УДК 517.98

М. Ф. Городній (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ОБОРОТНІСТЬ ОПЕРАТОРА $d/dt + A$ В ДЕЯКИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

We prove that the operator $d/dt + A$, which is constructed on the basis of a sectorial operator A with the spectrum in the right half-plane of $\mathbb{C}$, is continuously invertible in the Sobolev spaces $W_p^1(\mathbb{R}, D_\alpha)$, $\alpha \geq 0$. Here, D_α is the domain of definition of the operator A^α and the norm in D_α is presented by the norm of the graph of A^α.

Доказано, что оператор $d/dt + A$, построенный с помощью секториального оператора A со спектром в правой полуплоскости $\mathbb{C}$, является непрерывно обратимым в пространствах Соболева $W_p^1(\mathbb{R}, D_\alpha)$, $\alpha \geq 0$. Здесь D_α — область определения оператора A^α, норма в D_α — норма графика оператора A^α.

1. Вступ. Нехай B — комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ та нульовим елементом $\vec{0}$; $L(B)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B; I — одиничний, O — нульовий оператори в B; $R(T)$, $\sigma(T)$, $R_\lambda(T) := (\lambda I - T)^{-1}$ позначають відповідно образ, спектр та резольвентну множину оператора T. Нехай $A: D(A) \subset B \to B$ — секторіальний оператор, e^{-As}, $s > 0$, — експонента від A [1, с. 26 – 28], $e^{-A0} := I$.

Зафіксуємо $p \in [1, +\infty)$. Позначимо через $L_p = L_p(\mathbb{R}, B)$ банахів простір усіх вимірних за Бохнером, інтегровних з p-м степенем функцій із нормою $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} \|f\|_p\right)^{1/p}$ (див., наприклад, [2, с. 102]). Покладемо також

$$l_p(B) := \left\{ x := \{x(n) : n \in \mathbb{Z}\} \subset B \mid |x|_p := \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p} < +\infty \right\}.$$

$\left(l_p(B), |\cdot|_p\right)$ — банахів простір із покоординатними додаванням елементів і множенням на комплексне число.

Оператору A поставимо у відповідність лінійний оператор $\mathbb{L}_A : D(\mathbb{L}_A) \subset \subset L_p \to L_p$, який визначається за таким правилом. Функція $x \in L_p$ належить $D(\mathbb{L}_A)$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться така функція $f \in L_p$, що для всіх $t_0 \leq t$ із $\mathbb{R}$ справджуються рівності

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s)\, ds. \tag{1}$$

При цьому покладаємо $\mathbb{L}_A x = f$.

Зауважимо, що в (1) використовується інтеграл у сенсі Бохнера.

Оскільки $\left\{ e^{-A(t-s)} : -\infty < s \leq t < +\infty \right\}$ є сім'єю еволюційних операторів для лінійного диференціального рівняння $x'(t) + Ax(t) = \vec{0}$, $t \in \mathbb{R}$, то $\mathbb{L}_A = = d/dt + A : D(\mathbb{L}_A) \subset L_p \to L_p$ є абстрактним параболічним оператором [3, с. 165].

Справджується наступна теорема.

Теорема 1. *Наведені нижче твердження є еквівалентними*:

1. *Оператор* $\mathbb{L}_A$ *має обернений оператор* $\mathbb{L}_A^{-1} \in L(L_p)$.

2. *Для довільного* $\bar{y} \in l_p(B)$ *різницеве рівняння* $x_{n+1} + e^{-A} x_n = y_n$, $n \in \mathbb{Z}$, *має у просторі* $l_p(B)$ *єдиний розв'язок* $\bar{x}$.

3. *Спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A *не перетинається з уявною віссю* $i\mathbb{R} := \{it : t \in \mathbb{R}\}$.

Доведення. Еквівалентність тверджень 1 і 2 випливає з теореми 3 роботи [4] та теореми Банаха про обернений оператор для замкненого оператора.

Твердження 2 виконується тоді і тільки тоді, коли $\sigma(e^{-A}) \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \varnothing$ (див. [5, 6]). Згідно з [7, с. 98] $\{e^{-\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(e^{-A})$, а отже, справджується імплікація 2) $\Rightarrow$ 3).

Якщо $\sigma(A) \bigcap i\mathbb{R} = \varnothing$, то $\sigma(A) = \sigma_+(A) \bigcup \sigma_-(A)$, де $\sigma_+(A)$, $\sigma_-(A)$ — замкнені множини, які лежать відповідно в правій та лівій півплощинах $\mathbb{C}$, а множина $\sigma_-(A)$ є обмеженою. Тому згідно з [1, с. 38] простір B розкладається в пряму суму інваріантних відносно оператора A підпросторів $B_\pm$; звуження $A_\pm$ оператора A на $B_\pm$ мають відповідно спектри $\sigma_\pm(A)$; A_- — лінійний обмежений оператор, A_+ — секторіальний оператор.

