УДК 512.544

Н. Н. Семко (Нац. ун-т гос. налог. службы Украины, Ирпень),
В. А. Чупордя (Днепропетр. нац. ун-т)

О КЛАССАХ ШУРА ДЛЯ МОДУЛЕЙ НАД ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ

We consider the problem of the coupling between a factor-module $A/C_A(G)$ and a submodule $A(\omega RG)$, where G is a group, R is a ring, and A is an RG-module. It is possible to consider $C_A(G)$ as an analog of the center of the group and the submodule $A(\omega RG)$ as an analog of the derived subgroup of the group.

Розглянуто питання про взаємний зв'язок між фактор-модулем $A/C_A(G)$ та підмодулем $A(\omega RG)$, де G — група, R — кільце, A — RG-модуль. $C_A(G)$ можна розглядати як аналог центра групи, а підмодуль $A(\omega RG)$ — як аналог комутанта групи.

В теории групп очень важную роль играет классическая теорема И. Шура [1], утверждающая, что конечность фактор-группы по центру влечет конечность ее коммутанта. Изучение взаимных связей между фактор-группой по центру и коммутантом было продолжено позднее. Так, легко видеть, что если фактор-группа $G/\zeta(G)$ является почти полициклической, то и коммутант $[G, G]$ будет таким же; если же $G/\zeta(G)$ является черниковской, то черниковской подгруппой будет и $[G, G]$ [2]. Существенные обобщения этих результатов рассматривались в работе [3]. Следуя этой работе, будем говорить, что класс групп X является классом Шура, если для любой группы G из того факта, что $G/\zeta(G) \in X$, всегда вытекает включение $[G, G] \in X$. В работе [3] весьма существенно использовался привычный для теории разрешимых групп аппарат теории модулей над групповыми кольцами, и задача отыскания классов Шура сводилась к следующей модульной задаче: если A — такой ZG-модуль, что аддитивная группа фактор-модуля $A/C_A(G)$ принадлежит некоторому классу групп X, то при каких условиях аддитивная группа подмодуля $A(\omega ZG)$ также принадлежит классу X. Если R — кольцо, G — группа, A — модуль над групповым кольцом RG, то подмодуль $C_A(G)$ может рассматриваться как аналог центра, а подмодуль $A(\omega RG)$ — как аналог коммутанта (здесь через ωRG обозначен фундаментальный идеал группового кольца RG, т. е. идеал, порожденный всеми элементами $g - 1$, $g \in G$). Возникающая таким образом аналогия приводит к следующему вопросу в теории модулей: для каких классов модулей X (над кольцом R или над групповым кольцом RG) из того факта, что $A/C_A(G) \in X$, будет вытекать, что и $A(\omega RG) \in X$? Естественно существенную роль здесь играют как свойства кольца R, так и свойства группы G. Для одного из первых естественных случаев — случая, когда R является полем, в работе [4] был рассмотрен следующий вопрос: для каких групп из конечномерности над R фактор-модуля $A/C_A(G)$ будет вытекать конечномерность подмодуля $A(\omega RG)$? Естественным обобщением конечномерных пространств при переходе от поля к (коммутативному) кольцу являются артиновы и нетеровы модули. Таким образом, приходим к следующим двум естественным вопросам: для каких колец R и групп G из того факта, что фактор-модуль $A/C_A(G)$ модуля A над групповым кольцом RG является артиновым (соответственно нетеровым) R-модулем, будет следовать, что и подмодуль $A(\omega RG)$ является артиновым (соответственно нетеровым) R-модулем. Естественным первым шагом является рассмотрение тех коммутативных колец R, которые достаточно близки к кольцу $\mathbb{Z}$ целых чисел. Одним из таких классов колец являются дедекиндовы области. Дедекиндовы области изучены очень детально, а теория модулей над дедекиндовыми областями является одной из наиболее развитой в теории модулей. Поэтому естественно использовать на первом этапе в качестве кольца скаляров не кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел, а дедекиндовы области. В данной работе и начинается изучение сформулированного выше вопроса для случая, когда R — дедекиндова область.

