УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

КРАТНЫЕ СУММЫ ФУРЬЕ И φ-СИЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ИХ УКЛОНЕНИЙ НА КЛАССАХ $\overline{\psi}$-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

We present results concerning the approximation of $\overline{\psi}$-differentiable functions of many variables by rectangular Fourier sums in uniform and integral metrics and establish estimates for φ-strong means of their deviations in terms of the best approximations.

Викладено результати з наближення $\overline{\psi}$-диференційовних функцій багатьох змінних прямокутними сумами Фур'є у рівномірній та інтегральній метриках, а також встановлено оцінки φ-сильних середніх їх відхилень у термінах найкращих наближень.

1. Основные определения. Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ – 2π-периодическая по каждой переменной суммируемая на кубе периодов $T^m = [-\pi, \pi]^m$ функция, $f(x) \in L \equiv L(T^m) = \left\{ f \colon \|f\|_L = \int_{T^m} |f(x)|\, dx < \infty \right\}$;

$$S[f] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=0}^{\infty} 2^{-q(k_1,\ldots,k_m)} A_{k_1,\ldots,k_m}(f;x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} A_k(f;x), \qquad (1)$$

где $q(k) = q(k_1, \ldots, k_m)$ — количество нулевых координат точки $k = (k_1, \ldots, k_m)$,

$$A_k(f;x) \equiv \sum_{\gamma \in P} a_k(f;\gamma) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i\, x_i \,-\, \gamma_i \frac{\pi}{2}\right), \qquad (2)$$

P — множество всех точек $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$, координаты которых имеют значения, равные нулю либо единице, и

$$a_k(f;\gamma) = \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos\left(k_i\, t_i \,-\, \gamma_i \frac{\pi}{2}\right) dt \qquad (3)$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$, соответствующие вектору k и набору γ.

Из (1) – (3) получаем

$$A_k(f;x) = \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i\,(t_i \,-\, x_i)\, dt,$$

тогда

$$S[\,f\,] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i\,(t_i \,-\, x_i)\, dt. \qquad (1')$$

Выражения (1) и (1′) называются полным рядом Фурье функции $f(x)$.

Пусть $\overline{m} = \{1, \ldots, m\}$, $\mu \subset \overline{m}$ и $|\mu|$ — количество элементов множества μ. Каждой функции $f(x) \in L(T^m)$ поставим в соответствие ряд вида

$$S[f]_\mu = \sum_{k^\mu=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-|\mu|} \int\limits_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i\in\mu} \cos k_i (t_i - x_i)\, dt^\mu, \tag{4}$$

где $k^\mu = (k_{j_1}, \ldots, k_{j_{|\mu|}})$, $j_1, \ldots, j_{|\mu|} \in \mu$, $t^\mu = (t_1, \ldots, t_m)$, причем $t_i = 0$, если $i \in c\mu$, $c\mu = \overline{m} \setminus \mu$, $x^{c\mu} = (x_1, \ldots, x_m)$ и $x_i = 0$, если $i \in \mu$, т. е. $t^\mu + x^{c\mu}$ — точка из $\mathbb{R}^m$, у которой координаты, имеющие номера из множества μ, обозначаются через t_i, остальные — через x_i. Ряд (4) называется частным рядом Фурье функции $f(x) \in \in L(T^m)$ по группе переменных x_i, $i \in \mu$. Ясно, что если $\mu = \overline{m}$, то $S[f]_\mu = S[f]$.

Пусть, далее, $\overline{\psi}_i = \left(\psi_i^{(1)}(k_i),\, \psi_i^{(2)}(k_i)\right)$ — пары произвольных систем действительных чисел $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, 2$; $\psi_i^{(1)}(0) \overset{\mathrm{df}}{=} 1$, $\psi_i^{(2)}(0) \overset{\mathrm{df}}{=} 0$. Предположим, что для данной функции $f(x) \in L(T^m)$ и набора μ ряд (см. [1–3])

$$\sum_{k^\mu=1}^{\infty} \pi^{-|\mu|} \int\limits_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c_\mu}) \prod_{i\in\mu} \frac{\psi_i^{(1)}(k_i)\cos k_i(t_i - x_i) + \psi_i^{(2)}(k_i)\sin k_i(t_i - x_i)}{\overline{\psi}_i^2(k_i)}\, dt^\mu,$$

$$\overline{\psi}_i^2(k_i) \equiv \left(\psi_i^1(k_i)\right)^2 + \left(\psi_i^2(k_i)\right)^2 \neq 0, \qquad k_i = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, \ldots, m,$$

является рядом Фурье некоторой функции $F(x) \in (T^m)$ по переменным x_i, $i \in \mu$. Эту функцию обозначим через $f^{\overline{\psi}_\mu}(x)$ и назовем $\overline{\psi}_\mu$-производной функции $f(x)$:

$$F(x) = f^{\overline{\psi}_\mu}(x).$$

Множество функций $f(x) \in L(T^m)$ таких, что для любого $\mu \subseteq \overline{m}$ существуют производные $f^{\overline{\psi}_\mu}(x) \in L(T^m)$, обозначим $L^{\overline{\psi}} = L^{\overline{\psi}}(T^m)$. Если $f(x) \in L^{\overline{\psi}}$ и для любого $\mu \subset \overline{m}$ справедливо включение $f^{\overline{\psi}_\mu} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\subset L(T^m)$, то множество таких функций обозначим через $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Подмножество непрерывных функций $f(x)$, $f(x) \in C = C(T^m)$, из $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ обозначим через $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

При $m \geq 1$ определение $\overline{\psi}_\mu$-производной для любого $\mu \subseteq \overline{m}$ совпадает с определением $(\psi, \beta)_\mu$-производной (см. [4]) в том смысле, что любая $\overline{\psi}_\mu$-производная совпадает с $(\psi, \beta)_\mu$-производной, если определяющие их параметры связаны соотношениями

$$\psi_i^{(1)}(k_i) = \psi_i(k_i) \cos \beta_i \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_i^{(2)}(k_i) = \psi_i(k_i) \sin \beta_i \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

При этом $L^{\overline{\psi}} = L^{\psi}_{\beta}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, а также любая $(\psi, \beta)_\mu$-производная является и ψ_μ-производной, если имеет место равенство (5).

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество положительных непрерывных выпуклых вниз функций $\psi(v)$ непрерывного аргумента $v \geq 1$ таких, что

$$\lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}' = \left\{ \psi \in \mathfrak{M}\colon \int\limits_1^\infty \frac{|\psi(v)|}{v} dv < \infty \right\}.$$

Обозначение $\pm\psi \in A$ означает, что либо $\psi \in A$, либо $-\psi \in A$.

Последовательности $\psi_i^{(j)}(k_i)$, $j = 1, 2$, будем рассматривать как сужение на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел функций $\psi_i^{(j)}(v_i) \in \mathfrak{M}$.

