УДК 514

Ю. А. Аминов (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАБОТАХ А. В. ПОГОРЕЛОВА

A survey of the results by the well-known geometer A. V. Pogorelov is presented.

Наведено огляд результатів видатного геометра О. В. Погорєлова.

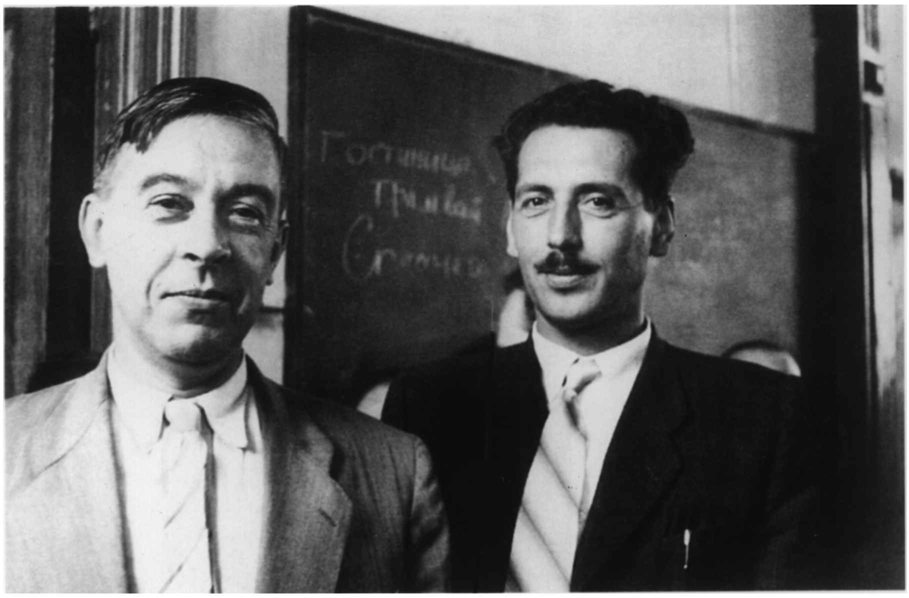
13 мая 2005 г. в Харькове в Физико-техническом институте низких температур НАН Украины прошел митинг, на котором была открыта мемориальная доска с барельефом академика Алексея Васильевича Погорелова. На митинге выступили академики В. А. Марченко, В. В. Еременко, чл.-кор. НАН Украины А. А. Борисенко, представители других институтов и мэрии Харькова, консул Российской федерации в Харькове и др. Они говорили о выдающемся вкладе Алексея Васильевича в науку, о его жизненном пути и о замечательных свойствах его характера. Митинг был многочисленный, присутствовали коллеги и ученики, сотрудники института, преподаватели и студенты Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина, школьники и учителя. Среди гостей — сын, Леонид Алексеевич. Было впечатление, что Алексей Васильевич по-прежнему с нами. В завершение митинга прозвучал гимн Украины. Участники митинга разошлись и площадь перед институтом опустела… Но осталось все в памяти, и осталось созданное А. В. Погореловым — его творчество, идеи, монографии и учебники, его теории.

Ранее, в мае 2004 г., отдел геометрии Физико-технического института НАН Украины совместно с кафедрой геометрии Харьковского национального университета провели международный семинар „Геометрия в целом", посвященный 85-летию со дня рождения А. В. Погорелова. С докладами этого семинара, среди которых рассказ академика В. А. Марченко о некоторых эпизодах из жизни Алексея Васильевича, можно ознакомиться в интернете на сайте [1].

Творчество А. В. Погорелова многогранно и относится к следующим четырем направлениям: геометрия, механика, школьное и вузовское образование, криогенное машиностроение. Цель данной статьи — изложить основные геометрические достижения этого выдающегося математика. Результаты А. В. Погорелова отличаются законченностью, завидной простотой формулировок и в то же время глубиной мысли. Авторитет его был бесспорен и признан среди всех геометров мира.

Первый выдающийся результат А. В. Погорелов получил в 1951 г. — однозначная определенность общих выпуклых поверхностей в E^3 своей метрикой. История этого вопроса восходит еще к Коши, который доказал однозначную определенность замкнутых выпуклых многогранников. Далее последовали работы Либмана, Гильберта, Кон-Фоссена и Герглотца. Алексей Васильевич имел замечательных учителей — А. Д. Александрова и Н. В. Ефимова, от которых он, по-видимому, узнал об этой проблеме.

Дружественные отношения между Н. В. Ефимовым и А. В. Погореловым сохранялись всю жизнь, и они являются образцом отношений учитель – ученик. Это была большая дружба, прошедшая испытание временем и расстоянием. На многих Н. В. Ефимов оказал благотворное влияние. В присутствии Н. В. Ефимова человек загорался каким-то необыкновенным светом и наполнялся добротой.



Н. В. Ефимов и А. В. Погорелов (*справа*)

В 30-е годы прошлого века в Москве и Ленинграде возникла школа геометров „в целом”, не без влияния Кон-Фоссена, который в 1934 г. иммигрировал в СССР из фашистской Германии. Кон-Фоссен был соавтором Гильберта по замечательной книге „Наглядная геометрия”. Он доказал неизгибаемость замкнутой поверхности класса регулярности C^3 с положительной гауссовой кривизной. В 1936 г. после тяжелой болезни он умер, но остался ряд интересных и важных проблем, сформулированных им в работах.

Заметим, что в 1938 г. А. Д. Александров доказал однозначную определенность замкнутых аналитических поверхностей типа $T,$ гауссова кривизна которых может менять знак, но удовлетворяет определенному интегральному условию [2]. Для выпуклых регулярных поверхностей класса регулярности C^2 и с неотрицательной гауссовой кривизной однозначная определенность была доказана Герглотцем чрезвычайно красиво и просто с помощью одной интегральной формулы. Его метод, однако, не был пригоден для нерегулярных поверхностей, имеющих ребра, конические точки и другие особенности. Проблема представлялась неподъемной. Развив совершенно новые подходы, А. В. Погорелов доказал следующий результат [3].