Лемма 1. *Пусть G — группа, R — кольцо, A — RG-модуль, $g, h \in G$. Тогда $A(\omega R\langle g\rangle) = A(g-1)$ и $A(\omega R\langle g, h\rangle) = A(g-1) + A(h-1)$.*

Доказательство. Для любого элемента $a \in A$ имеет место равенство $a(gh-1) = a(g-1)(h-1) + a(g-1) + a(h-1)$, откуда следует, что $A(gh-1) \leq \leq A(g-1) + A(h-1)$. Простой индукцией отсюда получают равенства $A(\omega R\langle g\rangle) = A(g-1)$ и $A(\omega R\langle g, h\rangle) = A(g-1) + A(h-1)$.

Следствие. *Пусть G — конечнопорожденная группа, R — кольцо, A — RG-модуль. Если фактор-модуль $A/C_A(G)$ является артиновым (соответственно нетеровым) R-модулем, то и подмодуль $A(\omega RG)$ будет артиновым (соответственно нетеровым) R-модулем.*

Доказательство. Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_n\rangle$. Для любого j, $1 \leq j \leq n$, отображение $\phi_j : a \to a(g_j - 1)$, $a \in A$, будет R-гомоморфизмом. Следовательно, имеем $\mathrm{Im}\phi_j = A(g_j - 1) \cong A/\mathrm{Ker}\phi_j = A/C_A(g_j)$, $1 \leq j \leq n$. Очевидно, $C_A(g_j) \geq C_A(G)$, так что $A(g_j - 1)$ — артинов (соответственно нетеров) R-модуль. Поскольку это имеет место для любого j, $1 \leq j \leq n$, то $\sum_{1\leq j \leq n} A(g_j - 1)$ — артинов (соответственно нетеров) R-модуль. Из леммы 1 получаем теперь, что $A(\omega RG) = \sum_{1\leq j \leq n} A(g_j - 1)$, что и доказывает следствие.

Напомним некоторые понятия теории модулей, необходимые в дальнейшем.

Пусть R — кольцо и A — R-модуль. Положим

$$t_R(A) = \{a \in A \mid \mathrm{Ann}_R(a) \neq \langle 0\rangle\}.$$

Если R — область целостности, то $t_R(A)$ — подмодуль A. Будем называть его R-периодической частью A. Модуль A называется R-периодическим, если $A = t_R(A)$; если же $t_R(A) = \langle 0\rangle$, то будем говорить, что A не имеет R-кручения.

Пусть D — дедекиндова область. Положим

$$\mathrm{Spec}(D) = \{P \mid P \text{ — максимальный идеал } D\}.$$

Если I — идеал D, то положим

$$A_I = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0\rangle \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}.$$

Легко видеть, что A_I — D-подмодуль A. A_I называют *I-компонентой* A. Если A совпадает со своей I-компонентой, то будем говорить, что A — *I-модуль над кольцом D*. Далее, пусть

$$\Omega_{I,n}(A) = \{a \in A \mid aI^n = \langle 0\rangle\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\Omega_{I,n}(A)$ — D-подмодуль и $\Omega_{I,n}(A) \leq \Omega_{I,n+1}(A)$, $n \in \mathbb{N}$, так что $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{I,n}(A) = A_I$. Положим $\mathrm{Ass}_D(A) = \{P \in \mathrm{Spec}(D) \mid A_P \neq \neq \langle 0\rangle\}$. Тогда $t_D(A) = \oplus_{P\in\pi} A_P$, где $\pi = \mathrm{Ass}_D(A)$ (см., например, [5]).

Пусть D — дедекиндова область, C — простой D-модуль. Тогда $C \cong \cong D/P$ для некоторого $P \in \mathrm{Spec}(D)$. Обозначим через D инъективную оболочку C через C_{P^∞}. Модуль C_{P^∞} называется *прюферовым P-модулем*. Как и в теории абелевых групп, можно показать, что

$$\mathrm{C}_{P^\infty} \cong \lim\left\{D/P^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

По своему построению, C_{P^∞} — P-модуль, причем $\Omega_{P,k}(\mathrm{C}_{P^\infty}) \cong {}_D D/P^k$ и

$$\Omega_{P,k+1}(\mathrm{C}_{P^\infty})/\Omega_{P,k}(\mathrm{C}_{P^\infty}) \cong \left(D/P^{k+1}\right)/\left(P/P^{k+1}\right) \cong D/P$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, если C — собственный D-подмодуль C_{P^∞}, то найдется число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $C = \Omega_{P,k}(\mathrm{C}_{P^\infty})$. Действительно, если $b \notin \Omega_{P,k}(\mathrm{C}_{P^\infty})$, то $C = bD$. Отметим также, что прюферов P-модуль C_{P^∞} монолитичен и его монолит совпадает с $\Omega_{P,1}(\mathrm{C}_{P^\infty})$.