Каждой функции $\psi(v) \in \mathfrak{M}$ сопоставим пару функций

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\psi(t)\right) \quad \text{и} \quad \mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

где $\psi^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $\psi(\cdot)$, и выделим следующие подмножества (см. [1, с. 159, 160, 165, 186]):

$$\mathfrak{M}_0 = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \mu(t) \le K\big\}, \quad K \equiv \mathrm{const} > 0,$$

$$\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_0, \qquad F = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \eta'(t) \le K\big\}.$$

Пусть, далее, $\mathcal{T}_{\mu,\,n}$ — множество функций $t_{\mu,\,n}(x) \in L$, которые являются тригонометрическими полиномами порядка $n_i - 1$, $i \in \mu$:

$$t_{\mu,\,n}(x) = \sum_{k^{\mu}=0}^{(n-1)^{\mu}} \sum_{\gamma^{\mu} \in \mathbb{R}^{|\mu|}} a_{k^{\mu}}(x^{c_{\mu}},\, \gamma^{\mu}) \prod_{i\in\mu} \cos\left(k_i\, x_i - \gamma_i \frac{\pi}{2}\right),$$

$\gamma^{\mu} = (\gamma_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_{|\mu|}})$, причем γ_{j_k} принимают значения, равные нулю либо единице, $a_{k^{\mu}}(\cdot)$ — функции переменных x_i, $i \in \mu$, суммируемые на кубе периодов $T^{|c\,\mu|}$,

$$E_{\mu,\,n}(g) = \inf_{t_{\mu,\,n} \in \mathcal{T}_{\mu,\,n}} \big\|g(x) - t_{\mu,\,n}(x)\big\|_C, \qquad \|g\|_C = \max_x |g(x)|,$$

— наилучшее приближение функции $g(x)$ посредством функций $t_{\mu,\,n} \in \mathcal{T}_{\mu,\,n}$ в равномерной метрике и

$$E_{\mu,\,n}(g) = \inf_{t_{\mu,\,n} \in \mathcal{T}_{\mu,\,n}} \big\|g(x) - t_{\mu,\,n}(x)\big\|_L$$

— наилучшее приближение $g \in L$ в интегральной метрике.

2. Приближения суммами Фурье. Здесь излагаются результаты по приближению функций из множеств $C^{\overline{\psi}}C$ прямоугольными суммами Фурье, когда $\pm\psi_i^{(j)} \in F$, $j = 1, 2$, а также из множеств $L^{\overline{\psi}}$ в интегральной метрике в случае $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$.

В принятых обозначениях имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\pm\psi_i^{(j)} \in F$, $j = 1, 2$, $i = 1, \ldots, m$, *и выполняются условия*

$$0 < K_1^{(i)} \le \frac{\eta_i(\psi_i^{(1)}; t_i) - t_i}{\eta_i(\psi_i^{(2)}; t_i) - t_i} \le K_2^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Тогда для любой $f \in C^{\overline{\psi}}C$

$$\big\|\rho_n(f; x)\big\|_c \le \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,\,n}(f^{\overline{\psi}_{\mu}}) \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i) \ln^{+}(\eta_i(n_i) - n_i) + b_n^{\overline{\psi}}(f), \tag{7}$$

где

$$\left\|b_n^{\overline{\psi}}(f)\right\| \le K\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\sum_{\substack{\widetilde{\mu}\subset\mu\\ \widetilde{\mu}\neq\mu}}\prod_{i\in\widetilde{\mu}}\ln^+(\eta_i(n_i)-n_i),$$

$\eta_i(n_i)$ *есть либо* $\eta_i\big(\psi_i^{(1)};n_i\big)$, *либо* $\eta_i\big(\psi_i^{(2)};n_i\big)$, K — *величина, равномерно ограниченная по* $n\in\mathbb{N}^m$, $f\in C^{\overline{\psi}}C$, $\ln^+ x=\max(\ln x,0)$.

При $m=1$ утверждение теоремы 1 переходит в соответствующее утверждение из [1, с. 266], где показано, что в этом случае неравенство (7) асимптотически точно на всем классе $C^{\overline{\psi}}C$, а также на ряде важных подмножеств из $C^{\overline{\psi}}C$. Аналог теоремы 1 в интегральной метрике содержится в [3].

Доказательству теоремы 1 предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 [2]. *Если* $f\in C^{\overline{\psi}}C$, $\pm\psi_i^{(1)}\in\mathfrak{M}$, $\pm\psi_i^{(2)}\in\mathfrak{M}'$, $i=1,\ldots,m$, $\Delta_\mu(x)\equiv\equiv f^{\overline{\psi}_\mu}(x)-t_{\mu,n}(x)$, $t_{\mu,n}\in\mathcal{T}_{\mu,n}$, *то для любых* $x\in\mathbb{R}^m$ *и* $n\in\mathbb{N}^m$

$$\rho_n(f;x)=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k}F_\mu(\Delta_\mu;x)+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k}P_\mu(\Delta_\mu;x)+$$

$$+\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k}Q_\mu(\Delta_\mu;x); \tag{8}$$

если $f\in L^{\overline{\psi}}$, *то равенство* (8) *имеет место почти в каждой точке* x, *где*

$$F_\mu(\Delta_\mu;x)=\int\limits_{\mathbb{R}^{|\mu|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu}[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\,n_i;\,t_i)_0+\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\,n_i;\,t_i)_1]dt^\mu,$$

$$P_\mu(\Delta_\mu;x)=(2\pi)^{-|\mu|}\prod_{i\in\mu}\overline{\psi}_i(n_i)\int\limits_{T^{|\mu|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu}\sin(n_i\,t_i+\gamma_{n_i})dt^\mu,$$

$$\gamma_{n_i}=\operatorname{arctg}\frac{\psi_i^{(2)}(n_i)}{\psi_i^{(1)}(n_i)},$$

$$Q_\mu(\Delta_\mu;x)=(2\pi)^{-|\mu''|}\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\int\limits_{\mathbb{R}^{|\mu'|}}\int\limits_{T^{|\mu''|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\times$$

$$\times\prod_{i\in\mu''}\sin(n_i\,t_i+\gamma_{n_i})\prod_{i\in\mu'}\Big[\mathcal{J}_2\big(\psi_i^{(1)};\,n_i;\,t_i\big)_0+\mathcal{J}_2\big(\psi_i^{(2)};\,n_i;\,t_i\big)_1\Big]dt^\mu,$$

$$\mu=\mu'\cup\mu'',\qquad \mu'\cap\mu''=\varnothing.$$

Лемма 2. *Пусть* $\Delta\in C$, $\pm\psi^{(j)}\in F$, $j=1,2$, *и, кроме того, выполняются условия* (6). *Тогда для любого* $n\in\mathbb{N}$

$$\left\|\int\limits_{\mathbb{R}}\Delta(x-t)\Big[\mathcal{J}_2(\psi^{(1)};\,n;\,t)_0+\mathcal{J}_2(\psi^{(2)};\,n;\,t)_1\Big]\,dt\right\|_C\le\|\Delta\|_C\,\delta\big(n;\,\overline{\psi}\big),$$

где

$$\delta(n;\overline{\psi}) \equiv \left(\frac{4}{\pi^2}\ln^+(\eta(n)-n)+K\right)\overline{\psi}(n),$$

$\overline{\psi}(n) = \Big((\psi^{(1)}(n))^2+(\psi^{(2)}(n))^2\Big)^{1/2}$, $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi^{(1)};\, n)$, *либо* $\eta(\psi^{(2)};\, n)$, $K>0$ — *величина, равномерно ограниченная по* $\Delta \in C$, *и* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству теоремы 10.1 (см. [1, с. 267, с. 279–285]).

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $\pm\psi_i^{(j)} \in F,\ j=1,2,\ i=1,\ldots,s,\ \mu = \{1,\ldots,s\}$ и выполняются условия (6).

