УДК 517.9

В. С. Васильковская, А. В. Плотников (Одес. акад. стр-ва и архитектуры)

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕЧЕТКИМИ ПОМЕХАМИ

For a controlled integro-differential equation with fuzzy noise, we introduce notions of a fuzzy bundle of trajectories and a fuzzy set of attainability and prove some properties of fuzzy bundles.

Для керованого інтегро-диференціального рівняння з нечіткими перешкодами введено поняття нечіткого жмутка траєкторій і нечіткої множини досяжності та доведено деякі властивості нечітких жмутків.

1. Введение. Впервые понятие нечеткого множества появилось в работах Zadeh [1]. В работах O. Kaleva [2, 3] были рассмотрены дифференциальные уравнения с нечеткими начальными условиями, а в статье J. Y. Park, H. K. Han [4] — дифференциальные уравнения с нечеткой правой частью. Там было введено понятие решения для такого типа уравнений и доказаны теоремы существования.

В данной статье вводится понятие управляемого интегро-дифференциального уравнения с нечеткими параметрами в правой части и доказываются некоторые свойства соответствующих нечетких пучков траекторий с помощью перехода к управляемым дифференциальным включениям с нечеткой правой частью.

2. Основные определения и обозначения. Пусть $\mathrm{Comp}(R^n)$ $(\mathrm{Conv}(R^n))$ — пространство непустых (выпуклых) компактных подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min\{r \geq 0 \,|\, A \subset B + S_r(0),\ B \subset A + S_r(0)\},$$

где $A,\ B \subset \mathrm{Comp}(R^n)$ (или $\mathrm{Conv}(R^n)$), $S_r(a)$ — шар в R^n радиуса r с центром в точке $a \in R^n$.

Рассмотрим следующую управляемую интегро-дифференциальную систему:

$$\dot{x} = A(t)x + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + B(t)u + C(t)v(t), \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, $A(t),\ B(t),\ K(t,s),\ C(t)$ — соответственно $(n \times \times n)$-, $(n \times m)$-, $(n \times n)$- и $(n \times k)$-матрицы, $u \in U(t)$ — вектор управления, $U(\cdot): R^1 \to \mathrm{Conv}(R^m)$ — многозначное отображение, $v \in R^k$ — неопределенный параметр такой, что для всех $t \geq 0$ $v(t) \in V$, где V — нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(\cdot): R^k \to [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям.

Предположение 1. 1. *Матрицы* $A(t),\ B(t),\ C(t)$ *измеримы на* R^1.

2. *Существуют константы* $a,\ b,\ c > 0$ *такие, что* $\|A(t)\| \leq a$, $\|B(t)\| \leq \leq b$, $\|C(t)\| \leq c$ *для почти всех* $t \in R^1$.

3. *Матрица* $K(t,s)$ *измерима на* $R^1 \times R^1$.

4. *Существует константа* $l > 0$ *такая, что* $|K(t,s)| \leq l$ *для почти всех* $(t,s) \in R^1 \times R^1$.

5. *Многозначное отображение* $U(t)$ *измеримо на* R^1.

6. *Существует константа* $d > 0$ *такая, что* $\|U(t)\| \leq d$ *для почти всех* $t \in R^1$.

7. *Характеристическая функция* $\mu(\cdot): R^k \to [0, 1]$ *удовлетворяют условиям*:

a) *является модальной, т. е. существует хотя бы одно* $y_0 \in R^k$ *такое, что* $\mu(y_0) = 1$; $\mu(y)$ *непрерывна по* y;

b) *для любого* $\varepsilon > 0$ *и* $y \in R^k \setminus \{y \mid \mu(y) = 1\}$ *существуют* $y', y'' \in R^k$ *такие, что* $\|y - y'\| < \varepsilon$, $\|y - y''\| < \varepsilon$ *и* $\mu(y') < \mu(y) < \mu(y'')$;

c) *множество* $\mathrm{cl}\left\{y \in R^k \,\middle|\, \mu(y) > 0\right\}$ *компактно,* $\mathrm{cl}(P)$ — *замыкание множества* $P \subset R^k$.