Если D — дедекиндова область, A — артинов D-модуль, то A — D-периодический, так что $A = \oplus_{P \in \pi} A_P$, где множество $\pi = \mathrm{Ass}_D(A)$ конечно. Далее, $A_P = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_d$, где C_j, $1 \le j \le k$, — циклический P-модуль, E_j, $1 \le j \le d$, — прюферов P-модуль (см., например, [6], теорему 5.7).

Напомним, что группа G имеет конечный специальный ранг $\mathbf{r}(G) = \mathbf{r}$, если каждая ее конечнопорожденная подгруппа может быть порождена не более чем $\mathbf{r}$ элементами и $\mathbf{r}$ — наименьшее число с этим свойством. Это понятие было введено для произвольных групп в статье А. И. Мальцева [7], а для абелевых групп — Х. Прюфером. Поэтому этот ранг называют также *рангом Мальцева – Прюфера*.

Лемма 2. *Пусть G — группа, D — дедекиндова область, A — DG-модуль. Если группа $G/C_G(A)$ имеет конечный специальный ранг $\mathbf{n}$ и фактор-модуль $A/C_A(G)$ является артиновым P-модулем для некоторого $P \in \in \mathrm{Spec}(D)$, то и подмодуль $A(\omega DG)$ будет артиновым P-модулем, причем $\dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A(\omega DG))\big) \le \mathbf{n} \dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A/C_A(G))\big)$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $C_G(A) = = \langle 1 \rangle$. Пусть $\mathbf{L}$ — система всех конечнопорожденных подгрупп группы G. Поскольку группа G имеет конечный специальный ранг $\mathbf{n}$, то для произвольной подгруппы $L \in \mathbf{L}$ будем иметь $L = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$, где $k \le n$. Из доказательства следствия леммы 1 получаем, что $A(\omega DL)$ — артинов P-модуль, а также $A(\omega DL) = \sum_{1 \le j \le k} A(g_j - 1)$. Вследствие того, что $A(g_j - 1) \cong A/C_A(g_j)$ и $C_A(g_j) \ge C_A(G)$,

$$\dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}\big(A(g_j - 1)\big)\big) \le \dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A/C_A(G))\big), \; 1 \le j \le k.$$

Отсюда получаем, что $\dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A(\omega DL))\big) \le k$, $\dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A/C_A(G))\big) \le \le \mathbf{n} \dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A/C_A(G))\big)$. Поскольку $\mathbf{L}$ — локальная система подгрупп группы G, то $G = \bigcup \mathbf{L}$, а потому семейство $\{ A(\omega DL) \mid L \in \mathbf{L} \}$ будет локальным для подгруппы $A(\omega DG)$ и $A(\omega DG) = \bigcup_{L \in \Lambda} A(\omega DL)$. Отсюда следует, что $A(\omega DG)$ — P-модуль и $\Omega_{P,1}(A(\omega DG)) = \bigcup_{L \in \Lambda} \Omega_{P,1}(A(\omega DL))$. В свою очередь это влечет соотношение $\dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A(\omega DG))\big) \le \mathbf{n} \dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A/C_A(G))\big)$. В частности, $\dim_{D/P}\big(\Omega_{P,1}(A(\omega DG))\big)$ конечна. Из леммы 5.6 работы [6] следует тогда, что $A(\omega DG)$ — артинов P-модуль.

Лемма 2 доказана.

Пусть p — простое число. Будем говорить, что группа G *имеет конечный секционный p-ранг* $\mathbf{r}_P(G) = r$, если каждая элементарная абелева p-секция группы G конечна и имеет порядок, не превышающий p^r, и при этом существует такая элементарная абелева p-секция K/L, что $|K/L| = p^r$.

Аналогично будем говорить, что группа G *имеет конечный секционный* 0-*ранг* $\mathbf{r}_0(G) = \mathbf{r}$, если каждая абелева секция без кручения имеет специальный ранг, не превышающий $\mathbf{r}$, и при этом существует абелева секция без кручения, специальный ранг которой точно равен $\mathbf{r}$. Для разрешимых групп эти понятия введены А. И. Мальцевым [8] и Д. Робинсоном [9] (6.1). Нетрудно убедиться в том, что если группа G имеет конечный секционный p-ранг для некоторого $p > 0$, то она имеет и конечный секционный 0-ранг.

