)}(u,y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)P_+(u), & y > u, \\ \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)\left[\mathrm{P}\{u-y < \zeta^+ < u\} + \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial u}P_+(u-y)\right], & 0 < y < u. \end{cases}$$

Щільність вимоги, що спричинила банкрутство ($при\ s > 0\ та\ s = 0$), *має вигляд*

$$s\Phi_s^{(3)}(u,z) = \begin{cases} \lambda F'(z)\int\limits_0^u \left[1 - q_-(s)e^{\rho_-(s)(u-z-y)}\right]dP_+(s,y), & z > u, \\ s^{-1}\lambda F'(z)\int\limits_{u-z}^{u}\left[1 - q_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y-z)}\right]dP_+(s,y), & 0 < z < u, \end{cases} \tag{17}$$

$$\Phi_0^{(3)}(u,z) = \frac{\lambda}{|m|}F'(z)\int\limits_0^u\left(z+y-u+\frac{1}{b}\right)dP_+(y)I\{z > u\} +$$

$$+ \frac{\lambda}{|m|}F'(z)\int\limits_0^z\left(z+y+\frac{1}{b}\right)dP_+(y-u)I\{0 < z < u\}.$$

Генератриси $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\},\ k = 1,2,3,$ *визначаються співвідношеннями*

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma^+(0) > x,\ \tau^+(0) < \infty\right] = \frac{\lambda}{s+\lambda}\left[\overline{F}(x) + bq_-(s)\int\limits_x^\infty e^{(x-y)\rho_-(s)}\overline{F}(y)dy\right],$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_+(0) > y,\ \tau^+(0) < \infty\right] = \frac{b\lambda}{s+\lambda}q_-(s)\int\limits_y^\infty e^{-x\rho_-(s)}\overline{F}(x)dx, \tag{18}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_0^+ > z,\ \tau^+(0) < \infty\right] = \frac{\lambda}{s+\lambda}\left[\overline{F}(z) + bq_-(s)\int\limits_z^\infty\left(1 - e^{-\rho_-(s)x}\right)dF(x)\right],$$

які узгоджуються з (15) – (17) *при* $u \to 0$.

Доведення. При доведенні (12) слід врахувати, що

$$\int\limits_0^u I'\{y < u-z\}dP_+(s,z) = p_+(s)I\{y = u\} + \int\limits_{+0}^u I'\{z < u-y\}dP_+(s,z) =$$

$$= p_+(s)I\{y = u\} + P'_+(s,u-y)I\{0 < y < u\}.$$

Після підстановки $g(s,u,x,y)$ із (4) в (9) одержимо співвідношення (14) при $s > 0$ та при $s \to 0$ $(m < 0)$. З (14) легко одержати маргінальні функції банкрутства (15), (16) для $\gamma_{1,2}(u)$. Генератриса для $\{\tau^+(u),\ \gamma_3(u)\}$

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(u)-u_3\gamma_3(u)},\ \tau^+(u)<\infty\right] = p_+(s)G_3(s,u,u_3) + \int\limits_{0+}^{u} G_3(s,u-y,u_3)\,dP_+(s,y)$$

допускає обернення по u_3 при $s>0$ та $s=0$:

$$s\Phi_s^{(3)}(u,z) = p_+(s)g_3(s,u,z) + \int\limits_{0+}^{u} g_3(s,u-y,z)\,dP_+(s,y),$$

$$\Phi_0^{(3)}(u,z) = p_+ g_3'(0,u,z) + \int\limits_{0+}^{u} g_3'(s,u-y,z)\,dP_+(s,y).$$

Після підстановки $g_3(s,u,z)$ та $g_3'(0,u,z)$ із (6) з останніх співвідношень випливає (17). При цьому слід врахувати двоїстість зображення складової частини згортки g_3 з $dP_+(s,y)$

$$\int\limits_{0}^{u} g_3(s,u-y,z)\,dP_+(s,y) =$$

$$= \int\limits_{0}^{u} \ldots I\{y>u-z\}\,dP_+(s,y) = \begin{cases} \int\limits_{0}^{u} \ldots dP_+(s,y), & z>u, \\ \int\limits_{u-z}^{u} \ldots dP_+(s,y), & 0<z<u. \end{cases}$$