Определение 1. *Множество всех измеримых селекторов* $U(\cdot)$ *на* $[0, \infty)$ *будем называть множеством допустимых управлений и обозначать* U.

Введем понятие α-срезки нечеткого множества.

Определение 2 [4]. α-*Срезкой нечеткого множества* V $(\alpha \in [0, 1])$ *назовем множество* $[V]^\alpha$, *определяемое по формуле*

$$[V]^\alpha = \begin{cases} \left\{y \in R^k \,\middle|\, \mu(y) \geq \alpha\right\}, & \text{если } \alpha \in (0, 1], \\ \mathrm{cl}\left\{y \in R^k \,\middle|\, \mu(y) > 0\right\}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторые свойства α-срезки $[V]^\alpha$.

Свойство 1. *Из условия 7 предположения 1 следует*:

1) *для любых* $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ *таких, что* $\alpha_1 > \alpha_2$, *справедливо включение*

$$[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha_2};$$

2) *для любого* $0 \leq \alpha \leq 1$ *соответствующая* α-*срезка нечеткого множества* V *является компактным множеством в* R^k.

Доказательство. 1. Проведем доказательство от противного.

Рассмотрим произвольные $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ такие, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Предположим, что $[V]^{\alpha_1} \not\subset [V]^{\alpha_2}$. Это означает, что найдется, по крайней мере, один такой вектор $y \in R^k$, что $y \in [V]^{\alpha_1}$, но $y \notin [V]^{\alpha_2}$. Если $y \in [V]^{\alpha_1}$, то согласно определению α-срезки $\mu(y) > \alpha_1$. По условию $\alpha_1 > \alpha_2$, и, следовательно, $\mu(y) > \alpha_2$. Отсюда следует, что $y \in [V]^{\alpha_1}$, а это противоречит нашему предположению. Значит, $[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha_2}$.

2. Докажем замкнутость множества $[V]^\alpha$. Рассмотрим последовательность $\{y_n^\alpha\}_{n=1}^\infty \in [V]^\alpha$, сходящуюся к некоторому $y^\alpha \in R^k$. Докажем, что y^α также принадлежит $[V]^\alpha$. Поскольку $y_n^\alpha \in [V]^\alpha$, $n = \overline{1, \infty}$, то $\mu(y_n^\alpha) \geq \alpha$. В силу непрерывности функции $\mu(y)$ по y получаем, что $\mu(y_n^\alpha)$ сходится к $\mu(y^\alpha)$ при $y_n^\alpha \to y^\alpha$. Далее, так как справедливо соотношение $\alpha \leq \mu(y_n^\alpha) \leq 1$ (из определения функции μ), то, переходя к пределу, имеем $\alpha \leq \mu(y_n^\alpha) \leq 1$. Отсюда следует, что $y^\alpha \in [V]^\alpha$, а это доказывает замкнутость множества $[V]^\alpha$.

Тогда, так как для любого $0 < \alpha \leq 1$ $[V]^\alpha \subset [V]^0 \in \mathrm{Comp}(R^k)$, оно также принадлежит $\mathrm{Comp}(R^k)$.

Свойство доказано.

Рассмотрим нечеткое интегро-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + \int_0^t K(t, s)x(s)ds + B(t)u + C(t)V, \quad x(0) = 0, \tag{2}$$

которое получается из системы (1) при замене параметра $v(t)$ на нечеткое множество V.

Системе (2) поставим в соответствие систему

$$\dot{x} \in A(t)x + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + B(t)u + C(t)[V]^\alpha, \quad x(0) = 0, \tag{3}$$

где $[V]^\alpha$ — некоторая α-срезка ($\alpha \in [0,1]$) нечеткого множества V.

В результате получаем управляемую интегро-дифференциальную систему с многозначной правой частью. Такого типа системы были рассмотрены в работах [5, 6].