Пусть D — дедекиндова область, $0 \neq x \in D$. D-модуль A называется *x-делимым, если* $A = Ax$. Если A — *x-делим для каждого* $0 \neq x \in D$, *то* A *называется D-делимым.*

Отметим, что прюферов P-модуль является D-делимым (см., например, [6], лемму 5.1). Поэтому любой артинов P-модуль над кольцом D, $P \in \mathrm{Spec}(D)$ разлагается в прямую сумму D-делимого подмодуля (D-делимой части) и конечнопорожденного подмодуля.

Группа G называется *обобщенно радикальной*, если она имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп, каждый фактор которого либо локально нильпотентен, либо локально конечен.

Лемма 3. *Пусть G — группа, D — дедекиндова область, A — DG-модуль. Предположим, что A включает в себя DG-подмодуль B, который является артиновым P-модулем для некоторого $P \in \mathrm{Spec}(D)$. Пусть $p = \mathrm{char}(D/P)$. Если G — локально обобщенно радикальная группа конечного секционного p-ранга, то фактор-группа $G/C_G(B)$ почти разрешима и имеет конечный специальный ранг.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше,

$$B = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus E_1 \oplus \ldots \oplus E_d,$$

где C_j, $1 \leq j \leq k$, — циклический P-модуль, E_j, $1 \leq j \leq d$, — прюферов P-модуль (см., например, [6], теорему 5.7). Рассмотрим сначала случай, когда $B = E_1 \oplus \ldots \oplus E_d$ — D-делимый модуль. Пусть $\phi_n \colon D/P^n \to D/P^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, — естественный эпиморфизм. Положим

$$D(P^\infty) = \lim \mathrm{proj} \left\{ D/P^n, \phi_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Из предложения 6.3 работы [10] получаем, что кольцо эндоморфизмов прюферова P-модуля изоморфно кольцу $D(P^\infty)$. Кроме того, $D(P^\infty)$ является областью главных идеалов и $\mathrm{char}\big(D(P^\infty)\big) = \mathrm{char}(D/P)$. Отсюда вытекает, что кольцо эндоморфизмов B изоморфно кольцу матриц $M_d\big(D(P^\infty)\big)$, а группа автоморфизмов подмодуля B изоморфна некоторой подгруппе $GL_d\big(D(P^\infty)\big)$. Для кольца $D(P^\infty)$ существует поле частных F, причем $\mathrm{char}\big(D(P^\infty)\big) = \mathrm{char}(F)$, так что фактор-группа $G/C_G(B)$ изоморфна некоторой подгруппе $GL_d(F)$. Пусть L — изоморфный образ $G/C_G(B)$ в линейной группе $GL_d(F)$. Предположим, что L включает в себя свободную подгруппу X свободного ранга 2. С другой стороны, будучи конечнопорожденной, подгруппа X должна быть обобщенно радикальной. Но обобщенно радикальная группа не может быть свободной. Это противоречие показывает, что L не может содержать свободные подгруппы. В силу теоремы Титса [11] L включает в себя такую нормальную разрешимую подгруппу H, что L/H локально конечна. По теореме А. И. Мальцева [8] H включает в себя нормальную подгруппу S конечного индекса со свойством $g^{-1}Sg \leq T_n(F_1)$ для некоторого конечного расширения F_1 поля F и некоторого элемента $g \in GL_d(F_1)$. Положим

$$U = \left(g^{-1}Sg\right) \bigcap UT_d(F_1), \qquad V = gUg^{-1},$$

тогда V нормальна в S. Если $p > 0$, то $UT_d(F_1)$ — нильпотентная ограниченная p-подгруппа. Поскольку S имеет конечный секционный p-ранг, в этом случае U конечна. Если же $p = 0$, то $UT_d(F_1)$ — нильпотентная подгруппа без кручения. Поскольку S имеет конечный секционный 0-ранг, U имеет конечный специальный ранг. Итак, в любом случае V имеет конечный специальный ранг. Далее,

$$T_d(F_1)/UT_d(F_1) \cong \underbrace{U(F_1) \times \ldots \times U(F_1)}_{d}.$$