Теорема 1. *Замкнутые изометричные выпуклые поверхности равны.*

Более того, им была доказана однозначная определенность для незамкнутых поверхностей. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть F — выпуклая поверхность с краем, полная кривизна которой равна 4π. Пусть край состоит из конечного числа жордановых кри-*

вых с ограниченными вариациями поворота. Тогда каждая выпуклая поверхность F' с краем, изометричная F, равна ей.

Ниже мы укажем одно важное применение этой теоремы.

Доказана также теорема об однозначной определенности полных бесконечных поверхностей.

Теорема 3. *Бесконечные изометричные выпуклые поверхности с полной кривизной 2π равны.*

В то же время по теореме С. П. Оловянишникова бесконечная выпуклая поверхность с полной кривизной меньше 2π допускает изгибания.

С помощью специального преобразования, открытого А. В. Погореловым, вопрос об однозначной определенности поверхностей в пространствах постоянной кривизны был сведен к вопросу об однозначной определенности поверхностей в евклидовом пространстве. Пусть R — эллиптическое пространство с кривизной $K = 1$. Рассмотрим область R_0 эллиптического пространства такую, что при сопоставлении его точек точкам на сфере в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 с координатами x_0, x_1, x_2, x_3 (с отождествлением диаметрально противоположных точек) эта область изображается единичной полусферой

$$x_0^2 + \ldots + x_3^2 = 1, \qquad x_0 > 0.$$

Таким образом, область R_0 получается из R удалением одной плоскости $x_0 =$ $= 0$. Пусть в области R_0 имеются две регулярные изометричные поверхности F' и F'' с радиусами-векторами $x'(u, v)$ и $x''(u, v)$ соответственно, причем соответствующим по изометрии точкам на этих поверхностях соответствуют одинаковые значения параметров u, v. Пусть e_0 — единичный вектор, ортогональный к пространству E_0^3: $x_0 = 0$ и направленный в полупространство $x_0 >$ > 0. Паре изометричных поверхностей F' и F'' поставим в соответствие пару поверхностей Φ' и Φ'' с радиусами-векторами

$$y' = \frac{x' - e_0(x'e_0)}{e_0(x' + x'')}, \qquad y'' = \frac{x'' - e_0(x''e_0)}{e_0(x' + x'')}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Поверхности Φ' и Φ'' регулярны, не имеют особенностей и изометричны. Они конгруэнтны тогда и только тогда, когда конгруэнтны поверхности F' и F''.*

С помощью указанного преобразования доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Замкнутые изометричные выпуклые поверхности в эллиптическом пространстве равны.*

Заметим, что теоремы об однозначной определенности выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского были затем получены в работах Г. Н. Гаюбова [4], И. А. Данелича [5] и А. Д. Милки [6].

В 1969 г. вышла замечательная монография А. В. Погорелова „Внешняя геометрия выпуклых поверхностей" [7]. Это был итог большой напряженной работы. Само название книги подчеркивает преемственность тематики А. Д. Александрова, которая была изложена в его монографии „Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей" 1948 г. С другой стороны, название свидетельствует и о значительном дополнении в этой тематике. Отдавая должное методу приближения поверхностей с помощью многогранников, А. В. Погорелов значительно развивает регулярную теорию поверхностей как в евклидовом, так и в римановом пространствах. Книга тотчас была переведена на английский язык и разошлась по университетским библиотекам всего мира. Когда автор настоящей статьи изучал открытый фонд университетской библиотеки в Бразилиа и библиотеки института „IMPA” в Рио-де-Жанейро, то видел на полках эту книгу, и по ее внешнему виду можно было сказать, что ее интенсивно штудировали. Известный бразильский геометр из „IMPA” Манфредо до Кармо восхищался книгами Алексея Васильевича, в особенности маленькой книжечкой для студентов „Дифференциальная геометрия”.

Наибольшее впечатление в монографии производит глава VI : „Выпуклые поверхности в римановом пространстве”. В этой главе речь идет о реализации двумерной метрики, заданной на сфере, в трехмерном римановом пространстве. Заметим, что проблема реализации метрик (изометрического погружения) в евклидовом и римановом пространствах в виде регулярных поверхностей является одной из центральных проблем в геометрии. В случае двумерных метрик ее можно переформулировать так: какая двумерная геометрия возможна на двумерных регулярных поверхностях данного трехмерного риманова пространства. Еще в 1901 г. Гильберт показал, что вся плоскость Лобачевского не допускает изометрического погружения в E^3. Тематика была продолжена в статье Г. Вейля, в которой рассматривался вопрос погружения метрики положительной кривизны, заданной на сфере, в трехмерное евклидово пространство. Перевод трудной статьи Г. Вейля 1916 г. был опубликован в „Успехах математических наук” в 1948 г. Все же в ней имелись некоторые пробелы. В работе Г. Леви был получен окончательный вариант в случае аналитических метрик, который формулируется так:

двумерное замкнутое гомеоморфное сфере риманово многообразие с аналитической метрикой положительной кривизны допускает изометрическое погружение в евклидово пространство в виде замкнутой аналитической поверхности.

А. Д. Александров с помощью метода приближения многогранниками расширил класс метрик, допускающих реализацию. Затем А. В. Погорелов доказал регулярность выпуклых поверхностей, получаемых в результате реализации А. Д. Александрова.