Очевидно, що маргінальні функції банкрутства визначаються співвідношеннями

$$\mathrm{P}\{\zeta^+>u,\ \gamma_k>z_k\} = \int\limits_{z_k}^{\infty} \Phi_0^{(k)}(u,z)\,dz, \quad k=\overline{1,3}.$$

Співвідношення (18) випливають з (41) в [1], якщо врахувати, що $\Pi(y) = \lambda\overline{F}(y)$, $y>0$. З (18) при $x,y\to 0$ випливають співвідношення для $\gamma^+(0)$, $\gamma_+(0)$:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}\{\gamma^+(0)>0,\ \zeta^+(\theta_s)>0\} = \frac{\lambda}{s+\lambda}\left[\overline{F}(0) + bq_-(s)\tilde{\Pi}(\rho_-(s))\right], \\ \mathrm{P}\{\gamma_+(0)>0,\ \zeta^+(\theta_s)>0\} = \frac{b}{s+\lambda}q_-(s)\tilde{\Pi}(\rho_-(s)),\end{gathered} \tag{19}$$

які, на перший погляд, можуть видатися суперечливими. Насправді ліві частини цих співвідношень визначають різні ймовірності:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}\{\gamma^+(0)>0,\ \zeta^+(\theta_s)>0\} = \mathrm{P}\{\gamma^+(0)\ge 0,\ \zeta^+(\theta_s)>0\} = q_+(s), \\ q_+(s) > \mathrm{P}\{\gamma_+(0)>0,\ \zeta^+(\theta_s)>0\} = q_+(s) - \frac{\lambda}{\lambda+s}\overline{F}(0).\end{gathered} \tag{20}$$

Наслідок доведено.

Для вивчення поведінки східчастого процесу ризику після банкрутства сформулюємо лему про розподіл максимуму процесу $\zeta_v(t) = v+\zeta(t)$ ($\zeta_0 = \zeta(t)$, $v\ge 0$)

$$\zeta_v^+(t) = \sup_{0\le t'\le t} \zeta_v(t'), \qquad \zeta_v^+(\theta_s) = \sup_{0\le t\le\theta_s} \zeta_v(t).$$

Лема 2. *Генератриса* $\zeta_v^+(\theta_s)$ *визначається співвідношеннями*

$$\Phi(s, v, z) =: \mathrm{E}e^{-z\zeta_v^+(\theta_s)} = \Phi(s, 0, z)e^{-zv}, \quad v \ge 0; \tag{21}$$

$$\Phi(s, 0, z) = \mathrm{E}e^{-z\zeta^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1 - q_+(s)g_s(z)},$$

$$g_s(z) = \mathrm{E}\left[e^{-z\gamma^+(0)} \big/ \zeta^+(\theta_s) > 0\right] = \frac{G_1(s, 0, z)}{G_1(s, 0, 0)}, \tag{22}$$

$$G_1(s, 0, z) = \lambda p p_-(s)\left[\varphi_1(z) + \frac{bq_-(s)}{\rho_-(s) - z}(\varphi_1(z) - \varphi_1(\rho_-(s)))\right],$$

$$G_1(s, 0, 0) = \lambda p[1 - q_-(s)\varphi_1(\rho_-(s))], \qquad \varphi_1(z) = \mathrm{E}e^{-z\xi_1'}.$$

Співвідношення (22) *ми називаємо дограничним узагальненням формули Полячека – Хінчина, границя якого при* $s \to 0$ *для* $m < 0$ *зводиться до формули Полячека – Хінчина*

$$\Phi(0, 0, z) = \mathrm{E}e^{-z\zeta^+} = \frac{p_+}{1 - q_+ g_0(z)},$$

$$g_0(z) = \mathrm{E}\left[e^{-z\gamma^+(0)} \big/ \zeta^+ > 0\right] = \frac{1}{1 + b\mu}\int_0^\infty e^{-zx}\left[dF_1(x) + b\overline{F}_1(x)dx\right]. \tag{23}$$