Из того факта, что периодическая часть $U(F_1)$ локально циклическая (см., например, [12], предложение 4.4.1), получаем, что периодическая часть S/V имеет конечный специальный ранг. Фактор-группа S/V абелева и, будучи группой конечного секционного p-ранга, имеет конечный 0-ранг. Но тогда ее фактор-группа по периодической части имеет конечный специальный ранг. Отсюда получаем, что и S/V имеет конечный специальный ранг. Поскольку то же справедливо и для V, и S имеет конечный специальный ранг. Из конечности индекса подгруппы S вытекает такое же заключение для H. Таким образом, L имеет конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого либо локально циклический и не имеет кручения, либо локально конечен. Из леммы 2.14 работы [3] получаем, что L включает в себя такую нормальную локально конечную подгруппу T, что L/T почти разрешима и имеет конечный специальный ранг. Вследствие того, что T — подгруппа $GL_d(F_1)$, ее силовская q-подгруппа является черниковской при $q \neq p$, а силовская p-подгруппа нильпотентна и ограничена (см., например, [13] (9.1)). В частности, если $p = 0$, то все силовские подгруппы T будут черниковскими. Если же $p > 0$, то, так как T имеет конечный секционный p-ранг, ее силовская p-подгруппа конечна. Итак, в любом случае все силовские подгруппы T будут черниковскими. Но тогда подгруппа T включает в себя нормальную локально разрешимую подгруппу T_1 конечного индекса [14]. Из доказанного выше получаем, что T_1 разрешима и имеет конечный специальный ранг. Но тогда и L (а значит, $G/C_G(B)$) почти разрешима и имеет конечный специальный ранг.

Рассмотрим теперь случай, когда $B = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$, где C_j, $1 \le j \le k$, — циклический P-модуль. Другими словами, B — конечнопорожденный P-модуль. Тогда B имеет конечный ряд DG-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = B_0 \le B_1 \le \ldots \le B_t = B,$$

факторы которого — простые DG-модули. Отметим, что если B_{j+1}/B_j — простой DG-модуль, то $\mathrm{Ann}_D\left(B_{j+1}/B_j\right) = P$, так что можно рассматривать B_{j+1}/B_j как простой D/P-модуль. Будучи конечнопорожденным над D, этот модуль конечномерен над D/P. Поэтому снова фактор-группа $G/C_G\left(B_{j+1}/B_j\right)$ изоморфна некоторой неприводимой подгруппе $GL_r(F)$, где $r = \dim_{D/P}\left(B_{j+1}/B_j\right)$. Пусть L — изоморфный образ $G/C_G\left(B_{j+1}/B_j\right)$ в линейной группе $GL_k(F)$. Используя рассуждения, которые проводились чуть выше, снова получаем, что L почти разрешима и имеет конечный специальный ранг, а значит, то же имеет место и для фактор-группы $G/C_G\left(B_{j+1}/B_j\right)$, $0 \le j \le t-1$. Пусть $Y = \bigcap_{0 \le j \le t-1} C_G\left(B_{j+1}/B_j\right)$. Используя теорему Ремака, получаем вложение

$$G/Y \to G/C_G(B_1/B_0) \times \ldots \times G/C_G\left(B_t/B_{t-1}\right),$$

которое показывает, что фактор-группа G/Y почти разрешима и имеет конечный специальный ранг. Далее, каждый элемент подгруппы Y индуцирует на каждом факторе ряда $\{B_j \mid 0 \le j \le t\}$ тождественный автоморфизм. Поэтому фактор-группа $Y/C_Y(B)$ нильпотентна, более того, если $p > 0$, то она является ограниченной p-группой, если же $p = 0$, то она не имеет кручения (см., например, [15], теорему 1.C.1 и предложение 1.C.3). Учитывая условия леммы, отсюда получаем, что в первом случае $Y/C_Y(B)$ конечна, а во втором $Y/C_Y(B)$ имеет конечный специальный ранг. Итак, в любом случае $G/C_G(B)$ разрешима и имеет конечный специальный ранг.