Сформулируем его **теорему 6.** *Если выпуклая поверхность F имеет регулярную метрику класса C^k, $k \geq 2$, и положительную гауссову кривизну, то F принадлежит классу $C^{k-1,\alpha}$ при любом $\alpha \in (0, 1)$. Если метрика поверхности F аналитическая, то F — аналитическая поверхность.*

Таким образом, в E^3 было получено исчерпывающее решение проблемы реализации для класса метрик положительной кривизны. После этого естественно возникает вопрос о реализации метрик в заданное трехмерное риманово пространство и в евклидово пространство больших размерностей. А. В. Погорелов рассмотрел погружения в риманово пространство. Здесь понадобилось принципиально изменить подход, так как в случае общего риманова пространства методы теории многогранников неприменимы. Кроме того, в общем римановом пространстве нет теоремы Бонне о том, что по заданным первой и второй квадратичным формам, коэффициенты которых удовлетворяют уравнениям Гаусса – Кодацци, поверхность восстанавливается однозначно с точностью до движения в пространстве. А. В. Погорелову предстояло преодолеть все эти трудности. Прежде всего, он получил на замкнутой поверхности априорную оценку нормальных кривизн в зависимости от метрики поверхности и метрики пространства. Истоки этой оценки можно увидеть в доказательстве Гильберта теоремы Либмана однозначной определенности сферы. Так же, как и Гильберт, А. В. Погорелов рассмотрел точку, в которой нормальная кривизна достигает абсолютного максимума, и затем ввел на поверхности в окрестности этой точки координатную сеть, составленную из линий кривизны. Но в римановом пространстве все значительно сложнее. Автор нашел ясные геометрические условия, накладываемые на пространство для того, чтобы было возможно произвести оценку нормальной кривизны. Была доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть F — замкнутая регулярная* (*четырежды непрерывно* *дифференцируемая) поверхность в регулярном класса* C^4 *римановом пространстве* R.

Пусть в каждой точке поверхности выполняются неравенства

$$K_i > K_R, \quad K_i - 3(K_R - \overline{K}_R) > 0,$$

где K_i *— гауссова кривизна поверхности,* K_R *— кривизна пространства по площадке, касающейся поверхности,* $\overline{K}_R$ *— кривизна в любой перпендикулярной площадке.*

Тогда для нормальной кривизны поверхности можно указать оценку в зависимости только от метрики пространства.

Затем найденные оценки используются для получения оценок производных пространственных координат точек поверхности и их постоянных Гельдера в зависимости только от верхней грани модулей коэффициентов Гельдера g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ — коэффициентов метрики поверхности и метрики пространства и их производных до k-го порядка. При этом используются метод вспомогательных функций С. Н. Бернштейна и оценки Шаудера для линейных уравнений эллиптического типа.

Метод погружения состоит из трех этапов:

1. Строится семейство двумерных римановых многообразий M_t, содержащих заданное многообразие M и многообразие M_0, заведомо погружаемое.

Заметим, что при рассмотрении этого пункта используется теорема Александрова – Погорелова о реализуемости гомеоморфного сфере многообразия кривизны, не меньшей K, замкнутой выпуклой поверхностью ω в пространстве Лобачевского L^3 кривизны K. В качестве M_0 берется метрика достаточно малой геодезической сферы S^2 в L^3. Затем строится семейство поверхностей, соединяющее S^2 и ω.

2. Доказывается, что если многообразие M_t из семейства погружаемо, то и близкие к нему многообразия семейства также погружаемы.

3. Доказывается, что если каждое из многообразий M_{t_n} погружаемо и $t_n \to t^\star$, то многообразие $M_{t^\star}$ тоже погружаемо.

Для доказательства пунктов 2 и 3 применяются развитые А. В. Погореловым методы теории бесконечно малых изгибаний и деформаций, основанные на уже установленных априорных оценках и на теории обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа.

В результате доказана следующая замечательная теорема о реализации.

Теорема 8. *Пусть* R *— полное трехмерное риманово пространство и* M *— замкнутое гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной, всюду большей некоторой постоянной* C *(большей, меньшей или равной нулю). Тогда если кривизна пространства* R *всюду меньше* C, *то* M *допускает изометрическое погружение в* R *в виде регулярной поверхности* F.

Более того, это погружение можно осуществить так, чтобы данный двумерный элемент α *многообразия* M *(точка* S *и пучок направлений в ней) совпал бы с данным изометричным* α *двумерным элементом* α' *в пространстве* R *и поверхность* F *располагалась по заданную сторону от площадки элемента* α'.

Если метрики пространства R *и многообразия* M *дифференцируемы* k *раз* $(k \geq 6)$, *то поверхность* F *дифференцируема по крайней мере* $k-1$ *раз. Если метрики пространства* R *и многообразия* M *аналитические, то поверхность* F *аналитическая.*

С помощью теоремы об изометрическом погружении замкнутого многообразия в риманово пространство получена теорема о погружении незамкнутых многообразий. Пусть K_1 — наибольшая, а K_2 — наименьшая кривизны пространства по двумерным площадкам в одной и той же точке и $K_G^\star = \max_G \max\{K_1, 3(K_1 - K_2)\}$.

Теорема 9. *Пусть G — компактная область риманова пространства, содержащая шар радиуса $2d$. Пусть M — двумерное риманово многообразие, гомеоморфное кругу и удовлетворяющее условиям*:

1) *внутренний диаметр M меньше d,*

2) *гауссова кривизна M всюду больше $K_G^\star$,*

3) *геодезическая кривизна края M всюду положительна.*

Тогда существует изометрическое погружение M в G в виде поверхности Φ, причем если метрики пространства и многообразия k раз дифференцируемы ($k \geq 6$), то поверхность Φ по крайней мере $k-2$ раза дифференцируема. Если метрики M и G аналитические, то Φ — аналитическая поверхность.

Заметим, что Э. Г. Позняк построил первый пример метрики в круге, которую нельзя реализовать в виде регулярной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. В этом примере гауссова кривизна меняет знак. Затем М. Л. Громов, используя некоторые оценки Ю. Д. Бураго для внешнего диаметра, построил пример метрики с положительной гауссовой кривизной, заданной в круге, не реализуемой в E^3 [8]. Это показывает, что условие 3 в сформулированной выше теореме существенно. Представляется правдоподобной следующая гипотеза: любое двумерное регулярное риманово многообразие можно реализовать в виде регулярной поверхности в E^4.