При фиксированном натуральном $s \le m$ рассмотрим выражение

$$\mathcal{J}_S(x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^S} \Delta_\mu(x-t)\prod_{i=1}^{s}\Big[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\, n_i;\, t_i)_0+\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, n_i;\, t_i)_1\Big]\,dt^\mu =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{S-1}} \Delta_\mu(x-t)\prod_{i=2}^{s}[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\, n_i;\, t_i)_0+\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, n_i;\, t_i)_1]\,dt^{\mu\setminus\{1\}}\times\right.$$

$$\left.\times\Big[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\, n_i;\, t_i)_0+\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, n_i;\, t_i)_1\Big]\right)dt_1.$$

Применяя лемму 2, находим

$$\big\|\,\mathcal{J}_s(x)\big\|_C \le$$

$$\le \left\|\int\limits_{\mathbb{R}^{S-1}} \Delta_\mu(x-t)\prod_{i=2}^{S}\Big[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\, n_i;\, t_i)_0+\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, n_i;\, t_i)_1\Big]\,dt^{\mu\setminus\{1\}}\right\|_C\times$$

$$\times\delta(n_1,\,\overline{\psi}_1) \le \|\Delta_\mu\|_C\prod_{i=1}^{s}\delta(n_i,\,\overline{\psi}_i).$$

Поэтому для величин $F_\mu(\Delta_\mu;x)$ и $Q_\mu(\Delta_\mu;x)$ получаем

$$\big\|F_\mu(\Delta_\mu;\, x)\big\|_C =$$

$$= \left\|\int\limits_{\mathbb{R}^{|\mu|}} \Delta_\mu(x-t^\mu)\prod_{i\in\mu}\Big[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\, n_i;\, t_i)_0+\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, n_i;\, t_i)_1\Big]\,dt^\mu\right\|_C \le$$

$$\le \|\,\Delta_\mu\,\|_C\prod_{i\in\mu}\delta(n_i,\,\overline{\psi}_i). \tag{9}$$

Аналогично,

$$\big\|Q_\mu(\Delta_\mu;\, x)\big\|_C = (2\pi)^{-|\mu''|}\prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i)\left\|\int\limits_{R^{|\mu'|}}\int\limits_{T^{|\mu''|}}\Delta_\mu(x-t^\mu)\times\right.$$

$$\times \prod_{i\in\mu''} \sin(n_i\, t_i + \gamma_{n_i}) \prod_{i\in\mu'} \Big[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\, n_i;\, t_i)_0 + \mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, n_i;\, t_i)_1\Big] dt^{\mu} \Bigg\|_C =$$

$$= (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \Bigg\| \int\limits_{R^{|\mu'|}} \Bigg(\int\limits_{T^{|\mu''|}} \Delta_\mu(x - t^\mu) \prod_{i\in\mu} \sin(n_i\, t_i + \gamma_{n_i}) \Bigg) dt^{\mu''} \times$$

$$\times \prod_{i\in\mu'} \Big[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\, n_i;\, t_i)_0 + \mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, n_i;\, t_i)_1\Big] dt^{\mu'} \Bigg\|_C \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \Bigg\| \int\limits_{T^{|\mu''|}} \Delta_\mu(x - t^\mu) \prod_{i\in\mu''} \sin(n_i\, t_i + \gamma_{n_i}) dt^{\mu''} \Bigg\|_C \prod_{i\in\mu'} \delta(n_i,\, \overline{\psi}_i),$$

$$\delta(n_i,\, \overline{\psi}_i) \equiv \left(\frac{4}{\pi^2} \ln^+(\eta(n_i) - n_i) + K_i \right) \overline{\psi}_i(n_i).$$

Отсюда

$$\big\|Q_\mu(\Delta_\mu;\, x)\big\|_C \leq \|\Delta_\mu\|_C \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \prod_{i\in\mu'} \delta(n_i,\, \overline{\psi}_i). \tag{10}$$

Далее, замечая, что

$$\big\|P_\mu(\Delta_\mu; x)\big\|_C \leq (2\pi)^{-|\mu|} \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i) \Bigg\| \int\limits_{T^{|\mu|}} \Delta_\mu(x - t^\mu) \prod_{i\in\mu} \sin(n_i\, t_i + \gamma_{n_i}) dt^{\mu} \Bigg\|_C \leq$$

$$\leq \|\Delta_\mu\| \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i), \tag{11}$$

и объединяя (9) – (11), с учетом равенства (8) имеем

$$\big\|\rho_n(f; x)\big\|_c \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|\mu|=k} \|F_\mu(\Delta_\mu; x)\|_C + \sum_{|\mu|=k} \|P_\mu(\Delta_\mu; x)\|_C \right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \sum_{|\mu|=k} \big\|Q_\mu(\Delta_\mu;\, x)\big\|_C \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{|\mu|=k} \|\Delta_\mu\|_C \prod_{i\in\mu} \delta(n_i;\, \overline{\psi}_i) + \sum_{|\mu|=k} \|\Delta_\mu\|_C \prod_{i\in\mu} \overline{\psi}_i(n_i) \right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} \sum_{|\mu|=k} \|\Delta_\mu\|_C \prod_{i\in\mu''} \overline{\psi}_i(n_i) \prod_{i\in\mu'} \delta\big(n_i;\, \overline{\psi}_i\big).$$

Отсюда, выбирая $t^*_{\mu,n}(x)$ так, чтобы

$$\left\| f^{\overline{\psi}_\mu}(x) - t^*_{\mu,n}(x) \right\|_C = E_{\mu,\,n}(f^{\overline{\psi}_\mu}),$$

и принимая во внимание определение величины $\delta(n,\,\overline{\psi})$, получаем утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L^{\overline{\psi}}$, $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1,\ldots,m$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}^m$

$$\left\| \rho_n(f;x) \right\|_L \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,\,n}(f^{\overline{\psi}_\mu}) \prod_{i\in\mu} \mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}_i}) + b_n^{\overline{\psi}}(f)_L,$$

где

$$\mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}}) \equiv \frac{2}{\pi}\int\limits_{n_i}^{\infty} \frac{|\psi_i^{(2)}(t_i)|}{t_i} dt_i + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}_i(n_i)\ln n_i,$$

$$b_n^{\overline{\psi}}(f)_L = \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,\,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_L \sum_{\widetilde{\mu}\subset\mu}\prod_{i\in\widetilde{\mu}} \mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}}) \prod_{i\in\mu\setminus\widetilde{\mu}} K_i\,\overline{\psi}_i(n_i) +$$

$$+\sum_{k=2}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,\,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_L \prod_{i\in\mu''}\overline{\psi}_i(n_i) \sum_{\widetilde{\mu}\subset\mu'}\prod_{i\in\widetilde{\mu}} \mathcal{E}_{n_i}(L^{\overline{\psi}}) \prod_{i\in\mu'\setminus\widetilde{\mu}} K_i\,\overline{\psi}_i(n_i) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{|\mu|=k} E_{\mu,\,n}(f^{\overline{\psi}_\mu})_L \prod_{i\in\mu} K_i\,\overline{\psi}_i(n_i),$$

величины μ', μ'' *имеют прежний смысл,* $K_i > 0$ — *величины, равномерно ограниченные по* $n \in \mathbb{N}^m$ *и* $f \in L^{\overline{\psi}}$.

При $m = 1$ утверждение теоремы 2 переходит в соответствующее утверждение из работы [1, с. 286].

Анализ доказательства теоремы 8.2 из [1, с. 252] позволяет сформулировать такой аналог леммы 2.

Лемма 3. *Пусть* $f \in L^{\overline{\psi}}$, $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}'_0$, $i = 1,\ldots,m$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}} \Delta_\mu(x-t)\Big[\mathcal{J}_2(\psi^{(1)};\,n;\,t)_0 + \mathcal{J}_2(\psi^{(2)};\,n;\,t)_1\Big]dt \right\|_L \le \|\Delta_\mu\|_L\,\overline{\delta}\big(n,\,\overline{\psi}\big),$$

где

$$\overline{\delta}(n,\,\overline{\psi}) \equiv \frac{2}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{|\psi^{(2)}(t)|}{t}dt + \frac{4}{\pi^2}\overline{\psi}(n)\ln n + K\,\overline{\psi}(n) \equiv \mathcal{E}_n(L^{\overline{\psi}}) + K\,\overline{\psi}(n),$$

$K > 0$ — *величина, равномерно ограниченная по* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L^{\overline{\psi}}$.