Обозначим через $[X(u)]^\alpha$ пучок траекторий системы (3), соответствующих допустимому управлению $u(\cdot)$, а через $[X(t,u)]^\alpha$ соответствующее сечение пучка $[X(u)]^\alpha$ в момент $t > 0$ ($\alpha \in [0,1]$).

Введем понятия нечеткого пучка траекторий для системы (2).

Определение 3. *Нечетким пучком траекторий системы* (2) *назовем нечеткое множество* $X(u)$ *такое, что для любого* $t \geq 0$ α*-срезки* $X(t,u)$ *совпадают с сечением пучка траекторий* $[X(u)]^\alpha$ *системы* (3).

Определение 4. *Нечетким измеримым многозначным отображением назовем отображение, любая* α*-срезка которого является измеримым многозначным отображением по Лебегу.*

Определение 5 [4]. *Интегралом от нечеткого множества* $F(t)$ *назовем множество* $\int_0^t F(s)ds$, α*-срезки которого совпадают с интегралом Ауманна* [7] *от* α*-срезки нечеткого множества* $F(t)$, *т. е. выполняется условие*

$$\left[\int_0^t F(s)ds\right]^\alpha = \int_0^t [F(s)]^\alpha ds =$$

$$= \left\{\int_0^t f(s)ds \,\middle|\, f : R^1 \to R^k,\ f(\cdot) \in [F(\cdot)]^\alpha\right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1. *Если матричная функция* $D(t)$, $t \geq 0$, *и нечеткое множество* V *с характеристической функцией* $\mu(\cdot)$ *удовлетворяют условиям*:

1) $D(\cdot)$ *измерима по* t *на* $R_+^1 = [0, +\infty)$;

2) *существует функция* $d(\cdot) \in L_1(R_+^1)$ *такая, что для почти всех* $t \geq 0$ *выполняется неравенство* $\|D(t)\| \leq d(t)$;

3) *характеристическая функция* $\mu(\cdot)$ *удовлетворяет условию* 7 *из предположения* 1,

то $\int_0^t D(s)V ds$ *существует для всех* $t > 0$.

Доказательство. Согласно [4] (теорема 2.3) интеграл $\int_0^t D(s)V ds$ существует для всех $t > 0$, если нечеткое многозначное отображение $L(t) = D(t)V$ измеримо и ограничено некоторой интегральной функцией $\rho(t)$. Согласно условию 1 нечеткое многозначное отображение $L(t)$ измеримо, а из условий 2 и 3 и свойства 1 следует, что существует $\rho(t) = d(t)v_0$, где $v_0 \geq \left|[V]^0\right|$.

Лемма доказана.

Определение 6. *Нечетким абсолютно непрерывным многозначным отобра-*

жением назовем отображение, любая α-срезка которого является абсолютно непрерывным многозначным отображением.

Определение 7. *Нечеткое множество назовем компактным, если его любая α-срезка является компактным множеством.*

Определение 8. *Нечеткое множество назовем выпуклым, если его любая α-срезка является выпуклым множеством.*

3. Нечеткие пучок траекторий и множество достижимости. Докажем теорему о свойствах нечеткого пучка траекторий $X(u)$ системы (2).

Теорема 1. *При выполнении условий предположения* 1 *для любого допустимого управления* $u(\cdot)$ *соответствующий нечеткий пучок* $X(u)$ *системы* (2) *удовлетворяет условиям*:

1) *для всех* $t > 0$ *нечеткое многозначное отображение* $X(t, u)$ *представимо в виде*

$$X(t, u) = \int_0^t \left[\Phi(t, s) + \int_s^t \Phi(t, \tau) R(\tau, s) d\tau \right] B(s) u(s) ds \ +$$

$$+ \int_0^t \left[\Phi(t, s) + \int_s^t \Phi(t, \tau) R(\tau, s) d\tau \right] C(s) V ds, \tag{5}$$