К этому кругу вопросов тесно примыкают вопросы о локальной реализации метрик. Аналитическая метрика, как доказал Дарбу, локально реализуется аналитической поверхностью. В случае, когда метрика принадлежит классу C^k, $k \geq 3$, и в некоторой точке гауссова кривизна отлична от нуля, некоторая окрестность этой точки допускает регулярную реализацию в E^3. Остается вопрос о локальной реализации окрестности точки, в которой $K = 0$. В работе [9] А. В. Погорелова построен пример двумерной римановой метрики класса $C^{2,1}$, не допускающей даже локально реализации на поверхности класса C^2. Однако эта метрика реализуется на поверхности класса $C^{1,1}$.

Много внимания в работах А. В. Погорелова уделено бесконечно малым изгибаниям выпуклых поверхностей. В монографии [7] доказана теорема о том, что каждая поверхность в трехмерном римановом пространстве с положительной внешней кривизной, закрепленная в одной точке вместе с пучком направлений, является жесткой. Рассмотрен вопрос о жесткости поверхности рода $p > 1$. В [7] намечено доказательство, но в списке проблем в конце книги формулируется эта проблема. При этом Алексей Васильевич предполагает, что условие закрепления в случае $p > 1$ излишне. Совершенно другим методом проблема была решена В. Т. Фоменко [10, 11]. Была доказана жесткость поверхности F^2 рода $p > 1$ в трехмерном римановом пространстве без всяких условий закрепления (как и предполагал А. В. Погорелов), в то же время в пространстве постоянной кривизны доказана однозначная определенность. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема В. Т. Фоменко. *Пусть M_k, $k = 1, 2, \ldots, 4p-3$, — произвольные отмеченные точки поверхности F^2 рода $p \geq 1$. В пространстве постоянной кривизны поверхность F^2 не допускает нетривиальных изометрических преоб-*

разований с сохранением точек конгруэнтности M_k, $k = 1, 2, \ldots, 4p - 3$.

В монографии [7] рассмотрены и решены в полном объеме проблемы Кристоффеля и Минковского. Общая проблема состоит в нахождении выпуклой поверхности в E^3, для которой заранее задана некоторая функция главных радиусов кривизны как некоторая функция от нормали n:

$$f(R_1, R_2, n) = \phi(n).$$

Например, в случае проблемы Кристоффеля

$$R_1 + R_2 = \phi(n),$$

в случае проблемы Минковского

$$\frac{1}{R_1 R_2} = K(n).$$

Проблемы эти в обобщенном смысле были решены Кристоффелем и Минковским.

Кристоффель доказал, скорее, теорему единственности о восстановлении поверхности по заданной функции $\phi(n)$. А для общей проблемы теорема единственности была доказана А. Д. Александровым. Следующее интегральное условие является необходимым:

$$\int_{\omega} \phi(n) n \, d\omega = 0,$$

причем интегрирование берется по единичной сфере ω, $d\omega$ — элемент ее площади. А. Д. Александров, однако, заметил, что это условие не является достаточным для того, чтобы восстанавливаемая поверхность была выпуклой. А. В. Погорелов установил достаточные условия. Им доказана следующая теорема.

Теорема 10. *Для того чтобы существовала замкнутая выпуклая поверхность с данной суммой* $\phi(n)$ *главных кривизн, достаточно выполнения следующих условий*:

$$\phi(n) \geq 0, \qquad \phi - \phi_{ss} \geq 0, \qquad \int_{\omega} n \phi(n) \, d\omega = 0,$$

где s *обозначает дифференцирование по длине дуги любого большого круга на единичной сфере.*

Условие на функцию $\phi(n)$, которое одновременно является необходимым и достаточным для разрешимости проблемы Кристоффеля, было дано У. Дж. Фиреем.

Проблему Минковского можно переформулировать следующим образом: пусть $K(n)$ — произвольная положительная непрерывная функция, заданная на единичной сфере Ω. Ставится вопрос о существовании и единственности замкнутой выпуклой поверхности F, которая в точке с внешней нормалью n имеет гауссову кривизну $K(n)$.

Проблема была решена Минковским в обобщенном смысле.

Теорема Минковского. *Пусть на единичной сфере* Ω *с центром в начале координат задана непрерывная положительная функция* $K(n)$ *единичного вектора* n. *Пусть эта функция удовлетворяет условию*

$$\int_{\Omega} \frac{n}{K(n)} \, d\omega = 0,$$

где $d\omega$ — *элемент площади* Ω, *а интегрирование распространяется на всю сферу.*

Тогда существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса замкнутая выпуклая поверхность Φ, *которая в точке с внешней нормалью* n *имеет гауссову кривизну* $K(n)$.

Заметим, что проблемой Минковского занимались многие математики: Г. Леви, К. Миранда, Л. Ниренберг и др.

Оставался открытым вопрос о регулярности поверхности, если функция $K(n)$ достаточно регулярна. А. В. Погорелов дополняет теорему Минковского следующей теоремой.

Теорема 11. *Если гауссова кривизна выпуклой поверхности всюду положительна и как функция внешней нормали к поверхности регулярна* (m *раз дифференцируема,* $m \geq 3$), *то поверхность регулярна* (*по крайней мере* $m+1$ *раз дифференцируема*). *Если* $K(n)$ *аналитическая, то поверхность аналитическая.*

Поверхность определена однозначно с точностью до параллельного переноса. Доказана также довольно общая теорема о существовании замкнутой выпуклой поверхности, удовлетворяющей уравнению

$$f(R_1, R_2, n) = \phi(n)$$

при условиях на первые и вторые производные функций f и ϕ.