Нехай $P_\pm$ — проектори в B відповідно на підпростори $B_\pm$. Тоді на підставі леми 1 із [4] оператор $\mathbb{L}_A$ має обернений оператор $\mathbb{L}_A^{-1} \in L(L_p)$, який визначається формулою

$$(\mathbb{L}_A^{-1} f)(t) = \int_{\mathbb{R}} G_A(t-s) f(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad f \in L_p, \tag{2}$$

де

$$G_A(t) := \begin{cases} e^{-At} P_+, & t \geq 0, \\ -e^{-At} P_-, & t < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Зазначимо, що коли $\sigma_-(A) = \varnothing$, то $P_+ = I$, $P_- = O$.

Таким чином, із твердження 3 випливає твердження 1.

Теорему 1 доведено.

Мета цієї статті — довести, що коли виконується твердження 3, то оператори, які визначаються аналогічно до $\mathbb{L}_A$ в деяких соболєвських просторах B-значних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, теж є неперервно оборотними. Про застосування таких результатів до дослідження лінійних параболічних диференціальних операторів див. [3] (гл. X), [4].

2. Основний результат. Нехай $\sigma(A) \bigcap i\mathbb{R} = \varnothing$. Скористаємося позначеннями із доведення теореми 1 і покладемо $f_\pm := P_\pm f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Внаслідок (2), (3) при $f \in L_p$ єдиний розв'язок $x \in L_p$ рівняння $\mathbb{L}_A x = f$ зображується у вигляді $x(t) = x_+(t) + x_-(t)$, $t \in \mathbb{R}$, де

$$x_+(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A_+(t-s)} f_+(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

$$x_-(t) = -\int_{t}^{+\infty} e^{-A_-(t-s)} f_-(s)\, ds, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

— розв'язки у сенсі (1) рівнянь $\mathbb{L}_{A_\pm} x_\pm = f_\pm$ у просторах $B_\pm$. Оскільки $A_- \in L(B_-)$, то до оператора $\mathbb{L}_{A_-}$ можна застосувати наступний результат.

Позначимо через $W_p^1 = W_p^1(\mathbb{R}, B)$ простір Соболєва функцій із L_p, узагальнені похідні яких належать L_p, і через $|\cdot|_{1,p}$ норму в W_p^1.

Теорема 2 (див. [8]). *Нехай* $A \in L(B)$, $\sigma(A) \bigcap i\mathbb{R} = \varnothing$. *Тоді* $D(\mathbb{L}_A) = W_p^1$ *і лінійний оператор* $\mathbb{L}_A : W_p^1 \to L_p$ *є обмеженим і неперервно оборотним, тобто*

$$\exists M > 0 \quad \forall f \in L_p \ : \quad \left|\mathbb{L}_A^{-1} f\right|_{1,p} \le M \| f \|_p .$$

З урахуванням теореми 2 у подальшому будемо досліджувати властивості розв'язків рівняння $\mathbb{L}_{A_+} x_+ = f_+$. Для скорочення запису вважатимемо, що $A_+ = A$, тобто

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}. \tag{6}$$

Внаслідок (6) для кожного $\alpha \ge 0$ визначений замкнений оператор A^{α} : $D_\alpha = D(A^\alpha) \subset B \to B$, причому D_α — банахів простір із нормою $\|x\|_\alpha :=$ $:= \left\|A^\alpha x\right\|$, $x \in D_\alpha$ [1] (§1.4). У подальшому будемо використовувати банахові простори $L_p(\alpha) := L_p(\mathbb{R}, D_\alpha)$, норми в яких позначатимемо $\|\cdot\|_{\alpha,p}$, а також такі класи функцій:

$$C_b := \Big\{ f : \mathbb{R} \to B \mid f \text{ неперервна на } \mathbb{R}$$

$$\text{за нормою } \|\cdot\|; \quad \|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\| < +\infty \Big\},$$

$$C_b^1 := \Big\{ f : \mathbb{R} \to B \mid f \text{ має неперервну похідну на } \mathbb{R}$$

$$\text{за нормою } \|\cdot\|; \quad \|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty < +\infty \Big\},$$

$$L_p^1 := \Big\{ f \in C_b^1 \;\Big|\; \{f, f'\} \subset L_p \Big\},$$

$$F(\alpha) := \Big\{ f : \mathbb{R} \to D_\alpha \mid f \text{ фінітна і}$$

$$\text{нескінченно диференційовна на } \mathbb{R} \text{ за нормою } \|\cdot\|_\alpha \Big\}.$$

Для $f \in F(\alpha)$ покладемо $\|f\|_{\alpha,p,1} := \|f\|_{\alpha,p} + \|f'\|_{\alpha,p}$ і позначимо через $W_p^1(\alpha)$ замикання $F(\alpha)$ за $\|\cdot\|_{\alpha,p,1}$. Зазначимо, що $\left(C_b, \|\cdot\|_\infty\right)$, $\left(C_b^1, \|\cdot\|_{1,\infty}\right)$, $\left(W_p^1(\alpha), \|\cdot\|_{\alpha,p,1}\right)$ — банахові простори, причому $\left(W_p^1(0), \|\cdot\|_{0,p,1}\right) = \left(W_p^1, |\cdot|_{1,p}\right)$.