где в первом слагаемом справа интеграл понимается в смысле Лебега, во втором слагаемом — в смысле определения 5. *Матрица* $\Phi(t, s)$ — *матрица Коши дифференциального уравнения* $\dot{x} = A(t)x$, $R(\tau, s)$ — *резольвента, удовлетворяющая интегральному уравнению*

$$R(t, s) - Q(t, s) = \int_s^t Q(t, \tau) R(\tau, s) d\tau, \tag{6}$$

$$Q(t, \tau) = \int_\tau^t K(t, \xi) \Phi(\xi, \tau) d\xi; \tag{7}$$

2) *для всех* $t > 0$ $X(t, u)$ *является выпуклым и компактным нечетким множеством*;

3) *при каждом допустимом* $u(\cdot)$ *многозначная траектория* $X(\cdot, u)$ *является нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением*;

4) *для почти всех* $t > 0$ *и любых* $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ *таких, что* $\alpha_1 > \alpha_2$, *соответствующие* α-*срезки нечеткого множества* $X(t, u)$ *удовлетворяют условию*

$$[X(t, u)]^{\alpha_1} \subset [X(t, u)]^{\alpha_2}.$$

Доказательство. 1. Во втором слагаемом в правой части выражения (5) интеграл существует, так как нечеткое многозначное отображение

$$\left[\Phi(t, s) + \int_s^t \Phi(t, \tau) R(\tau, s) d\tau \right] C(s) V$$

удовлетворяет предположениям леммы 1. Значит, выражение (5) имеет смысл.

Теперь покажем, что нечеткое сечение пучка $X(t, u)$ системы (2) представимо в виде (5). Введем обозначение $G(t, s) = \Phi(t, s) + \int_s^t \Phi(t, \tau) R(\tau, s) d\tau$.

Рассмотрим произвольную α-срезку правой части выражения (5):

$$\left[\int_0^t g(t,s)(B(s)u(s)+C(s)V)ds\right]^\alpha =$$

$$= \left[\int_0^t G(t,s)B(s)u(s)ds\right]^\alpha + \left[\int_0^t G(t,s)C(s)V ds\right]^\alpha =$$

$$= \int_0^t G(t,s)B(s)u(s)ds + \int_0^t G(t,s)C(s)[V]^\alpha ds =$$

$$= \int_0^t G(t,s)\Big(B(s)u(s)+C(s)[V]^\alpha\Big)ds.$$

Тогда получим

$$\left[\int_0^t G(t,s)(B(s)u(s)+C(s)V)ds\right]^\alpha = \int_0^t G(t,s)\Big(B(s)u(s)+C(s)[V]^\alpha\Big)ds. \tag{8}$$

Правая часть выражения (8) является сечением пучка траекторий $[X(t,u)]^\alpha$ системы (3), что следует из определения самого множества $[X(t,u)]^\alpha$ и [8]. Значит, согласно определению 3 нечеткое многозначное отображение $X(t,u)$ представимо в виде (5).

2. Для всех $t>0$ и любого $\alpha\in[0,1]$ покажем выпуклость и компактность α-срезки $[X(t,u)]^\alpha$ нечеткого множества $X(t,u)$.

Рассмотрим выражение (8). Из свойств решения интегрального уравнения (6) следует, что резольвента $R(\tau,s)$ является непрерывной и, значит, измеримой функцией. Матрица Коши $\Phi(t,s)$ является измеримой и абсолютно непрерывной функцией как решение дифференциального уравнения $\dot{x}=A(t)x$. Следовательно, произведение $\Phi(t,\tau)R(\tau,s)$ является измеримой функцией. Таким образом, функция $G(t,s)$ является абсолютно непрерывной функцией как сумма двух абсолютно непрерывных функций.

Согласно выражению (8)

$$[X(t,u)]^\alpha = \int_0^t G(t,s)\Big(B(s)u(s)+C(s)[V]^\alpha\Big)ds.$$

Поскольку подынтегральное выражение является измеримым и ограниченным многозначным отображением, то согласно теореме Ауманна [9] о непустоте, выпуклости и компактности интеграла от многозначного отображения получаем, что для всех $t>0$ и $\alpha\in[0,1]$ α-срезка $[X(t,u)]^\alpha$ является компактным и выпуклым множеством, что влечет за собой компактность и выпуклость нечеткого множества $X(t,u)$ в силу определений 7 и 8.