Работая в Харькове с 1947 г., А. В. Погорелов создал здесь школу по геометрии в „целом”. Он был главным редактором журнала „Украинский геометрический сборник”, с 1960 по 2000 г. заведовал отделом геометрии Физико-технического института низких температур НАН Украины. В монографии [7] отражены некоторые результаты его коллег и учеников Е. П. Сенькина, А. С. Лейбина, А. И. Медяника, А. А. Дубровина и др. Основные работы А. В. Погорелова касались геометрии гиперповерхностей. В математическом мире, однако, в том числе в Харьковской геометрической школе (А. А. Борисенко, Ю. А. Аминов, Л. А. Масальцев, А. Л. Ямпольский, Ю. А. Николаевский, В. Т. Лисица и др.), развивалась и геометрия подмногообразий. Важной геометрической характеристикой гиперповерхности является сферический образ, а подмногообразия — грассманов образ. Как обобщение в „широком” смысле сформулированных выше проблем Кристоффеля и Минковского можно рассматривать проблему о восстановлении подмногообразия по заданному грассманову образу. Эта задача решалась в работах Ю. А. Аминова [12, 13], Дж. Вайнера [14], В. А. Горькавого [15]. Теорема существования и единственности для двумерных поверхностей доказана в работах Ю. А. Аминова, теорема единственности в многомерном случае — в работе А. А. Борисенко [16]. Проблема существования для многомерных подмногообразий в общем случае остается нерешенной трудной проблемой. В конце работы [7] приведен список интересных и важных проблем, решенных впоследствии в работах А. А. Борисенко, А. Д. Милки, В. Т. Фоменко и С. Б. Климентова.

Монографией [7], по существу, завершены исследования А. В. Погорелова по геометрии двумерных поверхностей в трехмерном пространстве. В последующие годы А. В. Погорелов занимался исследованием многомерных выпуклых гиперповерхностей, вопросами оснований геометрии, теорией дифференциальных уравнений в частных производных и др.

В 1971 г. опубликована статья [17], а в 1975 г. — монография [18] А. В. Погорелова по многомерной проблеме Минковского. Функцией кривизны порядка ν выпуклой гиперповерхности F в E^{n+1} называется элементарная симметрическая функция главных радиусов кривизны

$$S_\nu = \sum_{i_\alpha \neq i_\beta} R_{i_1} \ldots R_{i_\nu} .$$

Обобщением проблемы Минковского является проблема нахождения выпуклой гиперповерхности с заданной функцией кривизны любого данного порядка $\nu \leq \leq n$: $S_\nu = \phi_\nu(n)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть* $\Phi_k(\xi)$ — *заданная на единичной сфере* Ω *регулярная положительная функция, удовлетворяющая условиям*

$$\int_\Omega \xi \Phi_k(\xi) d\omega = 0, \qquad k > 1,$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/2(n-1)} \max_{\xi,\gamma}(\phi_{kt} - \phi''_{kt}) < \phi_{kt}(\xi),$$

где $\phi_{kt} = (\Phi_{kt}/C_n^k)^{1/k}$, $\Phi_{kt} = t\Phi_k + 1 - t$, $0 \leq t \leq 1$, *штрихи обозначают дифференцирование по длине дуги любого большого круга* γ *на сфере.*

Тогда существует замкнутая выпуклая гиперповерхность F, *для которой* $\Phi_k(\xi)$ *будет функцией кривизны k-го порядка. Если функция* Φ_k *принадлежит классу регулярности* C^m, $m \geq 3$, *то гиперповерхность принадлежит классу* $C^{m+1,\alpha}$, $\alpha > 0$. *Если* Φ_k *аналитическая, то поверхность* F — *аналитическая.*

Вернувшись с Международного математического конгресса в Ницце, Алексей Васильевич заинтересовался проблемой аффинных гиперсфер. На конгрессе Е. Калаби подарил ему оттиск своей работы [19], касающейся этой проблемы, и тем самым привлек внимание Алексея Васильевича к этой проблеме. Вручая оттиск, Е. Калаби сказал: „Это будет Вам полезно", — и оказался прав.

Полная гиперповерхность в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве с координатами $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ называется несобственной аффинной гиперсферой, если она задается уравнением

$$x_{n+1} = z(x_1, \ldots, x_n),$$

причем функция z удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix} = \text{const} \neq 0,$$

где z_{ij} — вторые производные функции z по координатам x_i.

К. Ергенс в 1954 г. доказал, что при $n = 2$ выпуклая несобственная аффинная сфера является эллиптическим параболоидом. Е. Калаби в 1958 г. доказал это утверждение при $n = 3$ и 4 [19]. Полное решение для всех n было получено А. В. Погореловым в [18]. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 13. *Выпуклая несобственная аффинная гиперсфера является эллиптическим параболоидом.*

Это означает, что функция z, гессиан которой равен 1, представляющая поверхность, записывается в виде полинома второй степени

$$z = \sum_{i,j} a^{ij} x_i x_j + a^i x_i + a^0.$$

Формулировка теоремы не содержит каких-либо условий о регулярности функции z, кроме естественного требования двукратной дифференцируемости. По другой доказанной ранее теореме А. В. Погорелова выпуклое решение уравнения $|z_{ij}| = 1$ должно быть аналитическим.

Более общее уравнение Монжа – Ампера

$$\left|z_{ij}\right| = f(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$$

также было изучено А. В. Погореловым в [20 – 22] в предположении, что функция $z(x_1, \ldots, x_n)$ выпукла и $f > 0$. В дальнейшем рассматривается более общая форма

$$\theta(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)\left|z_{ij}\right| = \phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Рассматривается вопрос о существовании решения в заданной области G, которое на границе области обращается в заданную функцию, — задача Дирихле.

Доказывается теорема о существовании априорных оценок.

Теорема 14. *Пусть $z(x)$ — регулярное четырежды дифференцируемое решение уравнения Монжа – Ампера в выпуклой области G с нулевым граничным условием.*

Тогда для вторых производных этого решения во внутренней точке x области G можно указать априорные оценки в зависимости только от максимума модуля решения, его производных первого порядка и расстояния от точки x до границы области G.

Другое доказательство этой теоремы, как указывает сам А. В. Погорелов, дано в работе Н. М. Ивочкиной.

Развивая методы Е. Калаби получения оценок третьих производных решения z уравнения $\left|z_{ij}\right| = 1$, А. В. Погорелов доказывает следующую теорему.