Наконец рассмотрим общий случай. Тогда B включает в себя такой D-делимый DG-подмодуль R, что B/R — конечнопорожденный P-модуль. Пусть $Z = C_G(R) \bigcap C_G(B/R)$. В силу рассмотренного выше обе фактор-группы $G/C_G(R)$ и $G/C_G(B/R)$ разрешимы и имеют конечный специальный ранг. Из теоремы Ремака получаем вложение $G/Z \to G/C_G(R) \times G/C_G(R)$, которое показывает, что и G/Z почти разрешима и имеет конечный специальный ранг. Далее, каждый элемент подгруппы Z индуцирует на каждом факторе ряда $\langle 0 \rangle \le R \le B$ тождественный автоморфизм. Поэтому фактор-группа $Z/C_Z(B)$ нильпотентна, более того, если $p > 0$, то она является p-группой, если же $p = 0$, то она не имеет кручения (см., например, [15], теорему 1.C.1 и предложение 1.C.3). Учитывая условия леммы, отсюда получаем, что в первом случае $Y/C_Y(B)$ черниковская и, в частности, имеет конечный специальный ранг, а во втором $Z/C_Z(B)$ имеет конечный специальный ранг. Итак, в любом случае $G/C_G(B)$ почти разрешима и имеет конечный специальный ранг.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа, D — дедекиндова область, A — DG-модуль. Предположим, что фактор-модуль $A/C_A(G)$ является артиновым P-модулем для некоторого $P \in \mathrm{Spec}(D)$ и $p = \mathrm{char}(D/P)$. Если группа G имеет конечный секционный p-ранг, то подмодуль $A(\omega DG)$ будет артиновым P-модулем.*

Доказательство. Пусть $H = C_G(A/C_A(G))$. Из леммы 3 получаем, что G/H — почти разрешимая группа конечного специального ранга. Далее, каждый элемент подгруппы H индуцирует на каждом факторе ряда $\langle 0 \rangle \le C_A(G) \le A$ тождественный автоморфизм. Поэтому фактор-группа $H/C_H(A)$ абелева, более того, она изоморфна некоторой подгруппе $\mathrm{Hom}(A/C_A(G), C_A(G))$ (см., например, [15], теорему 1.C.1 и предложение 1.C.3). Из приводившегося выше описания артиновых P-модулей над дедекиндовой областью можно заключить, что $A/C_A(G) = B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_{P,n}(B)$. Каждый фактор $\Omega_{P,n+1}(B)/\Omega_{P,n}(B)$ можно рассматривать как векторное пространство над полем D/P. Таким образом, если $p > 0$, то аддитивная группа $A/C_A(G)$ является абелевой p-группой. Но тогда $\mathrm{Hom}(A/C_A(G), C_A(G))$ также будет абелевой p-группой (см., например, [16], следствие 43.4). Таким образом, если $\mathrm{char}(D/P) = p > 0$, то $H/C_H(A)$ — абелева p-группа. Учитывая условия леммы, отсюда получаем, что в этом случае $H/C_H(A)$ черниковская и, в частности, имеет конечный специальный ранг. Из леммы 3 получаем,что и фактор-группа G/H почти разрешима и имеет конечный специальный ранг. Но тогда конечный специальный ранг имеет и фактор-группа $G/C_G(A)$. Применяя теперь лемму 2, получаем, что подмодуль $A(\omega DG)$ будет артиновым P-модулем.

Пусть теперь $p = 0$. Аддитивная группа фактора $\Omega_{P,n+1}(B)/\Omega_{P,n}(B)$ изоморфна аддитивной группе векторного пространства $(D/P)t_n$ для некоторого натурального числа t_n. Поскольку аддитивная группа векторного пространства над полем нулевой характеристики делима, то аддитивная группа

$\Omega_{P,n+1}(B)/\Omega_{P,n}(B)$ делима при любом $n \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что во втором случае аддитивная группа фактор-модуля $A/C_A(G)$ делима и не имеет кручения. Но тогда $\mathrm{Hom}(A/C_A(G),\ C_A(G))$ также будет абелевой группой без кручения (см., например, [16], свойство E). Таким образом, если $\mathrm{char}(D/P) = p = 0$, то $H/C_H(A)$ — абелева группа без кручения. Учитывая условия леммы, отсюда получаем, что в этом случае $H/C_H(A)$ имеет конечный специальный ранг. Из леммы 3 получаем, что и фактор-группа G/H почти разрешима и имеет конечный специальный ранг. Но тогда конечный специальный ранг имеет и вся фактор-группа $G/C_G(A)$. Остается снова применить лемму 2 и получить, что подмодуль $A(\omega DG)$ будет артиновым.

Лемма 4 доказана.