3. Рассмотрим выражение (8) в виде

$$[X(t,u)]^\alpha = \int_0^t G(t,s)B(s)u(s)ds + \int_0^t G(t,s)C(s)[V]^\alpha ds.$$

Обозначим $I_1=\int_0^t G(t,s)B(s)u(s)ds$, $I_2=\int_0^t G(t,s)C(s)[V]^\alpha ds$. Рассмотрим интеграл I_1. Функция $G(t,s)B(s)u(s)$ есть произведение абсолютно непрерывной функции $G(t,s)$ и измеримой функции $B(s)u(s)$ (см. п. 2) доказательства). Значит, I_1 представляет собой абсолютно непрерывную функцию как интеграл от измеримой функции.

Рассмотрим интеграл I_2. Многозначное отображение $G(t,s)C(s)[V]^\alpha$ является произведением абсолютно непрерывной матричной функции $G(t, s)$ и измеримого многозначного отображения $C(s)[V]^\alpha$. Таким образом, I_2 под знаком интеграла содержит измеримое многозначное отображение и, следовательно, является абсолютно непрерывным многозначным отображением [10]. Тогда α-срезка $[X(t,u)]^\alpha$ нечеткого множества $X(t, u)$ представляет собой абсолютно непрерывное многозначное отображение. В силу определения 6 отображение $X(t, u)$ является нечетким абсолютно непрерывным многозначным отображением, что и требовалось доказать.

4. Используя введенные выше обозначения и определение интеграла Ауманна [7], сечения пучков $[X(t,u)]^{\alpha_1}$ и $[X(t,u)]^{\alpha_2}$ запишем в виде

$$[X(t,u)]^{\alpha_1} = \int_0^t G(t,s)\Big(B(s)u(s)ds + C(s)[V]^{\alpha_1}\Big)ds$$

и

$$[X(t,u)]^{\alpha_2} = \int_0^t G(t,s)\Big(B(s)u(s)ds + C(s)[V]^{\alpha_2}\Big)ds.$$

Согласно свойству 1 справедливо условие $[V]^{\alpha_1} \subset [V]^{\alpha_2}$. Это значит, что множество $G(t,s)\Big(B(s)u(s)ds + C(s)[V]^{\alpha_2}\Big)$ содержит все ветви множества $G(t,s)\Big(B(s)u(s)ds + C(s)[V]^{\alpha_1}\Big)$. Отсюда вытекает, что $[X(t,u)]^{\alpha_1} \subset [X(t,u)]^{\alpha_2}$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Рассмотрим теорему о равенстве сечений нечетких пучков траекторий.

Теорема 2. *При выполнении условий предположения* 1 *для любых двух нечетких множеств* V_1 *и* V_2 *таких, что для любого* $\alpha \in [0, 1]$ $\operatorname{conv}[V_1]^\alpha = \operatorname{conv}[V_2]^\alpha$, *любого допустимого управления* $u(\cdot)$ *соответствующие нечеткие пучки* $X_1(u)$ *и* $X_2(u)$ *системы* (2) *удовлетворяют условию* $X_1(t,u) = X_2(t,u)$ *для всех* $t \geq 0$.

Доказательство. В силу выражения (8) и свойства интеграла Ауманна [7], согласно которому для любого многозначного отображения $F(\cdot): R^1 \to \operatorname{Comp}(R^n)$, интегрируемого по Ауманну, выполняется свойство

$$\int_0^T F(t)dt = \int_0^T \operatorname{conv} F(t)dt = \operatorname{conv}\int_0^T F(t)dt,$$

получаем $[X_1(t,u)]^\alpha = [X_2(t,u)]^\alpha$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Это в свою очередь влечет за собой равенство соответствующих нечетких пучков, т. е. $X_1(t,u) = X_2(t,u)$, что и требовалось доказать.