Теорема 15. *В каждой внутренней точке области G третьи производные решения уравнения*

$$\left|z_{ij}\right| = \phi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$$

допускают оценку в зависимости только от вторых производных решения и расстояния от точки до границы области G.

Кульминацией проведенных исследований является следующая теорема.

Теорема 16. *Обобщенное решение уравнения Монжа – Ампера, в котором θ и ϕ — регулярные положительные функции, $\theta_z \le 0$, является регулярным в окрестности каждой точки строгой выпуклости решения. Если функции θ и ϕ k раз дифференцируемы, $k \ge 3$, то решение дифференцируемо $k+1$ раз и производные $(k+1)$-го порядка удовлетворяют условию Гельдера с любым положительным показателем $\alpha < 1$.*

Как показывают примеры, условие строгой выпуклости существенно. Могут быть обобщенные решения, не принадлежащие классу C^2 даже для аналитических θ и ϕ.

В 1976 – 1977 гг. вышли работы Ченга и Яу, посвященные регулярности решения n-мерной проблемы Минковского, в которых авторы передоказали результаты А. В. Погорелова, использовав в существенном его оценки и упрекнув одновременно его в пробелах. Впоследствии, как сказал автору Алексей Васильевич в разговоре, он получил от С. Т. Яу письмо с извинениями. Более того, в недавней статье С. Т. Яу (размещенной в интернете в arXiv:math) „Перспективы геометрического анализа” говорится: „Мы не осознавали, что великие геометры Погорелов, Калаби и Ниренберг уже работали над ними. Мы были возбуждены тем, что мы решили некоторые предположения Калаби относительно несобственных аффинных сфер. Но вскоре мы обнаружили, что Погорелов опубликовал свои результаты перед нами с другими аргументами”.

Естественным продолжением этой тематики было рассмотрение А. В. Погореловым в [23 – 25] аффинно-минимальных гиперповерхностей. Для гиперповерхности F вида $z = z(x_1, \dots, x_n)$ в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве рассматривается n-мерная аффинная площадь, определяемая по формуле

$$S(F) = \int_G H^{1/(n+2)} dx_1 \dots dx_n,$$

где $H = \left| z_{ij} \right|$. Гиперповерхность называется аффинно-минимальной, если первая вариация площади равна нулю:

$$\delta S(F) = 0.$$

Отсюда следует уравнение, которому удовлетворяет аффинно-минимальная гиперповерхность:

$$\sum_{i,j} Z^{ij} \frac{\partial^2 H^{1/(n+2)-1}}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

где Z^{ij} — алгебраические миноры k-го порядка определителя H. Заметим, что это дифференциальное уравнение 4-го порядка.

Доказана следующая теорема.

Теорема 17. *Строго выпуклая аффинно-минимальная гиперповерхность F, задаваемая уравнением $z = z(x_1, \dots, x_n)$, $x \in G$, $\partial G \subset C^1$, однозначно определяется ее краем и касательными гиперплоскостями вдоль края.*

С помощью теоремы об аффинных гиперсферах доказана также глобальная теорема.

Теорема 18. *Полная строго выпуклая аффинно-минимальная гиперповерхность F вида $z = z(x_1, \dots, x_n)$ в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве, удовлетворяющая условию при $x \to \infty$*

$$d^2 z(x) \to \sum_{i,j} c_{ij} dx_i dx_j ,$$

где c_{ij} — постоянные, есть эллиптический параболоид.

Выше мы уже упоминали о теореме А. Д. Александрова об аналитических поверхностях типа T [2]. В этой теореме на поверхности накладывается следующее внутреннее условие: интеграл от гауссовой кривизны K по области, где $K > 0$, равен 4π:

$$\int_{K>0} K \, dS = 4\pi.$$

Л. Ниренберг в статье [26] распространил эту теорему на поверхности класса C^4 при некотором добавочном внешнем условии: в каждой связной области с $K < 0$ не существует двух замкнутых асимптотических линий. На первом этапе доказательства применяется теорема А. В. Погорелова об однозначной определенности выпуклой поверхности с краем. Доказательство отсутствия двух замкнутых асимптотических линий долго не поддавалось усилиям геометров, но все же было получено в работе Г. А. Ковалевой [27].

Эти работы связаны с большой и трудной проблемой в теории поверхностей, заключающейся в том, существует ли замкнутая регулярная поверхность, которая допускала бы непрерывные изгибания. А. В. Погорелов размышлял над этой проблемой, однако, она оказалась слишком крепким „орешком", и Алексей Васильевич отзывался о ней как о трансцендентно трудной.

Под влиянием его интереса к этой проблеме автор настоящей статьи в работе [28] рассмотрел замкнутые поверхности тригонометрического типа, у которых радиус-вектор записывается в виде

$$r(u, v) = \sum_{p=-n}^{n} \sum_{p=-m}^{m} A_{pq} e^{i(pu+qv)},$$

$$0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi,$$

где A_{pq} — постоянные комплексные векторы. Была доказана теорема об однозначной определенности поверхностей в классе тригонометрических полиномов с порядками n, m. Утверждение теоремы, как и в работах А. В. Погорелова, — однозначная определенность метрикой (но в классе тригонометрических полиномов). На рассматриваемых поверхностях гауссова кривизна K меняет знак. В теории поверхностей хорошо развиты теория выпуклых поверхностей и теория поверхностей отрицательной кривизны. А теории регулярных поверхностей с переменной гауссовой кривизной нет. Развитие этого направления — одна из актуальных задач, по мнению автора, геометрии „в целом".

Следующий крутой поворот в творчестве А. В. Погорелова связан с четвертой проблемой Гильберта. Проблема Гильберта состоит в определении с точностью до изоморфизма всех реализаций системы аксиом евклидовой геометрии, в которой аксиомы, содержащие понятие угла, заменены аксиомой: у каждого треугольника любая из сторон меньше суммы двух других (неравенство треугольника).