***Доказательство теоремы* 2** базируется на лемме 1 в случае $f \in L^{\overline{\psi}}$, а также на лемме 3 и проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 из работы [2] с использованием известного неравенство вида

$$\left\| \int g(x-t)K(t)dt \right\|_L \leq \|g\|_L \|K\|_L.$$

3. φ-Сильные средние. Положим $\rho_{\mu,n}(f;x) = f(x) - S_{\mu,n}(f;x)$, где $S_{\mu,n}(f;x)$ — прямоугольные суммы Фурье ряда (4) по переменным x_i, $i \in \mu \subset \overline{m}$. При $\mu = \overline{m}$, $S_{\overline{m},n}(f;x) = S_n(f;x)$, $\rho_{\overline{m},n}(f;x) = \rho_n(f;x)$. Пусть, далее, $\mu \subset \mu_0 \subset \overline{m}$, $\widetilde{\mu} = \mu_0 \setminus \mu$, следовательно, $k^{\mu_0} = k^{\mu} + k^{\widetilde{\mu}}$;

$$\nu_0(n,\, \mu) = \Big\{ k^{\mu} \colon\; k_i \in [\,n_i,\, 2n_i\,],\; i \in \mu \Big\}.$$

Обозначим через Φ_m множество неубывающих на $[\,0, +\infty)$ функций $\varphi(\cdot)$ таких, что

$$\lim_{u \to 0+} \varphi(u) = \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(u) > 0, \quad u > 0,$$

причем для любого $\varphi \in \Phi_m$ существуют положительные числа $a = a(\varphi)$, $b = b(\varphi)$ такие, что

$$\varphi(2u) \leq a\, \varphi(u), \quad u \in [\,0, 1\,],$$

$$\varphi(u) \leq A\, \exp(bu^{1/m}), \qquad u \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad A \equiv \mathrm{const} > 0.$$

Определение множества Φ_m при $m = 1$ введено в работе [5], а при $m > 1$ оно содержится, например, в [6].

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in \Phi_m$, $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$ $\forall i \in \overline{m}$, $\mu \subset \mu_0 \subset \overline{m}$, μ_1 — произвольное подмножество μ_0, $\mu_1' = \mu_1 \cap \mu$, $\mu_2 = \mu_1 \setminus \mu$ и*

$$d(k^{\mu_2}) \equiv \prod_{i \in \mu_2} c_{k_i}(\overline{\psi}_i) \ln k_i\, e.$$

Тогда для любых $f \in C^{\overline{\psi}}C$ и $n \in \mathbb{N}^m$

$$\prod_{i \in \mu} (n_i + 1)^{-1} \sum_{k^{\mu} \in \nu_0(n,\, \mu)} \varphi\big(|\rho_{\mu_0,\, k}(f;x)|\big) \leq$$

$$\leq K\, \varphi \left(\sum_{\mu_1 \subset \mu_0} E_{\mu_1,\, n^{\mu_1'}} + k^{\mu_2}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i \in \mu_1'} c_{n_i}(\overline{\psi}_i)\, d(k^{\mu^2}) \right), \tag{12}$$

где

$$c_{n_i}(\overline{\psi}_i) \equiv \overline{\psi}_i(n_i) + \int_{n_i}^{\infty} \frac{\big|\psi_i^{(2)}(t_i)\big|}{t_i}\, dt_i,$$

$K = K(\varphi,\, d,\, m)$ — величина, зависящая от указанных параметров и равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}^m$ и $f \in C^{\overline{\psi}}C$.

Полагая в условиях теоремы 3 $\mu = \mu_0$, в силу того, что $\mu_1 \subset \mu$, $\mu_1' = \mu_1$, $\mu_2 = \varnothing$, получаем такое утверждение.

***Следствие* 1.** *Пусть $\varphi \in \Phi_m$, $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$ $\forall i \in \overline{m}$. Тогда для любых $f \in C^{\overline{\psi}}C$, $n \in \mathbb{N}^m$ и $\mu \subset \overline{m}$*

$$\prod_{i\in\mu}(n_i+1)^{-1} \sum_{k_\mu \in \nu_0(n,\,\mu)} \varphi(\,|\rho_k(f;x)|\,) \le K\,\varphi\left(\sum_{\mu_1\subset\mu} E_{\mu_1,\,n}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i\in\mu_1'} c_{n_i}(\overline{\psi}_i)\right).$$

Теорема 3 при $m=1$ доказана в [7]. Некоторые важные частные случаи теоремы 3 известны и содержатся в работе [6]. Доказательству теоремы 3 предпошлем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $\nu(n,\,\mu)$ — произвольное подмножество множества $\nu_0(n,\,\mu)$, r_i — количество элементов ортогональной проекции $\nu(n,\,\mu)$ на i-ю $(i\in\mu)$ координатную ось. Введем в рассмотрение сильные средние вида

$$h_p\big(f;\,x;\,\nu(n,\,\mu);\,k^{\widetilde{\mu}}\big) = \left\{\prod_{i\in\mu} r_i^{-1} \sum_{k^\mu\in\nu(n,\,\mu)} \big|\rho_{\mu_0,\,k}(f;x)\big|^p\right\}^{1/p}, \quad p>0.$$

Лемма 4. *Пусть $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$, $i\in\mu$, $\tau\subset\mu_0\subset\overline{m}$, μ_1 — произвольное подмножество μ_0, $\tau_1=\mu\cap\tau$, $\widetilde{\mu}=\mu_1\setminus\tau$. Тогда для любых $f\in C^{\overline{\psi}}C$, $p>0$ и $n\in\mathbb{N}^m$*

$$h_p(f;\,x;\,\nu(n,\,\mu);\,k^{\mu_0\setminus\tau}) \le K \sum_{\mu_1\subset\mu_0} E_{\mu_1,\,n}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i\in\tau_1} c_{n_i}(\overline{\psi}_i)\,\ln\frac{n_i\,e}{r_i} d(k^\mu). \tag{13}$$

Доказательство леммы 4 проведем в несколько этапов. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$, $i\in\mu\subset\overline{m}$. Тогда для любых $g\in C$, $p>0$ и $n\in\mathbb{N}^m$*

$$\mathbb{R}_p(g;\,x;\,\nu(n,\,\mu)) \equiv \left\{\prod_{i\in\mu} r_i^{-1} \sum_{k^\mu\in\nu(n,\,\mu)} |F_\mu(g;\,x;\,k^\mu)|^p\right\}^{1/p} \le$$

$$\le K\,\|g\|_c \prod_{i\in\mu} c_{n_i}\big(\overline{\psi}_i\big)\,\ln\frac{n_i\,e}{r_i}, \tag{14}$$

где $F_\mu(\cdot)$ — величина, определенная в п. 2.

Доказательство. В силу известного неравенства для средних величин $a\,\mathbb{R}_p(g;x;\nu(n,\mu))$ не убывает с возрастанием показателя p. Поэтому полагаем $p\ge 2$ и будем считать, что $\mu=\{1,2,\ldots,s\}$, $\mu\subset\overline{m}$.

Для представления величины $F_1(\cdot)$ используем равенства для интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g(x-t)\mathcal{J}_2(\psi_1^{(1)};\,n;\,t)_0\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} g(x-t)\mathcal{J}_2(\psi_1^{(1)};\,n;\,t)_1\,dt, \quad n\in\mathbb{N}, \quad x\in\mathbb{R},$$

полученные в [1, с. 221 – 230].