Дадим определение множества достижимости для управляемой системы (3) с многозначной правой частью.

Определение 9 [6]. *Множеством достижимост* $[Y(T)]^\alpha$ *системы* (3) *назовем множество всех множеств из* $\operatorname{Comp}(R^n)$, *в которые можно перевести систему* (3) *из начального состояния* x_0 *с помощью допустимых управлений за время* T, *т. е.*

$$[Y(T)]^\alpha = \big\{[X(T,u)]^\alpha \,\big|\, u(\cdot) \in U(\cdot)\big\}.$$

На основании данного определения введем определение множества достижимости для нечеткой системы (2).

Определение 10. *Нечетким множеством достижимости* $Y(T)$ *системы* (2) *назовем множество всех нечетких множеств,* α*-срезки которого совпадают с* $[Y(T)]^{\alpha}$ *для всех* $\alpha \in [0, 1]$.

Рассмотрим и докажем следующие свойства нечеткого множества достижимости.

Теорема 3. *При выполнении условий предположения* 1 *нечеткое множество достижимости* $Y(T)$ *системы* (2) *является выпуклым и компактным.*

Доказательство. 1. Докажем вначале выпуклость множества $Y(T)$. Рассмотрим произвольные допустимые управления $u_1(t)$, $u_2(t) \in U(T)$. Данным управлениям соответствуют нечеткие сечения пучков траекторий $X(T, u_1)$, $X(T, u_2) \in Y(T)$ соответственно.

Введем обозначение $G(t, s) = \Phi(t, s) + \int_s^t \Phi(t, \tau) R(\tau, s) d\tau$. Тогда

$$X(T,u_1) = \int_0^t G(t, s) B(s) u_1(s) ds + \int_0^t G(t, s) C(s) V ds,$$

$$X(T,u_2) = \int_0^t G(t, s) B(s) u_2(s) ds + \int_0^t G(t, s) C(s) V ds.$$

Рассмотрим выпуклую комбинацию $X_\beta = \beta X(T,u_1) + (1-\beta) X(T,u_2)$, $\beta \in (0, 1)$, и покажем, что $X_\beta \in Y(T)$:

$$\beta X(T,u_1) + (1-\beta) X(T,u_2) =$$

$$= \beta\left(\int_0^t G(t, s) B(s) u_1(s) ds + \int_0^t G(t, s) C(s) V ds\right) +$$

$$+ (1-\beta)\left(\int_0^t G(t, s) B(s) u_2(s) ds + \int_0^t G(t, s) C(s) V ds\right) =$$

$$= \int_0^t \beta G(t, s) B(s) u_1(s) ds + \int_0^t (1-\beta) G(t, s) B(s) u_2(s) ds +$$

$$+ \beta \int_0^t G(t, s) C(s) V ds + (1-\beta) \int_0^t G(t, s) C(s) V ds.$$

Рассмотрим два первых слагаемых:

$$\int_0^t \beta G(t, s) B(s) u_1(s) ds + \int_0^t (1-\beta) G(t, s) B(s) u_2(s) ds =$$

$$= \int_0^t G(t, s) B(s) \beta u_1(s) ds + \int_0^t G(t, s) B(s) (1-\beta) u_2(s) ds =$$

$$= \int_0^t G(t, s) B(s) (\beta u_1(s) + (1-\beta) u_2(s)) ds.$$

В силу выпуклости множества $U(t)$ для почти всех $t \geq 0$ существует некоторое управление $u_\beta(t)$ такое, что $u_\beta(t) = \beta u_1(t) + (1-\beta) u_2(t)$.

В силу выпуклости интеграла $\int_0^t G(t,s)C(s)V\,ds$ (по теореме 1) справедливо следующее:

$$\beta \int_0^t G(t,s)C(s)V\,ds + (1-\beta)\int_0^t G(t,s)C(s)V\,ds = \int_0^t G(t,s)C(s)V\,ds.$$

Отсюда следует

$$\beta X(T,u_1) + (1-\beta) X(T,u_2) =$$

$$= \int_0^t G(t,s)B(s)u_\beta(s)\,ds + \int_0^t G(t,s)C(s)V\,ds, \tag{9}$$

т. е. так как $u_\beta(\cdot) \in U$, то существует некоторое сечение $X(T,u_\beta) = X_\beta \in Y(T)$. Значит, множество $Y(T)$ является выпуклым, что и требовалось доказать.