Доведення. Формулу (21), як і для класичного процесу ризику, отримуємо за допомогою стохастичного співвідношення

$$\zeta_v^+(t) \doteq \begin{cases} v, & t < \tau^+(0), \quad \mathrm{P}\{\zeta > t\} = e^{-\lambda t}, \\ \zeta + \zeta^+_{\gamma^+(0)}(t - \tau^+(0)), & t \ge \tau^+(0), \end{cases}$$

з якого випливає перше співвідношення в (21). При $v = 0$ з цього стохастичного співвідношення випливає формула

$$\Phi(s, 0, z) = p_+(s)[1 - T(s, 0, z)]^{-1}, \qquad T(s, 0, z) = \mathrm{E}\left[e^{-z\gamma^+(0)}, \zeta^+(\theta_s) > 0\right].$$

На підставі (8) і того, що $p_+(s) > 0$, генератриса $T(s, 0, z) = V(s, 0, z, 0, 0)$ визначається співвідношенням

$$T(s, 0, z) = q_+(s)g_s(z) = s^{-1}p_+(s)G_1(s, 0, z),$$

з якого випливає формула (22) з відповідним значенням $g_s(z)$ у термінах $G_1(s, 0, z)$. Граничним переходом $s \to 0$ з (22) встановлюється (23).

Лему доведено.

Аналіз поведінки східчастого надлишкового процесу після банкрутства зводиться до розгляду відповідного східчастого процесу з випадковим стартовим значенням

$$\zeta_*(t) = \zeta_{\gamma^+(u)}(t), \quad t \ge 0, \qquad \zeta_*(0) = \gamma^+(0), \qquad \zeta_*^+ = \sup_{0<t<\infty} \zeta_{\gamma^+(u)}(t), \tag{24}$$

для якого має місце аналог теореми 2 в [1].

Теорема 2. *Нехай* $\zeta(t)$ *— східчастий надлишковий процес ризику з випадковими преміями. Тоді генератриса*

$$\Phi^*(s,u,z) = \mathrm{E}\left[e^{-z\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)},\ \zeta^+(\theta_s) > u\right]$$

визначається співвідношенням

$$\Phi^*(s,u,z) = \Phi(s,0,z)T(s,u,z), \tag{25}$$

$$sT(s,u,z) = sV(s,u,z,0,0) = p_+(s)G_1(s,u,z) + \int_{0+}^{u} G_1(s,u-y,z)\,dP_+(s,y),$$

$$sT(s,0,z) = p_+(s)G_1(s,0,z),$$

$\Phi(s,0,z)$ — *дограничним узагальненням формули Полячека – Хінчина* (22). *Якщо* $m = \mathrm{E}\zeta(1) = \lambda(p\mu - qb^{-1}) < 0$ $\left(\dfrac{\lambda p_+}{b|m|} = 1\right)$, *то генератриса та розподіл жорсткості банкрутства визначаються співвідношеннями*

$$T(0,u,z) = \mathrm{E}\left[e^{-z\gamma^+(u)},\ \tau^+(u) < \infty\right] = p_+(s)G_1'(0,u,z) + \int_{0+}^{u} G_1'(0,u-y,z)\,dP_+(y),$$

$$\mathrm{P}\{\gamma^+(u) > x,\ \zeta^+ > u\} = \overline{F}(u+x) + b\overline{\overline{F}}(u+x) +$$
$$+ \frac{\lambda}{b|m|}\int_0^u \left[\overline{F}(u+x-y) + b\overline{\overline{F}}(u+x-y)\right]dP_+(y),$$
$$\tag{26}$$
$$\mathrm{P}\{\gamma^+(0) > x,\ \zeta^+ > 0\} = p\left(\overline{F}_1(x) + b\overline{\overline{F}}_1(x)\right), \qquad \overline{\overline{F}}_1(x) = \int_x^\infty \overline{F}_1(y)\,dy, \quad x > 0.$$

Генератриса $Z^+(u) \doteq u + \zeta^+_*$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}\left[e^{-zZ^+(u)},\ \zeta^+ > u\right] = e^{uz}\Phi(0,0,z)T(0,u,z), \tag{27}$$

$\Phi(0,0,z)$ — *формулою Полячека – Хінчина* (23), $T(0,u,z)$ — *першим співвідношенням в* (26) *з*

$$G_1'(0,u,z) = \frac{\lambda}{b|m|}\int_0^\infty e^{-zy}\left[F'(u+y) + b\overline{F}(u+y)\right]dy. \tag{28}$$