Будем иметь

$$F_1(g;\,x;\,k_1)=\int\limits_{\mathbb{R}} g(x-t^{\{1\}})\Big[\mathcal{J}_2(\psi_1^{(1)};\,k_1;\,t_1)_0+\mathcal{J}_2(\psi_1^{(2)};\,k_1;\,t_1)_1\Big]dt_1=$$

$$=\int\limits_{|t_1|\le\frac{a_1}{k_1}} g(x-t^{\{1\}})[\mathcal{J}_2(\psi_2^{(1)};\,k_1;\,t_1)_1\,dt_1+$$

$$+\frac{\overline{\psi}_1(k_1)}{\pi}\int\limits_{\frac{a_1}{k_1}\le|t_1|\le q_1\pi} g(x-t^{\{1\}})\,t_1^{-1}\sin(k_1t_1+\theta_{k_1})dt_1+$$

$$+\frac{\overline{\psi_1}(k_1)}{\pi}\int\limits_{T} g(x-t^{\{1\}})\,A_{q_1}(t_1)\,\sin(k_1t_1+\theta_{k_1})dt_1+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t_1|\le\frac{a_1}{k_1}} g(x-t^{\{1\}})\mathcal{J}_3(\psi_2^{(1)};\,k_1;\,t_1)_1\,dt_1-$$

$$-\frac{\psi_1^{(1)}(k_1)}{\pi}\int\limits_{|t_1|\le\frac{a_1}{k_1}} g(x-t^{\{1\}})\frac{\sin k_1\,t_1}{t_1}dt_1-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} g(x-t^{\{1\}})\mathcal{J}_3(\psi_1^{(1)};\,k_1;\,t_1)_0\,dt_1\equiv$$

$$\equiv\sum_{j_1=1}^{6}\chi_{j_1}(g;\,x;\,k_1), \tag{15}$$

где

$$A_{q_1}(t_1)=\sum_{j_1=\frac{q_1+1}{2}}^{\infty}\frac{2t_1}{t_1^2-(2\pi\,j)^2},$$

q_1 — нечетное число из условия $(q_1-2)\,\pi<\dfrac{a_1}{k_1}<q_1\,\pi$,

$$\mathcal{J}_3(\psi_1^{(1)};\,k_1;\,t_1)_0=\frac{1}{t_1}\int\limits_{k_1}^{\infty}(\psi_1^{(1)}(v))\,\sin vt_1\,dv,$$

$$\mathcal{J}_3(\psi_1^{(2)};\,k_1;\,t_1)_1=\frac{1}{t_1}\int\limits_{k_1}^{\infty}(\psi_1^{(1)}(v))\,\cos vt_1\,dv,$$

$$\cos\,\theta_{k_1}=\frac{\psi_1^{(1)}\,(k_1)}{\overline{\psi}_1^{(1)}\,(k_1)},\qquad \sin\,\theta_{k_1}=\frac{\psi_1^{(2)}\,(k_1)}{\overline{\psi}_1^{(1)}\,(k_1)},\quad a_1>0.$$

В дальнейшем числа a_i, $i=1,\ldots,m$, выбираются из условий

$$\operatorname{sign} \mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, k_i;\, t_i)_1 = \operatorname{sign}(\psi_i^{(2)}(k_i), \quad t_i \in \left(0, \frac{a_i}{k_i}\right).$$

Тогда на основании неравенства [1, с. 236]

$$\int\limits_{|t_i| \le \frac{a}{k_i}} \left|\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, k_i;\, t_i)_1\right| dt_i \le \frac{2}{\pi} \int\limits_{k_i}^{\infty} \frac{|\psi_i^{(2)}\,(t_i)|}{t_i}\, dt_i + O(1)\overline{\psi}_i(k_i) \tag{16}$$

и в силу соотношений [1, с. 223, 227]

$$\int\limits_{|t_1| \ge \frac{a_1}{k_1}} \left|\mathcal{J}_3(\psi_1^{(2)};\, k_1;\, t_1)_1\right| dt_1 = O(1)|\psi_1^{(2)}(k_1)|, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\mathcal{J}_3(\psi_1^{(1)};\, k_1;\, t_1)_0\right| dt_1 = O(1)|\psi_1^{(1)}(k_1)| \tag{18}$$

заключаем, что все интегралы в (15) абсолютно сходятся.

Стало быть, $F_1(g;\, x;\, k_1)$ — ограниченная функция. Точно так же заключаем, что и функции

$$F_2(g;\, x;\, k^{\{1,2\}}) = F_2(F_1;\, x;\, k_2) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} F_1(g;\, x - t^{\{2\}};\, k_2)\Big[\mathcal{J}_2(\psi_2^{(1)};\, t_2;\, k_2)_0 + \mathcal{J}_2(\psi_2^{(2)};\, k_2;\, t_2)_1\Big]\, dt_2, \ldots,$$

$$F_s(g;\, x;\, k^{\mu}) = F_s(F_{s-1};\, x;\, k_s) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} F_{s-1}(g;\, x - t^{\{s\}};\, k^{\mu_1})\Big[\mathcal{J}_2(\psi_s^{(1)};\, t_s;\, k_s)_0 + +\mathcal{J}_2(\psi_s^{(2)};\, k_s;\, t_s)_1\Big]\, dt_s,$$

$$\mu_1 = \{1, \ldots, s-1\},$$

ограничены. Представляя интеграл $F_2(\cdot)$ в виде (16), находим

$$F_2(F_1;\, x;\, k_2) = \sum_{j_2=1}^{6} \chi_{j_2}(F_1;\, x;\, k_2),$$

или с учетом (15)

$$F_2(F_1;\, x;\, k_2) = \sum_{j_1=1}^{6} \sum_{j_2=1}^{6} \chi_{j_1}(\chi_{j_2}(g;\, x;\, k_2);\, x;\, k_1) =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{6} \sum_{j_2=1}^{6} \chi_{j_1 j_2}(g;\, x;\, k_1;\, k_2).$$

Продолжая этот процесс, на шаге s получаем

$$F_s(g;\,x;\,k^{\mu}) =$$

$$= \int\limits_R \ldots \int\limits_R g(x-t^{\mu}) \prod_{i\in\mu} \Big[\mathcal{J}_2(\psi_i^{(1)};\,t_i;\,k_i)_0 + \mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\,t_i;\,k_i)_1 \Big] dt_1 \ldots dt_s =$$

$$= \sum_{j_1=1}^{6} \ldots \sum_{j_s=1}^{6} \chi_{j_1\ldots j_s}(g;\,x;\,k^{\mu}) =$$

$$= \sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{6e^{\mu}} \chi_{j^{\mu}}(g;\,x;\,k^{\mu}), \tag{19}$$

где $\chi_{j^{\mu}}(\cdot) = \chi_{j_1}(\ldots(\chi_{j_s}(\cdot))\ldots)$, $e=(1,\ldots,1)$.

Применяя неравенство Минковского, с учетом (19) имеем

$$\mathbb{R}_p(g;\,x;\,\nu(n,\,\mu)) \le \sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{6e^{\mu}} \left\{ \prod_{i\in\mu} r_i^{-1} \sum_{k^{\mu}\in\nu(n,\,\mu)} |\chi_{j^{\mu}}(g;\,x;\,k^{\mu})|^p \right\}^{1/p} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{6e^{\mu}} \omega_{j^{\mu},\,p}(g;\,x;\,n^{\mu}). \tag{20}$$

Обозначим через μ_σ множество индексов координат точки j^{μ}, равных σ, $\sigma = 1,\ldots,6$, $\mu = \bigcup\limits_{\sigma=1}^{6} \mu_\sigma$. Рассмотрим величину $\omega_{j^{\mu},\,p}(\cdot)$ с индексом j^{μ}, для которого все $\mu_\sigma \ne \varnothing$, и положим

$$H_1 = \prod_{i\in\mu_1} \left\{ t_i:\,|t_i| \le \frac{a_i}{k_i} \right\}, \qquad H_2 = \prod_{i\in\mu_2} \left\{ t_i:\,|t_i| \in \left[\,\frac{a_i}{k_i};\,q_i\,\pi\,\right] \right\},$$

$$H_3 = T^{|\mu_3|}, \qquad H_4 = \prod_{i\in\mu_4} \left\{ t_i:\,|t_i| \ge \frac{a_i}{k_i} \right\},$$

$$H_5 = \prod_{i\in\mu_5} \left\{ t_i:\,|t_i| \le \frac{a_i}{k_i} \right\}, \qquad H_6 = R^{|\mu_6|},$$

где $\prod\limits_{i\in\mu_i} E_i$ — произведение множеств E_i.