Зафіксуємо $p \ge 1$, $\alpha \ge 0$ і визначимо оператор $U : D(U) \subset W_p^1(\alpha) \to W_p^1(\alpha)$ за таким правилом. Функція $x \in W_p^1(\alpha)$ належить $D(U)$ тоді і тільки тоді, коли знайдеться така функція $f \in W_p^1(\alpha)$, що для всіх $t_0 \le t$ із $\mathbb{R}$ справджуються рівності (1). При цьому ми покладаємо $Ux = f$.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо секторіальний оператор* A *задовольняє умову* (6), *то лінійний оператор* U *має обернений оператор* $U^{-1} \in L(W_p^1(\alpha))$.

При доведенні теореми 3 будемо використовувати таке твердження.

Лема 1. *Нехай секторіальний оператор* A *задовольняє умову* (6) *і* $f \in L_p^1$. *Тоді для єдиного розв'язку* $x \in L_p$ *рівняння* $\mathbb{L}_A x = f$ *справджуються такі твердження*:

1) $x(t) \in D(A)$ *та існує* $x'(t)$ *для кожного* $t \in \mathbb{R}$, *а також*

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

2) *функції* $x'(t)$, $Ax(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *належать до множини* $C_b \cap L_p$.

Доведення. Оскільки $f \in L_p^1$, то

$$\forall t, s \in \mathbb{R}: \quad \|f(t) - f(s)\| \le \|f'\|_\infty |t - s|. \tag{8}$$

Тому диференціальне рівняння (7) має єдиний відповідний до f обмежений розв'язок x [9], причому

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} f(s)\,ds, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$x'(t) = -\int_{-\infty}^{t} Ae^{-A(t-s)}\big(f(s) - f(t)\big)\,ds, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Із (4), (9) і означення обмеженого розв'язку диференціального рівняння (7) випливає, що виконується твердження 1.

Перевіримо правильність твердження 2. Внаслідок (6) існують такі додатні сталі δ, c [1, с. 28], що

$$\forall t > 0: \quad \left\|e^{-At}\right\| \le ce^{-\delta t}, \qquad \left\|Ae^{-At}\right\| \le \frac{c}{t}e^{-\delta t}. \tag{11}$$

Тому з урахуванням (8) інтеграл (10) збігається абсолютно, а отже, для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = -\int_0^{+\infty} Ae^{-Au}\big(f(t-u) - f(t)\big)\,du = \int_0^{+\infty} \frac{d}{du}\Big(e^{-Au}\big(f(t-u) - f(t)\big)\Big)\,du +$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{-Au} f'(t-u)\,du = e^{-Au}\big(f(t-u) - f(t)\big)\Big|_{u \to 0+}^{u \to +\infty} + \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} f'(s)\,ds.$$

Оскільки $f \in L_p^1 \subset C_p^1$, то внаслідок (11) $\left\|e^{-Au}\big(f(t-u) - f(t)\big)\right\| \to 0$ при $u \to 0+$ або $u \to +\infty$. Тому для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} f'(s)\,ds, \tag{12}$$

а отже, $x' \in L_p$. Також, скориставшись зображенням (12) і застосувавши лему 1 із [4] до рівняння $\mathbb{L}_A x' = f'$ у просторі C_b замість L_p, робимо висновок, що $x' \in C_b$.

Залишилось зауважити, що із (7) і включення $\{x, x'\} \subset C_b \cap L_p$ випливає, що $Ax \in C_b \cap L_p$.

Лему 1 доведено.

3. Доведення теореми 3. I. Оскільки $\|x\| \le \left\|A^{-\alpha}\right\| \cdot \|x\|_\alpha$ для кожного $x \in D_\alpha$, то $W_p^1(\alpha) \subset L_p$. Тому з означень операторів U та $\mathbb{L}_A$, умови (6) і теореми 1 випливає, що $D(U) \subset D(\mathbb{L}_A)$, $Ux = \mathbb{L}_A x$ для кожного $x \in D(U)$, а також U є бієкцією з $D(U)$ в $R(U)$.