Теперь уже можно доказать основной результат данной работы. Отметим сначала, что аналог теоремы Шура уже не имеет места для модулей над групповым кольцом FG, где F — простое поле характеристики $p > 0$, G — бесконечная элементарная абелева p-группа. Примеры такого рода приведены в работе [4]. Там же было показано, что для случая групп конечного секционного p-ранга, где $p = \mathrm{char}\,F$, аналог теоремы Шура имеет место. Естественно, что при расширении кольца скаляров от поля до дедекиндовой области конечность секционного p-ранга группы остается необходимым естественным ограничением.

Теорема. *Пусть G — локально обобщенно радикальная группа, D — дедекиндова область, A — DG-модуль. Предположим, что фактор-модуль $A/C_A(G)$ является артиновым D-модулем. Если группа G имеет конечный секционный p-ранг для любого $p = \mathrm{char}(D/P)$, где $P \in \mathrm{Ass}_D(A/C_A(G))$, то и подмодуль $A(\omega DG)$ будет артиновым D-модулем.*

Доказательство. Как было отмечено выше, D-модуль $A/C_A(G)$, будучи артиновым, является периодическим, так что $A/C_A(G) = \oplus_{P\in\pi} A_P$, где A_P — P-компонента фактор-модуля $A/C_A(G)$ и множество $\pi = \mathrm{Ass}_D(A/C_A(G))$ конечно. Ясно, что A_P — DG-подмодуль $A/C_A(G)$ для любого $P \in \pi$. Тогда A содержит такой конечный ряд DG-подмодулей

$$C_A(G) = B_0 \le B_1 \le \ldots \le B_k = A,$$

что B_{j+1}/B_j — P_j-модуль, $P_j \ne P_t$ при $j \ne t$, $0 \le j, t \le k-1$, $\pi = \{P_0, P_1, \ldots$ $\ldots, P_{k-1}\}$. Для доказательства воспользуемся индукцией по числу k. Если $A/C_A(G)$ — P-модуль для некоторого $P \in \mathrm{Spec}(D)$ (т. е., $k = 1$), то подмодуль $A(\omega DG)$ будет артиновым в силу леммы 4. Пусть теперь $k > 1$. Предположим, что уже доказан тот факт, что DG-подмодуль $E = A(\omega DB_{k-1})$ артинов. Для фактор-модуля A/E уже имеет место включение $B_{k-1}/E \le C_{A/E}(G)$, которое показывает, что $(A/E)/C_{A/E}(G)$ — P_{k-1}-модуль. Применяя теперь к фактор-модулю A/E лемму 4, получаем, что подмодуль $U/E = A(\omega D(A/E))$ артинов. Поскольку E артинов, то и U будет артиновым. Очевидное включение $A(\omega DG) \le U$ доказывает теперь, что $A(\omega DG)$ — артинов D-модуль.

1. *Schur I.* Uber die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen // J. reine und angew. Math. – 1904. – **127**. – S. 20 – 50.
2. *Половицкий Я. Д.* Локально экстремальные и слойно экстремальные группы // Мат. сб. – 1962. – **58**. – С. 685 – 694.
3. *Franciosi S., de Giovanno F., Kurdachenko L. A.* The Schur property and groups with uniform conjugace classes // J. Algebra. – 1995. – **174**. – P. 823 – 847.
4. *Kirichenko V. V., Kurdachenko L. A., Polyakov N. V.* On certain finitary module // Алгебраїчні структури та їх застосування: Пр. Укр. мат. конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – S. 283 – 296.

5. *Matlis E.* Cotorsion modules. – Providence: Mem. Amer. Soc., 1964. – **49**. – 66 p.
6. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Groups with prescribed quotient groups and associated module theory. – New Jersey: World Sci., 2002. – 227 p.
7. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – **22**, № 2. – С. 351 – 352.
8. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 3. – С. 567 – 588.
9. *Robinson D. J. S.* Infinite soluble and nilpotent groups. – London: Queen Mary Coll. Math. Notes, 1968. – 210 p.
10. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with the weak maximal condition for non-subnormal subgroups // Ric. mat. – 1998. – **47**, № 1. – P. 1 – 21.
11. *Tits J.* Free subgroups in linear groups // J. Algebra. – 1972. – **20**, № 2. – P. 250 – 270.
12. *Karpilovsky G.* Field theory. – New York: Marcel Dekker, 1988. – 551 p.
13. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1973. – 229 p.
14. *Беляев В. В.* Локально конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами // Алгебра и логика. – 1981. – **20**, № 6. – С. 605 – 619.
15. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
16. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.

Получено 16.05.2006,
после доработки — 23.11.2006