Применяя теорему Фубини и учитывая ограниченность величин $A_{q_i}(\cdot)$, получаем

$$\omega_{j^{\mu},\,p}(g;\,x;\,n^{\mu}) \le$$

$$\le K \prod_{i\in\mu_{2,3,5}} \overline{\psi}_i(n_i) \left\{ \prod_{i\in\mu} r_i^{-1} \sum_{k^{\mu}\in\nu(n,\,\mu)} \left[\int\limits_{H_1} \prod_{i\in\mu_1} \big|\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\,t_i;\,k_i)_1\big| dt^{\mu_1} \times \right.\right.$$

$$\times \int\limits_{H_3} dt^{\mu_3} \int\limits_{H_4} \prod_{i\in\mu_4} \big|\mathcal{J}_3(\psi_i^{(2)};\,k_i;\,t_i)_1\big| dt^{\mu_4} \int\limits_{H_5} \prod_{i\in\mu_5} \left| \frac{\sin k_i t_i}{t_i} \right| dt^{\mu_5} \times$$

$$\times \int\limits_{H_6} \prod_{i\in \mu_6} \left|\mathcal{J}_3(\psi_i^{(1)}; k_i; t_i)_0\right| dt^{\mu_6} \int\limits_{H_2} g(x-t^{\mu}) \prod_{i\in \mu_2} t_i^{-1} \sin(k_i t_i + \theta_{k_i}) dt^{\mu_2} \Bigg]^p \Bigg\}^{1/p} \equiv$$

$$\equiv K \prod_{i\in\mu_{2,3,5}} \overline{\psi}_i(n_i)\omega^{(1)}_{j^{\mu}, p}(g;\, x;\, n^{\mu}). \qquad (21)$$

На основании известного обобщенного неравенства Минковского

$$\left\{\sum_k \left(\int f_k(x)dx\right)^p\right\}^{1/p} \le \int \left(\sum_k f_k^p(x)\right)^{1/p} dx, \quad f_k(\cdot) > 0, \qquad (22)$$

полагая $p > 1$ и $\widetilde{\mu_2} = \mu \setminus \mu_2$, имеем

$$\omega^{(1)}_{j^{\mu}, , p}(g;\, x;\, n^{\mu}) \le \left\{ \prod_{i\in \mu} r_i^{-1} \sum_{k^{\widetilde{\mu_2}} \in \nu(n,\, \widetilde{\mu_2})} \left(\int\limits_{H_1} \prod_{i\in\mu_1} \left|\mathcal{J}_2(\psi_i^{(2)};\, k_i;\, t_i)_1\right| dt^{\mu_1} \times \right.\right.$$

$$\times \int\limits_{H_3} dt^{\mu_3} \int\limits_{H_4} \prod_{i\in \mu_4} \left|\mathcal{J}_3(\psi_i^{(2)};\, k_i;\, t_i)_1\right| dt^{\mu_4} \int\limits_{H_5} \prod_{i\in \mu_5} \left|\frac{\sin k_i t_i}{t_i}\right| dt^{\mu_5} \times$$

$$\times \int\limits_{H_6} \prod_{i\in \mu_6} \left|\mathcal{J}_3(\psi_i^{(1)};\, k_i;\, t_i)_0\right| dt^{\mu_6} \times$$

$$\left.\left. \times \left\{ \sum_{k^{\mu_2} \in \nu(n,\, \mu_2)} \left| \int\limits_{H_2} g(x-t^{\mu}) \prod_{i\in \mu_2} \frac{\sin(k_i t_i + \theta_{k_i})}{t_i} dt^{\mu_2} \right|^p \right\}^{1/p} \right)^p \right\}^{1/p}.$$

Пусть $\mu_2 = \{i_1,\, i_2, \ldots, i_d\}$,

$$Q_{i_1}(g;\, x;\, k_{i_1}) = \int\limits_{a_{i_1}/k_{i_1} \le |t_{i_1}| \le q_{i_1}\pi} g(x - t^{\widetilde{\mu_2}} - t^{\{i_1\}}) t_{i_1}^{-1} \sin(k_{i_1}\, t_{i_1} + \theta_{k_{i_1}}) dt_{i_1}$$

и

$$Q_{i_j}(Q_{i_{j-1}};\, x;\, k_{i_j}) = \int\limits_{a_{i_j}/k_{i_j} \le |t_{i_1}| \le q_{i_j}\pi} Q_{i_{j-1}}(x - t^{\{i_j\}}) t_{i_j}^{-1} \sin(k_{i_j}\, t_{i_j} + \theta_{k_{i_j}}) dt_{i_j} =$$

$$= \int\limits_{H_2} g(x-t^{\mu}) \prod_{i\in \mu_2} t_i^{-1} \sin(k_i t_i + \theta_{k_i}) dt^{\mu_2}, \quad j = \overline{1, d}. \qquad (23)$$

Величину $Q_{i_1}(g;\, x;\, k_1)$ представим в виде

$$Q_{i_1}(g;\, x;\, k_{i_1}) = \left(\int\limits_{a_{i_1}/k_{i_1} \le |t_{i_1}| \le r_{i_1}^{-1}} + \int\limits_{\pi \le |t_{i_1}| \le q_{i_1}\pi} + \int\limits_{r_{i_1}^{-1} \le |t_{i_1}| \le \pi} \right) \times$$

$$\times g(x - t^{\widetilde{\mu_2}} - t^{\{i_1\}}) t_{i_1}^{-1} \sin(k_{i_1} t_{i_1} + \theta_{k_{i_1}}) dt_{i_1} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j_{i_1}=1}^{3} \sigma_{j_{i_1}}(g;\, x;\, k_{i_1}). \tag{24}$$

Учитывая это равенство, на шаге d находим

$$Q_{i_d}(Q_{i_{d-1}};\, x;\, k_{i_d}) = \sum_{j^{\mu_2}=e^{\mu_2}}^{3e^{\mu_2}} \sigma_{j^{\mu_2}}(g;\, x;\, k^{\mu_2}), \tag{25}$$

где $\sigma_{j^{\mu_2}}(\cdot) = \sigma_{j_{i_d}}\big(\ldots(\sigma_{j_{i_1}}(\cdot))\ldots\big)$.

Принимая во внимание (23) – (25), получаем

$$\omega_{j^{\mu}}^{(1,1)}(g;\, x;\, n^{\mu}) \equiv$$

$$\equiv \left\{ \sum_{k^{\mu_2} \in \nu(n,\, \mu_2)} \left| \int_{H_2} g(x - t^{\mu}) \prod_{i \in \mu_2} t_i^{-1} \sin(k_i t_i + \theta_{k_i}) dt^{\mu_2} \right|^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \sum_{j^{\mu}=e^{\mu_2}}^{3e^{\mu_2}} \left\{ \sum_{k^{\mu_2} \in \nu(n,\, \mu_2)} |\sigma_{j^{\mu_2}}(g;\, x;\, k^{\mu_2})|^p \right\}^{1/p} \equiv$$

$$\equiv \sum_{j^{\mu_2}=e^{\mu_2}} \alpha_{j^{\mu_2}}(g;\, x;\, n^{\mu_2}). \tag{26}$$

Обозначим через η_σ множество индексов координат точки j^{μ_2}, равных σ, $\sigma = 1, 2, 3$; $\mu_2 = \bigcup_{\sigma=1}^{3} \eta_\sigma$. Пусть множество η_σ не пусто и

$$G_1 = \prod_{i \in \eta_1} \left\{ t_i : |t_i| \in \left[\frac{a_i}{k_i},\, r_i^{-1} \right] \right\}, \qquad G_2 = \prod_{i \in \eta_2} \big\{ t_i : |t_i| \in [\pi, q_i \pi] \big\},$$

$$G_3 = \prod_{i \in \eta_3} \big\{ t_i : |t_i| \in [r_i,\, \pi] \big\}, \quad \eta_0 = \mu_2 \setminus \eta_3.$$