II. Доведемо, що $F(\alpha) \subset R(U)$ і

$$\forall f \in F(\alpha): \quad \left\| U^{-1} f \right\|_{\alpha, p, 1} \leq \frac{c}{\delta} \| f \|_{\alpha, p, 1}, \tag{13}$$

де c, δ — сталі з нерівностей (11).

Справді, $F(\alpha) \subset L_p^1$, тому внаслідок рівностей (9), (12), теореми 3.7.12 із [2, с. 97] і властивостей дробових степенів оператора A для кожного $t \in \mathbb{R}$ одержуємо

$$A^{\alpha}(U^{-1} f)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} A^{\alpha} f(s) ds, \tag{14}$$

$$A^{\alpha}(U^{-1} f)'(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} A^{\alpha} f'(s) ds. \tag{15}$$

Використовуючи зображення (14), оцінки (11) і нерівність Юнга [10, с. 318], маємо

$$\left\| A^{\alpha} U^{-1} f \right\|_p \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{t} c e^{-\delta(t-s)} \left\| A^{\alpha} f(s) \right\| ds \right)^p dt \right)^{1/p} \leq \frac{c}{\delta} \left\| A^{\alpha} f \right\|_p,$$

тобто $\left\| U^{-1} f \right\|_{\alpha, p} \leq \frac{c}{\delta} \| f \|_{\alpha, p}$. Аналогічно внаслідок (15) $\left\| U^{-1} f' \right\|_{\alpha, p} \leq$ $\leq \frac{c}{\delta} \| f' \|_{\alpha, p}$. З двох останніх рівностей випливає, що справджується оцінка (13).

III. Перевіримо, що $R(U) = W_p^1(\alpha)$ і оцінка (13) є правильною для кожного $f \in W_p^1(\alpha)$.

Зафіксуємо $f \in W_p^1(\alpha)$. Зазначимо, що внаслідок (4) аналогічно до (14)

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad A^{\alpha}(\mathbb{L}_A^{-1} f)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} A^{\alpha} f(s) ds. \tag{16}$$

Оскільки множина $F(\alpha)$ є скрізь щільною в $W_p^1(\alpha)$, то існує така послідовність $\{f_n\} \subset F(\alpha)$, що

$$\| f_n - f \|_{\alpha, p, 1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Внаслідок (17) послідовність $\{f_n\}$ є фундаментальною в $W_p^1(\alpha)$, тому з (13) випливає, що $\{U^{-1} f_n\}$ — фундаментальна послідовність в $W_p^1(\alpha)$. Отже, знайдеться така функція $u \in W_p^1(\alpha)$, що

$$\left\| U^{-1} f_n - u \right\|_{\alpha, p, 1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{18}$$

З іншого боку, кожна з функцій f_n, $n \geq 1$, задовольняє рівність (14). Тому з урахуванням (11), (16) і (17)

$$\left\| U^{-1} f_n - \mathbb{L}_A^{-1} f \right\|_{\alpha, p, 1} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Внаслідок (18), (19) $\mathbb{L}_A^{-1} f = u \in W_p^1(\alpha)$, а отже, $f \in R(U)$.

Оскільки (13) справджується для кожної з функцій f_n, $n \geq 1$, і $\mathbb{L}_A^{-1} f = u$, то з (17), (18) випливає, що (13) виконується і для функції f.

IV. На підставі викладеного в пп. I, III лінійний оператор U є бієкцією з $D(U)$ в $W_p^1(\alpha)$ і для кожного $f \in W_p^1(\alpha)$ справджується оцінка (13). Тому існує оператор $U^{-1} \in L(W_p^1(\alpha))$.

Теорему 3 доведено.

4. Висновок. У даній статті доведено, що оператор $d/dt + A$, побудований за допомогою секторіального оператора A, що задовольняє умову (6), є неперервно оборотним у просторах Соболєва $W_p^1(\alpha)$. Аналогічний результат для абстрактного диференціального оператора $d/dt + A(t)$ у просторах C_b та L_p встановлено в роботах [3, 4].

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
2. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.
3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.
4. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1996. – **30**, № 3. – С. 1 – 11.
5. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ операторов взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 2001. – **42**, № 6. – С. 1231 – 1243.
6. *Городній М. Ф.* l_p-Розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 425 – 430.
7. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – Киев: Вища шк., 1989. – 348 с.
8. *Городній М. Ф.* L_p-розв'язки диференціального рівняння з обмеженим операторним коефіцієнтом // Наук. зап. НаУкма. Фіз.-мат. науки. – 2003. – **21**. – С. 32 – 35.
9. *Городній М. Ф., Чайковський А. В.* Про наближення обмеженого розв'язку диференціального рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом // Доп. НАН України. – 2002. – № 6. – С. 10 – 14.
10. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

Одержано 27.10.2005