В случае плоскости проблема переформулируется в виде задачи Дарбу: найти на плоскости все вариационные задачи, решениями которых являются все прямые линии на плоскости. Первой работой в 1901 г. по этой теме была работа ученика Гильберта Г. Гамеля, в которой проблема решалась в предположении достаточной гладкости метрики. Как пишет И. М. Яглом в комментарии „К четвертой проблеме Гильберта" в [29]: „Работа Гамеля, разумеется, не исчерпала всего, что можно сказать о четвертой проблеме Гильберта, другие подходы к которой неоднократно предлагались и позже.

Наиболее серьезным дефектом исследований Гамеля явилось то обстоятельство, что они базировались на мало уместных в исследованиях по основаниям геометрии аналитических методах (методах вариационного исчисления), использование которых потребовало определенных оговорок типа требований дифференцируемости".

Г. Буземан дал простой и общий метод построения дезарговых метрик, использовав неотрицательную вполне аддитивную функцию на множествах плоскостей.

Этот результат был использован А. В. Погореловым в [30] для получения полного решения четвертой проблемы Гильберта в размерностях $n = 2$ и 3, т. е. им дано явное определение всех непрерывных метрик. В предисловии к переводу книги А. В. Погорелова на эту тему на английский язык И. Кра называет это решение математической драгоценностью.

Вспоминается заседание Харьковского математического общества в большой физической аудитории Харьковского университета, на котором Алексей Васильевич изложил свое решение четвертой проблемы Гильберта. Это было событие, собравшее многочисленных слушателей, не только членов математического общества, но и студентов, и преподавателей университета. После доклада, закончившегося аплодисментами, слушатели задали много вопросов.

В 1955 г. Г. Буземан опубликовал книгу „Геометрия геодезических" [31], в которой было введено понятие G-пространств. Название отражает тот факт, что одним из основных понятий здесь являются геодезические — geodesics. Это конечно-компактное M-выпуклое метрическое пространство, которое удовлетворяет аксиомам локального продолжения и для которого продолжение единственно. Другим обобщением риманова пространства является пространство Финслера, которое определяется метрической функцией

$$F(x, dx).$$

Возникает вопрос о том, когда эти два обобщения приводят к одному и тому же пространству. Г. Буземан в своей книге „Геометрия геодезических" сформулировал проблему: при каких минимальных требованиях регулярности к метрике финслерова пространства оно является G-пространством ?

А. В. Погорелов в цикле работ (см., например, [32]), а затем в монографии „Busemann regular G-spaces" [33] указал минимальные условия регулярности на функцию $F(x, dx)$ для того, чтобы финслерово пространство было G-пространством. Доказана теорема о том, что если функция $F(x, dx)$ принадлежит классу $C^{1,1}$, то финслерово пространство является G-пространством. В то же время построен пример финслерова пространства с метрической функцией класса регулярности $C^{1,\alpha}$, которое не является G-пространством ни при каком $\alpha < 1$. Рассмотрен также вопрос, когда G-пространство будет финслеровым пространством. Обобщена теорема Бельтрами о геодезическом отображении при условии, что коэффициенты метрики являются непрерывными функциями координат.

А. В. Погорелов не ограничивался изучением только выпуклых поверхностей. Некоторое внимание он уделил теории минимальных поверхностей, и здесь им были найдены простые и ясные геометрические подходы. В основном рассматривались вопросы устойчивости минимальных поверхностей. Приведем результат, относящийся к полным минимальным поверхностям. Полная минимальная поверхность называется устойчивой, если на ней устойчива любая ограниченная область. А. В. Погорелов доказал в [34] следующую теорему.

Теорема 19. *Односвязная минимальная поверхность неустойчива, если на ней существует геодезический круг радиуса* ρ, *для которого выполняется хотя бы одно из двух условий*:

1) *при некотором* $\xi < \rho$ *выполнено неравенство*

$$|\omega(\xi)| > \frac{l(\rho)}{2\rho \ln(\rho/\xi)},$$

2) $S(\rho) > \frac{4}{3}\pi\rho^2.$

Здесь $S(\rho)$ — *площадь,* $l(\rho)$ — *длина окружности круга радиуса* ρ, ω — *интегральная кривизна в круге радиуса* ξ *с тем же центром.*

С помощью этой теоремы для односвязных поверхностей А. В. Погорелов установил простое доказательство теоремы М. до Кармо и С. К. Пенга.

Теорема 20. *Единственной полной устойчивой минимальной поверхностью в* E^3 *является плоскость.*

Кроме того, следует отметить совместную работу А. В. Погорелова с И. М. Лифшицом [35], в которой использовались некоторые геометрические идеи к определению формы поверхностей Ферми.

А. В. Погорелов имел необыкновенный настрой к науке, творчеству, всю жизнь напряженно и с радостью работал, хотя болезни и возраст давали себя знать, и в последние годы получил ряд интересных результатов. В его последней опубликованной статье [36] рассматривается проблема Стокера: можно ли утверждать, что если у двух замкнутых выпуклых многогранников одинакового комбинаторного строения соответствующие двугранные углы равны, то у них соответствующие плоские углы равны ?

В [36] доказана следующая теорема.