2. Докажем компактность множества $Y(T)$. По определению 7 нечеткое множество компактно, если компактна любая его α-срезка. Для произвольного $\alpha \in [0, 1]$ рассмотрим множество

$$[Y(T)]^\alpha = \{[X(T,u)]^\alpha \mid u(\cdot) \in U(\cdot)\}.$$

Рассмотрим произвольную последовательность $\{[X(T,u_k)]^\alpha\}_{k=1}^\infty \in [Y(T)]^\alpha$, сходящуюся к некоторому $\tilde{X}$. Также рассмотрим соответствующую последовательность управлений $\{u_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty \in U$. В силу теоремы 19.7.2 [11] из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_p}(\cdot)\}_{p=1}^\infty$, из которой, в свою очередь, по теореме Мазура [12] можно выделить последовательность $\{u_{k_{ps}}(\cdot)\}_{s=1}^\infty$, сильно сходящуюся к некоторому управлению $\tilde{u}(\cdot)$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{u_{k_{ps}} \to \tilde{u}} [X(T,u_{k_{ps}})]^\alpha = [X(T,\tilde{u})]^\alpha = \tilde{X} \in [Y(T)]^\alpha,$$

что означает замкнутость множества $[Y(T)]^\alpha$.

Далее, рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} = A(t)x + \int_0^t K(t,s)x(s)\,ds + B(t)U(t) + C(t)[V]^\alpha, \quad x(0) = 0. \tag{10}$$

Обозначим через $[Z(T)]^\alpha$ сечение пучка траекторий дифференциального включения (10). Очевидно, что

$$[Z(T)]^\alpha = \int_0^t G(t,s)B(s)U(s)\,ds + \int_0^t G(t,s)C(s)[V]^\alpha\,ds$$

и $[Z(T)]^\alpha \subset \mathrm{Conv}(R^n)$. Через Ω обозначим множество, элементами которого являются все компактные множества, входящие в $[Z(T)]^\alpha$. Множество Ω является компактным [13, с. 102]. А так как $[Y(T)]^\alpha$ является замкнутым подмножеством Ω, то множество $[Y(T)]^\alpha$ является компактным.

Из первой и второй частей доказательства следует, что нечеткое множество достижимости $Y(T)$ является выпуклым и компактным нечетким множеством.

Теорема доказана.

1. *Zadeh L . A.* Fuzzy sets // Inf. Control. – 1965 – **8**. – P. 338 – 353.
2. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – **24**, № 3. – P. 301 – 317.
3. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Ibid. – 1990. – **35**. – P. 389 – 396.
4. *Park J. Y., Han H. K.* Existence and uniqueness theorem for solution of fuzzy differential equations // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1999. – **22**, № 2. – P. 271 – 279.
5. *Отакулов С.* Задачи оптимизации для управляемых дифференциальных включений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Ташкент, 1993. – 270 с.
6. *Плотников А. В.* Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Одесса, 1994. – 198 с.
7. *Aumann R. J.* Integrals of the set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – № 12. – P. 1 – 12.
8. *Ландо Ю. К.* Элементы математической теории управления движением. – М.: Просвещение, 1984. – 88 с.
9. *Aumann R. J.* Measurable utility and the measurable choice theorem // Proc. Int. Colloq. La Decision. – 1967. – P. 15 – 26.
10. *Arstein Z., Burne J. A.* Integration of compact set-valued functions // Pacif. J. Math. – 1975. – **58**, № 2. – P. 296 – 307.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.
12. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 271 с.
13. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. – М.: Изд-во МФТИ, 1982. – 127 с.

Получено 19.12.2005