Вследствие (22) имеем

$$\alpha_{j\mu_2}(g;\, x;\, n^{\mu_2}) \leq \left\{ \sum_{k^{\eta_0} \in \nu(n,\, \eta_0)} \left| \int_{G_1} \prod_{i \in \eta_1} |t_i^{-1}| dt^{\eta_1} \int_{G_2} dt^{\eta_2} \right. \right. \times$$

$$\left. \left. \times \left\{ \sum_{k^{\eta_3} \in \nu(n,\, \eta_3)} \left| \int_{G_3} g(x - t^{\mu}) \prod_{i \in \eta_3} \frac{\sin(k_i t_i + \theta_{k_i})}{t_i} dt^{\eta_3} \right|^p \right\}^{1/p} \right|^p \right\}^{1/p}. \tag{27}$$

Положим

$$Z(t^{\eta_3}) = \begin{cases} g(x - t^{\mu}) \prod\limits_{i \in \eta_3} |t_i|^{-1}, & t^{\eta_3} \in G_3, \\ 0, & t^{\eta_3} \in T^{|\eta_3|} \setminus G_3, \end{cases}$$

и продолжим $Z(\cdot)$ 2π-периодически. В силу неравенства Хаусдорфа – Юнга [8, с. 211] находим

$$\left\{ \sum_{k^{\eta_3} \in \nu(n,\,\eta_3)} \left| \int\limits_{T^{|\eta_3|}} Z(t^{\eta_3}) \prod_{i \in \eta_3} \sin(k_i\, t_i + \theta_{k_i}) dt^{\eta_3} \right|^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{ \left| \int\limits_{G_3} g(x - t^{\mu}) \prod_{i \in \eta_3} t_i^{-1} \right|^{p'} dt^{\eta_3} \right\}^{1/p'} \leq$$

$$\leq K \|g\|_C \prod_{i \in \eta_3} r_i^{1/p}, \qquad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{28}$$

В силу (27) из (28) следует оценка

$$\alpha_{j\mu_2}(g;\, x;\, n^{\mu_2}) \leq K \|g\|_C \prod_{i \in \mu_2} r_i^{1/p} \max_{k^{\eta_3} \in \nu(n,\,\eta_3)} \left| \prod_{i \in \eta_1} \ln \frac{k_i}{a_i\, r_i} \right| \leq$$

$$\leq K_1 \|g\|_C\, r_i^{1/p} \prod_{i \in \eta_1} \ln \frac{n_i\, e}{r_i}. \tag{29}$$

Учитывая (29), (26), а также (16) – (18), находим

$$\omega^{(1)}_{j^{\mu},\,p}(g;\, x;\, n^{\mu}) \leq K_2 \|g\|_C \prod_{i \in \mu_{1,4,6}} c_{n_i}(\overline{\psi}_i) \prod_{i \in \mu_2} \ln \frac{n_i\, e}{r_i}.$$

Объединяя неравенства (20), (21) и (35), приходим к соотношению (14).

Лемма 6. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$, $\tau \in \mu$, $\subset \overline{\mu}$. *Тогда для любых* $g \in C$, $p > 0$ *и* $n \in \mathbb{N}^m$

$$\left\{ \prod_{i \in \tau} r_i^{-1} \sum_{k^{\tau} \in \nu(n,\,\tau)} |F_{\mu}(g;\, x;\, k^{\mu})|^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq K \, \|g\|_C \prod_{i \in \tau} c_{n_i}(\overline{\psi}_i) \ln \frac{n_i\, e}{r_i} \prod_{i \in \mu_1} c_{k_i}(\overline{\psi}_i) \ln k_i\, e, \tag{30}$$

где $\mu_1 = \mu \setminus \tau$.

Доказательство. Если $\tau = \mu$, то $\mu_1 = \varnothing$. В таком случае

$$\prod_{i \in \mu_1} c_{k_i}\big(\overline{\psi}_i\big) \ln k_i\, e = 1.$$

В силу неравенства Минковского

$$\left\{\prod_{i\in\tau} r_i^{-1}\sum_{k^{\tau}\in\nu(n,\tau)}|F_{\mu}(g;\,x;\,k^{\mu})|^p\right\}^{1/p}\le$$

$$\le\sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{4e^{\mu}}\left\{\prod_{i\in\tau} r_i^{-1}\sum_{k^{\tau}\in\nu(n,\tau)}|\chi_{j\,\tau}(\chi_{j\,\mu_1}(g_1;\,x;\,k^{\mu_1});\,x;\,k^{\tau})|^p\right\}^{1/p}\le$$

$$\le K\sum_{j^{\mu}=e^{\mu}}^{4e^{\mu}}\prod_{i\in\tau} c_{n_i}(\overline{\psi}_i)\ln\frac{n_i\,e}{r_i}\|\,\chi_{j\,\mu_1}(g;\,x;\,k^{\mu_1})\|_C. \tag{31}$$

Пусть B_i, $i\in\mu$, обозначает одно из множеств

$$H_1^{(i)}=\left\{t_i\colon|t_i|\le\frac{a_i}{k_i}\right\},\qquad H_2^{(i)}=\left\{t_i\colon|t_i|\in\left[\frac{a_i}{k_i},\,q_i\,\pi\right]\right\},\qquad H_3^{(i)}=T,$$

$$H_4^{(i)}=\left\{t_i\colon|t_i|\ge\frac{a_i}{k_i}\right\},\qquad H_5^{(i)}=\mathbb{R}$$

и

$$Z_i(t_i)=\begin{cases}\mathcal{J}_2\big(\psi_i^{(1)};k_i;t_i\big)_1, & B_i=H_1^{(i)},\\[2mm] \dfrac{\overline{\psi}_i(k_i)}{\pi}t_i^{-1}\,\sin(k_it_i+\theta_{k_i}), & B_i=H_2^{(i)},\\[2mm] \dfrac{\overline{\psi}_i(k_i)}{\pi}A_{q_i}(t_i)\,\sin(k_it_i+\theta_{k_i}), & B_i=H_3^{(i)},\\[2mm] \pi^{-1}\mathcal{J}_3\big(\psi_i^{(2)};\,k_i;\,t_i\big)_1, & B_i=H_4^{(i)},\\[2mm] \pi^{-1}\psi^{(1)}(k_i)t_i^{-1}\,\sin\,k_it_i, & B_i=H_1^{(i)},\\[2mm] \pi^{-1}\mathcal{J}_3\big(\psi_i^{(1)};\,k_i;\,t_i\big)_0, & B_i=H_5^{(i)}.\end{cases}$$

Полагая $\mu_1=\{i_1,\ldots\,i_{|\mu_1|}\}$, имеем

$$\chi_{j_{\mu_1}}(g;\,x;\,k^{\mu_1})=\int\limits_{B_{i_1}}z_{i_1}(t_{i_1})dt_{i_1}\ldots\int\limits_{B_{i_{\,|\mu_1|}}}g(x-t^{\mu_1})z_{i_{\,|\mu_1|}}(t_{i_{\,|\mu_1|}})dt_{i_{\,|\mu_1|}}.$$

Вследствие (16) – (18)

$$\int\limits_{B_{i\,\sigma}}|z_{i\,\sigma}(t_{i\,\sigma})|dt_{i\,\sigma}\le$$

$$\le K\,\overline{\psi}_{i\,\sigma}(k_{i\,\sigma})\cdot\begin{cases}1, & B_{i\,\sigma}=H_1^{(i_\sigma)},\ \ H_3^{(i_\sigma)},\ \ H_4^{(i_\sigma)},\ \ H_5^{(i_\sigma)},\ \ H_6^{(i_\sigma)},\\[2mm] \ln\,k_{(i_\sigma)}e, & B_{i\,\sigma}=H_2^{(i)}.\end{cases}$$

Отсюда с учетом (31) получаем (30).