Доведення. Враховуючи (24), після усереднення генератриси для $\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\cdot)$ по $\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) \in dv\right]$ одержуємо співвідношення (25). Друге співвідношення в (25) випливає з (8) при $u_1 = u$, $u_2 = u_3 = 0$ з функцією $G_1(s,u,u_1)$ (див. в (5)), а з нього при $s \to 0$ — формула для генератриси жорсткості банкрутства, після обернення якої одержують функцію розподілу жорсткості (див. (26)). Розподіл $\{\gamma^+(u), \zeta^+\}$ можна одержати також інтегруванням останнього співвідношення в (15). Із (25) при $s \to 0$ встановлюється (27), оскільки $Z^+(u) = u + \zeta^+_*$.

Теорему доведено.

Як для класичних процесів ризику, так і для східчастих майже напівнеперервних процесів „червоний період” $T'(u)$ стохастично еквівалентний $\tau^-(-\gamma^+(u))$. На основі співвідношення

$$T'(u) \doteq \tau^-(-\gamma^+(u)), \quad u \geq 0,$$

встановлюється аналог теореми 3 з [1].

Теорема 3. *Якщо* $m = \lambda b^{-1}(pb\mu - q) < 0$, *то генератриса* $T'(u)$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}\left[e^{-sT'(u)},\ T'(u) < \infty\right] = p\int_0^{\infty} e^{-x\rho_-(s)}\left(F_1'(u+x) + b\overline{F}(u+x)\right)dx \ +$$

$$+ \ \frac{\lambda p}{|m|}\int_{0+}^{u}\int_0^{\infty} e^{-x\rho_-(s)}\overline{F}_1(u+x-y)\,dx\,dP_+(y),$$

$$\mathrm{P}\{T'(u) < \infty\} = p\left(\overline{F}_1(u) + b\overline{\overline{F}}_1(u)\right) + \frac{\lambda p}{|m|}\int_{0+}^{u}\overline{\overline{F}}_1(u-y)\,dP_+(y). \tag{29}$$

Щільність розподілу $T'(u)$ (*у диференціалах*) *має вигляд*

$$\mathrm{P}\{T'(u)\in dt\} = p\int_0^{\infty}\mathrm{P}\{\tau^-(-x)\in dt\}\left(F_1'(u+x) + b\overline{F}(u+x)\right)dx \ +$$

$$+ \ \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u}\int_0^{\infty}\mathrm{P}\{\tau^-(-x)\in dt\}\overline{F}_1(u+x-y)\,dx\,dP_+(y). \tag{30}$$

Доведення. Після усереднення за щільністю $\Phi_0^{(1)}(u,x)$ генератриси

$$\mathrm{E}\left[e^{-s\tau^-(-x)},\ \tau^-(-x) < \infty\right] = e^{-x\rho_-(s)}$$

із співвідношення

$$\mathrm{E}\left[e^{-sT'(u)},\ T'(u) < \infty\right] = \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^-(-\gamma^+(u))},\ \tau^-(-\gamma^+(u)) < \infty\right] =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\rho_-(s)x}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\gamma^+(u) < x,\ \zeta^+ > u\}\,dx$$

випливає (29), після обернення якого одержують щільність (30). При $s \to 0$ із першого співвідношення в (29) визначається ймовірність

$$\mathrm{P}\{T'(u) < \infty\} \xrightarrow[u\to 0]{} \mathrm{P}\{T'(0) < \infty\} = p(1+b\mu) < p + q = 1.$$

Теорему доведено.

У випадку майже напівнеперервності знизу генератриса числа вимог $N^*(u) = n(T'(u))$ за „червоний період” $T'(u)$

$$n^*(u,z) = \mathrm{E}\left[z^{N^*(u)},\ T'(u) < \infty\right]$$

визначається в наступному твердженні (аналог теореми 4 в [1]).