Теорема 21. *Пусть* P — *замкнутый выпуклый многогранник, у которого грани — остроугольные треугольники. Пусть многогранник* P *деформируется с сохранением комбинаторной структуры. Тогда если при этой деформации* *двугранные углы многогранника не изменяются, то его плоские грани тоже не изменяются.*

Своими работами А. В. Погорелов вписал свое имя в ряд выдающихся геометров: Эвклид, О. Коши, К. Гаусс, Н. И. Лобачевский, Б. Риман, Л. Шлефли, Г. Грассман, Е. Бельтрами, А. Пуанкаре, Г. Минковский, Д. Гильберт, Э. Картан, А. Д. Александров, Н. В. Ефимов, Л. С. Понтрягин, С. С. Черн …

1. *Доклады* Международного семинара по геометрии в „целом”, посвященного 85-летию со дня рождения академика А. В. Погорелова / http://www.ilt.kharkov.ua/bvi/structure/depart_r/d21/2004/main.htm.
2. *Александров А. В.* Об одном классе замкнутых поверхностей // Мат. сб. – 1938. – **4**(46), № 1. – С. 69 – 77.
3. *Погорелов А. В.* Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей // Докл. АН СССР. – 1951. – **79**, № 5. – С. 739 – 742.
4. *Гаюбов Г. Н.* Однозначная определенность поверхностей в пространстве Лобачевского // Научн. труды Ташкент. ун-та. – 1970. – **394**. – С. 52 – 62.
5. *Данелич И. А.* Однозначная определенность некоторых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского // Докл. АН СССР. – 1957. – **115**, № 2. – С. 217 – 219.
6. *Милка А. Д.* Однозначная определенность общих замкнутых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского // Укр. геом. сб. – 1980. – **23**. – С. 99 – 107.
7. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. – М.: Наука, 1969. – 759 с.
8. *Громов М. Л., Рохлин В. А.* Вложения и погружения в римановой геометрии // Успехи мат. наук. – 1970. – **25**, № 5. – С. 3 – 62.
9. *Погорелов А. В.* Пример двумерной римановой метрики, не допускающей локальной реализации в E^3 // Докл. АН СССР. – 1971. – **198**, № 1. – С. 42 – 43.
10. *Фоменко В. Т.* О жесткой и однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в римановом пространстве // Там же. – 1973. – **213**, № 1. – С. 45 – 50.
11. *Фоменко В. Т.* Об однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ в пространстве постоянной кривизны // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 3. – С. 441 – 445.
12. *Аминов Ю. А.* О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геом. сб. – 1980. – **23**. – С. 3 – 16.
13. *Аминов Ю. А.* Определение поверхности в E^4 по заданному грассманову образу // Мат. сб. – 1982. – **117**, № 2. – С. 147 – 160.
14. *Weiner J. L.* The Gauss map for surfaces in 4-space // Math. Ann. – 1984. – **269**, № 4. – P. 541 – 560.
15. *Горькавый В. А.* О восстановлении подмногообразия в евклидовом пространстве по вырожденному в линию грассманову образу // Мат. заметки. – 1996. – **59**. – С. 681 – 691.
16. *Борисенко А. А.* Единственность в проблеме определения подмногообразия в евклидовом пространстве по его грассманову образу // Там же. – 1992. – **51**. – С. 8 – 15.
17. *Погорелов А. В.* Регулярное решение n-мерной проблемы Минковского // Докл. АН СССР. – 1971. – **199**, № 4. – С. 785 – 788.
18. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. – М.: Наука, 1975. – 95 с.
19. *Galabi E.* Improper affine hyperspheres of convex type and a generalizations of theorem by Jörgens // Mich. Math. J. – 1958. – **5**, № 2. – P. 105 – 126.
20. *Погорелов А. В.* О регулярности обобщенных решений уравнения $\det(\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j) = \phi(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0$ // Докл. АН СССР. – 1971. – **200**, № 3. – С. 534 – 537.
21. *Погорелов А. В.* Задача Дирихле для многомерного аналога уравнения Монжа – Ампера // Там же. – 1971. – **201**, № 4. – С. 790 – 793.
22. *Погорелов А. В.* Многомерное уравнение Монжа – Ампера $\det\| z_{ij} \| = \phi(z_1, \ldots, z_n, z, x_1, \ldots, x_n)$. – М.: Наука, 1988. – 94 с.
23. *Погорелов А. В.* Однозначная определенность аффинно-минимальных гиперповерхностей // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, № 6. – С. 1315 – 1316.
24. *Погорелов А. В.* Замкнутые выпуклые проективно-минимальные гиперповерхности // Там же. – 1988. – **298**, № 3. – С. 551.
25. *Погорелов А. В.* Полные аффинно-минимальные гиперповерхности // Там же. – 1988. – **301**, № 6. – С. 1314 – 1316.
26. *Nirenberg L.* Rigidity of class of closed surfaces // Nonlinear Problems / Ed. R. E. Langer. – Madison: Univ. Wisconsin Press, 1963. – P. 177 – 193.

27. *Ковалева Г. А.* Отсутствие замкнутых асимптотических линий на трубках отрицательной гауссовой кривизны со взаимнооднозначным сферическим отображением // Фунд. и прикл. математика. – 1995. – **1**, № 4. – С. 953 – 977.
28. *Аминов Ю. А.* О неизгибаемости замкнутых поверхностей тригонометрического типа // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 12. – С. 1710 – 1720.
29. *Яглом И. М.* К четвертой проблеме Гильберта // Проблемы Гильберта. – М.: Наука, 1969. – С. 95 – 100.
30. *Погорелов А. В.* Четвертая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1974. – 79 с.
31. *Буземан Г.* Геометрия геодезических. – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
32. *Погорелов А. В.* Решение одной проблемы Буземана // Докл. АН СССР. – 1990. – **314**, № 4. – С. 790 – 792.
33. *Pogorelov A. V.* Busemann regular G-spaces. – Harwood Acad. Publ., 1998. – 102 p.
34. *Погорелов А. В.* Об устойчивости минимальных поверхностей // Докл. АН СССР. – 1981. – **260**, № 2. – С. 293 – 295.
35. *Лифшиц И. М., Погорелов А. В.* Об определении поверхности Ферми и скоростей электронов в металле по осцилляциям магнитной восприимчивости // Там же. – 1954. – **96**, № 6. – С. 1143 – 1145.
36. *Погорелов А. В.* Об одной проблеме Стокера // Там же. – 2002. – **385**, № 1. – С. 25 – 27.
37. *Александров В. А., Арнольд В. И., Борисенко А. А. и др.* Алексей Васильевич Погорелов // Успехи мат. наук. – 2003. – **58**, № 3. – С. 173 – 175.

Получено 31.01.2006