Рассуждая, как и при доказательстве лемм 5 и 6, получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть* $\pm\psi_i^{(1)} \in \mathfrak{M}_0$, $\pm\psi_i^{(2)} \in \mathfrak{M}_0'$ $\forall i \in \mu$, $\tau \subset \mu \subset \overline{m}$. *Тогда для любых* $g \in C$, $n \in \mathbb{N}^m$ *и* $p > 0$

$$\left\{ \prod_{i \in \tau} r_i^{-1} \sum_{k^{\tau} \in \nu(n,\tau)} |Q_{\mu}(g;\, x;\, k^{\mu})|^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq K\, \|g\|_C \prod_{i \in \tau} c_{k_i}(\overline{\psi}_i) \prod_{i \in \tau_1} \ln \frac{n_i\, e}{r_i} \prod_{i \in \widetilde{\mu}} c_{k_i}(\overline{\psi}_i) \ln k_i\, e, \qquad \tau_1 = \tau \cap \mu_1, \quad \widetilde{\mu} = \mu \setminus \tau. \tag{32}$$

***Доказательство леммы* 4.** Используя представление (8), находим

$$\rho_{\mu,k}(f;x) = \sum_{j=1}^{|\mu|} (-1)^{j+1} \sum_{|\mu_1| = i} F_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};\, x;\, k^{\mu_1}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{|\mu|} (-1)^{j+1} \sum_{\substack{|\mu_1| = j \\ \mu_1 \subset \mu}} P_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};\, x;\, k^{\mu_1}) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{|\mu|} (-1)^{j+1} \sum_{\substack{|\mu_1| = j \\ \mu_1 \subset \mu}} Q_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};\, x;\, k^{\mu_2}), \tag{33}$$

где $\Delta_{\mu_1} = f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}(x) - t^*_{\mu_1,n}(x)$, $t^*_{\mu_1,n} \in \mathcal{T}_{\mu_1,n}$,

$$E_{\mu_1,n}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) = \left\| f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}(x) - t^*_{\mu_1,n}(x) \right\|_C. \tag{34}$$

В силу (33) и неравенства Минковского имеем

$$h_p(f;\, \nu(n;\tau);\, k^{\mu\setminus\tau}) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{|\mu|} \sum_{\substack{|\mu_1| = j \\ \mu_1 \subset \mu}} \left\{ \prod_{i \in \tau} r_i^{-1} \sum_{k^{\tau} \in \nu(n,\tau)} |F_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};\, x;\, k^{\mu_1})|^p \right\}^{1/p} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{|\mu|} \sum_{|\mu_1| = j} \left\{ \prod_{i \in \tau} r_i^{-1} \sum_{k^{\tau} \in \nu(n,\tau)} |P_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};\, x;\, k^{\mu_1})|^p \right\}^{1/p} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{|\mu|} \sum_{\substack{|\mu_1| = j \\ \mu_1 \subset \mu}} \left\{ \prod_{i \in \tau} r_i^{-1} \sum_{k^{\tau} \in \nu(n,\tau)} |Q_{\mu_1}(\Delta_{\mu_1};\, x;\, k^{\mu_1})|^p \right\}^{1/p}.$$

Отсюда на основании леммы 6 и (32), с учетом (34) и представления величины $P_{\mu}(\cdot)$, приходим к неравенству (13).

***Доказательство теоремы* 3.** Положим $\widetilde{\mu} = \mu_0 \setminus \mu$,

$$\alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}}) = \sum_{\mu_1 \subset \mu_0} E_{\mu_1,\, n^{\mu_1'} + k^{\mu_2}}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i \in \mu_1'} c_{n_i}(\overline{\psi}_i) d(k^{\mu_2}).$$

Из оценки (6), установленной в работе [2], следует неравенство

$$\big\|\rho_{\mu_0,\, k}(f;x)\big\|_C \le K \sum_{\mu_1 \subset \mu_0} E_{\mu_1,\, k}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) \prod_{i \in \mu_1'} c_{k_i}(\overline{\psi}_i) \ln k_i\, e.$$

Если $\alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}}) = 0$, то $E_{\mu_1,\, k}(f^{\overline{\psi}_{\mu_1}}) = 0\ \forall \mu_1 \subset \mu_0,\ k \ge n$. Следовательно, $\big\|\rho_{\mu_0,\, k}(\cdot)\big\|_C = 0,\ k \ge n$, и тогда с учетом свойств функций $\varphi \in \Phi_m$ убеждаемся в справедливости (12).

Пусть $\alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}}) > 0$ и $j \in \mathbb{N}$,

$$\nu(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}};\, j) = \{k^{\mu_0} \in \nu_0(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}})\colon (j-1)\alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}}) \le$$
$$\le \big|\rho_{\mu_0,\, k}(f;x)\big| \le j\,\alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}})\},$$

$|\nu(\cdot)|$ — количество элементов множества $\nu(\cdot)$.

Поскольку функция φ не убывает, то

$$\prod_{i \in \mu}(n_i+1)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k^{\mu} \in \nu(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}};\, j)} \varphi\big(|\rho_{\mu_0,\, k}(f;x)|\big) \le$$
$$\le \prod_{i \in \mu}(n_i+1)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(j\alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}}))\big|\nu(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}};\, j)\big|. \tag{35}$$

Здесь предполагается, что если при некотором j $\nu(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}};\, j) = \varnothing$, то $\sum_{k^{\mu_0} \in \nu(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}};\, j)}(\cdot) = 0$.

Пусть $\big|\nu(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}};\, j)\big| = \prod_{i \in \mu} r_i \ge 1$, где r_i — количество элементов ортогональной проекции $\nu(n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}};\, j)$ на i-ю $(i \in \mu)$ координатную ось. Полагая в (14) $p = 1$, находим

$$\alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}})(j-1) \le K \prod_{i \in \mu} \ln \frac{n_i\, e}{r_i} \alpha(f;\, n^{\mu};\, k^{\widetilde{\mu}}).$$

Используя известное неравенство Коши

$$\left(\prod_{i=1}^{q} a_i\right)^{1/q} \le q^{-1} \sum_{i=1}^{q} a_i,$$

получаем

$$\prod_{i \in \mu} r_i \le K \prod_{i \in \mu}(n_i e) e^{-q(ja_0)^{1/q}}. \tag{36}$$

С учетом (36) из (35) находим

$$\prod_{i\in\mu}(n_i+1)^{-1}\sum_{k^{\mu}\in\nu_0(n,\mu)}\varphi(|\rho_{\mu_0,k}(f;x)|)\le K\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(j\alpha)e^{-q(ja_0)^{1/q}}.$$

Отсюда на основании многомерного аналога неравенства Тотика (см., например, [6])

$$\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(jz)e^{-q(ja_0)^{1/q}}\le K\varphi(z),\qquad K=K(\sigma^m),\quad z\in[\,0,\sigma_m\,],$$

полагая $z=\alpha(f;\,n^{\mu};\,k^{\widetilde{\mu}})$, получаем требуемое соотношение (12).

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **40**, ч. I. – 426 с.
2. *Ласурия Р. А.* Кратные суммы Фурье на множествах $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций (небольшая гладкость) // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 911 – 918.
3. *Ласурия Р. А.* Приближение $\overline{\psi}$-дифференцируемых функций кратными суммами Фурье в интегральной метрике // Anal. math. – 2004. – **30**, № 3. – P. 207 – 221.
4. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Кратные суммы Фурье на множествах $(\psi,\,\beta)$-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545 – 556.
5. *Totik V.* Notes on Fourier series: strong approximation // J. Approxim. Theory. – 1985. – **43**. – P. 105 – 111.
6. *Пачулиа Н. Л.* Сильное суммирование рядов Фурье $(\psi,\,\beta)$-дифференцируемых функций m переменных. – Киев, 1990. – С. 17 – 66. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.55).
7. *Ласурия Р. А.* Равномерные оценки группы отклонений $\overline{\psi}$-интегралов суммами Фурье и сильная суммируемость рядов Фурье // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Пр. Укр. мат. конгр. – 2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 114 – 122.
8. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

Получено 11.09.2006