Теорема 4. *Генератриса числа вимог за період* $T'(u)$ *при* $m < 0$ *визначається через* $s_z = \lambda_1(1-z)$, $0 < z < 1$, *співвідношенням*

$$n^*(u,z) = p\left[\int_0^{\infty} e^{-x\rho_-(s_z)}F_1'(u+x)\,dx + b\int_0^{\infty} e^{-\rho_-(s_z)x}\overline{F}_1(u+x)\,dx\right] +$$

$$+ \ \frac{\lambda p}{|m|}\int_0^{\infty}\int_{0+}^{u} e^{-x\rho_-(s_z)}\overline{F}_1(u+x-y)\,dP_+(y)\,dx, \tag{31}$$

$$n^*(0,z) = p\Big[\varphi_1(\rho_-(s_z)) + b\rho_-^{-1}(s_z)(1-\varphi_1(\rho_-(s_z)))\Big]. \qquad (32)$$

При $z \to 1$ $(s_z \to 0)$ *мають місце співвідношення, що узгоджуються з останнім співвідношенням в* (29) *при* $s \to 0$. *Генератриса числа вимог до банкрутства* $n(\tau^+(u))$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}\Big[z^{n(\tau^+(u))},\ \tau^+(u) < \infty\Big] = \mathrm{E}\Big[z^{-s_z\tau^+(u)},\ \tau^+(u) < \infty\Big] =$$

$$= \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_{s_z}) > u\} \xrightarrow[z\to 1]{} \mathrm{P}\{\zeta^+ > u\}. \qquad (33)$$

Доведення. Формулу (31) можна отримати усередненням генератриси $n(t) = \nu_1(t)$ $\mathrm{E}z^{n(t)} = e^{t\lambda_1(1-z)}$ за розподілом $T'(u)$ (див. (30)):

$$n^*(u,z) = \int_0^\infty e^{t\lambda_1(1-z)}\mathrm{P}\{T'(u)\in dt,\ T'(u) < \infty\}.$$

При $u = 0$ з (31) випливає (32). Співвідношення (33) одержують усередненням генератриси $n(t) = \nu_1(t)$ за розподілом $\tau^+(u)$

$$\int_0^\infty e^{t\lambda_1(z-1)}d\mathrm{P}\{\tau^+(u) < t\} = \mathrm{E}\Big[z^{-s_z\tau^+(u)},\ \tau^+(u) < \infty\Big], \quad s_z = \lambda_1(z-1).$$

1. *Гусак Д. В.* Поведінка класичних процесів ризику після банкрутства та багатозначна функція банкрутства // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1339 – 1353.
2. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* О моменте прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1968. – **13**, № 3. – С. 471 – 478.
3. *Гусак Д. В.* О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями // Там же. – 1969. – **14**, № 1. – С. 15 – 23.
4. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 55 – 73.
5. *Гусак Д. В.* Розподіл перестрибкових функціоналів однорідного процесу з незалежними приростами // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 303 – 322.
6. *Бойков А. В.* Модель Крамера – Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. – 2002. – **47**, № 3. – С. 549 – 553.
7. *Rolsky T., Shmidly H., Shmidt V., Teugels J.* Stochastic processes for insurance and finance. – New York: John Wiley, 1999. – 654 p.
8. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: World Sci., 2000. – 385 p.
9. *Dickson D. C. M.* On the distribution of the surplus prior to ruin // Insurance: Math. and Econom. – 1997. – **11**. – P. 191 – 207.
10. *dos Reis A. D. E.* How long is the surplus below zero? // Ibid. – 1993. – **12**. – P. 23 – 38.
11. *Dickson D. C. M., dos Reis A. D. E.* On the distribution of the duration of negative surplus // Scand. Actuar. J. – 1996. – P. 148 – 164.
12. *Dickson D. C. M., dos Reis A. D. E.* The effect of interest of negative surplus // Insurance: Math. and Econom. – 1997. – **12**. – P. 23 – 38.
13. *Dufresne F., Gerber H. U.* The surplus immediately before ruin and amount of the claim causing ruin // Ibid. – 1988. – **7**. – P. 193 – 199.
14. *Winkel M.* Electronic foreign-exchange markets and passage events of independent subordinators // J. Appl. Probab. – 2005. – **42.** – P. 138 – 152.
15. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **65**. – 460 с.

Одержано 30.06.06